Лекция 1

Геометрия и физика специальной теории относительности

Специальная теория относительности основана на геометрии пространства-времени Минковского $M^4 \cong \mathbb{R}^{1,3}$ или, более общо, $M^d \cong \mathbb{R}^{1,d-1}$.[1] Это пространство-время представляет собой аффинное пространство с заданной на нем плоской метрикой сигнатуры $(1, d-1)$. Чтобы разобраться в этом, начнем с векторных (линейных) пространств.

Пусть V — d-мерное линейное пространство. С каждым таким пространством связано d-мерное *двойственное пространство* V^*, то есть пространство линейных функций (форм) на пространстве V. Предположим, что на пространстве V задана невырожденная симметричная билинейная форма $g : V \otimes V \to \mathbb{R}$ (или, что то же самое, $g \in V^* \otimes V^*$), то есть такое билинейное симметричное отображение $g(u, v) = g(v, u)$ $(u, v \in V)$, что для любого вектора $u \neq 0$ существует хотя бы один вектор v, такой что $g(u, v) \neq 0$. Форму g можно также понимать как отображение $\overline{g} : V \to V^*$, сопоставляющее каждому вектору $u \in V$ линейную форму $g(u, \cdot) \in V^*$. Невырожденность формы g означает существование обратного отображения $\overline{g}^* : V^* \to V$, которое по тому же принципу задает билинейную форму $g^* : V^* \otimes V^* \to \mathbb{R}$, то есть бивектор $g^* \in V \otimes V$.

Изучим вопрос о знакоопределенности формы g. Предположим, что $g(u, u) \geq 0$ для любого $u \neq 0$. Тогда из невырожденности формы g следует, что $g(u, u) > 0$. Действительно, пусть есть такой ненулевой вектор u, что $g(u, u) = 0$. В силу невырожденности g существует такой вектор v, что $g(u, v) \neq 0$ и, по условию, $g(v, v) \geq 0$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \leq g(u + \alpha v, u + \alpha v) = 2\alpha g(u, v) + \alpha^2 g(v, v).$$

Очевидно, это неравенство не может быть соблюдено в некоторой окрестности точки $\alpha = 0$ в силу того, что $g(u, v) \neq 0$. Таким образом, любая неотрицательная форма положительно определена.

Но это значит, что если существует «нулевой» вектор u, то есть вектор, такой что $g(u, u) = 0$, то существуют и такие два вектора v_+, v_-, что $g(v_+, v_+) > 0$, $g(v_-, v_-) < 0$ и при этом $g(u, v_\pm) \neq 0$. Более того, любой «нулевой» вектор u может быть представлен как линейная комбинация двух таких векторов с разными знаками формы. Пусть имеется вектор v_+, такой что $g(v_+, v_+) = 1$, $g(u, v_+) \neq 0$. Тогда для вектора $v_- = u - g(u, v_+)v_+$ имеем $g(v_-, v_-) = -(g(u, v_+))^2$. Ни множество векторов $\mathcal{C}_+$ с $g(u, u) > 0$, ни множество векторов $\mathcal{C}_-$ с $g(u, u) < 0$, ни множество векторов $\mathcal{J}$ с $g(u, u) = 0$ не образуют векторных пространств. Но тот факт, что «нулевые» векторы раскладываются в пару «положительных» и «отрицательных» векторов, позволяет предположить, что и само векторное пространство V распадается в сумму $V = V_+ \oplus V_-$ пространств с положительно- и отрицательно-определенной формой g.

Чтобы в этом убедиться, построим базис в V_-. Пусть v_1 — вектор с $g(v_1, v_1) < 0$. Тогда множество ортогональных ему векторов, то есть векторов u, таких что $g(v_1, u) = 0$ образует линейное пространство $V^{(1)}$. В пространстве $V^{(1)}$ форма g может быть положительно определена. Тогда $V_+ = V^{(1)}$, а $V_- = \operatorname{span}(v_1)$. Если же нет, выберем вектор $v_2 \in V^{(1)}$ такой, что $g(v_2, v_2) < 0$ и определяем пространство $V^{(2)}$ как подпространство ортогональных ему векторов в $V^{(1)}$. Продолжаем процедуру, пока на пространстве $V^{(d_-)}$ форма g не будет положительно определена. Тогда $V_+ = V^{(d_-)}$ размерности $d_+ = d - d_-$, а $V_- = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{d_-})$. Заодно мы получили ортогональный базис в V_-, который легко превратить в ортонормированный, если выбирать векторы v_i условием $g(v_i, v_i) = -1$. Мы будем говорить, что форма g имеет *сигнатуру* (d_+, d_-). В теории относительности нас будут интересовать формы сигнатуры $(1, 3)$.[2] Одномерное пространство V^+ отвечает времени, а трехмерное пространство V^- — физическому пространству. Векторы из $\mathcal{C}^+$ (с положительной нормой) называют *времениподобными*, векторы из $\mathcal{C}^-$ (с отрицательной нормой) — *пространственноподобными*. Векторы из $\mathcal{J}$ (с нулевой нормой) называют *светоподобными* или *изотропными*. Само множество $\mathcal{J}$ называют *световым конусом*, причем $\mathcal{C}^+$ считается внутренностью светового конуса, а $\mathcal{C}^-$ — его внешней областью. В теории

[1] Нас, конечно, будет интересовать прежде всего случай $d = 4$, однако там, где это не будет заметно усложнять рассуждения, мы будем рассматривать общие $d > 1$.

[2] Можно было бы рассматривать формы сигнатуры $(3, 1)$. В некоторых отношениях такой выбор удобнее, а в чем-то менее удобен, так что это дело вкуса.

относительности времениподобный базисный вектор принято обозначать e_0, а три пространственноподобных — $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$. Во всех векторных и матричных формулах будем принимать, что значения индексов расположены в порядке $0, 1, 2, 3$.

Вернемся к общему случаю. Рассмотрим произвольный базис e_μ, $\mu = 1, \ldots, d$ в пространстве V. Любой вектор $u \in V$ записывается в виде $u = u^\mu \mathrm{e}_\mu$, где мы предполагаем суммирование по повторяющемуся индексу. Тогда числа $g_{\mu\nu} = g(\mathrm{e}_\mu, \mathrm{e}_\nu)$ образуют симметричную матрицу $G = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^d$. При этом, очевидно, $g(u, v) = g(u^\mu \mathrm{e}_\mu, v^\nu \mathrm{e}_\nu) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$. Замена базиса $\mathrm{e}_\mu = V_\mu{}^\nu \mathrm{e}'_\nu$ отвечает преобразованию $g_{\mu\nu} = V_\mu{}^\rho V_\nu{}^\sigma g'_{\rho\sigma}$ или $G = V G' V^T$. Тот факт, что пространство V распадается в сумму $V_+ \oplus V_-$ означает, что таким преобразованием мы можем привести матрицу G к виду

$$G = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{d_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{d_-}) \equiv (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^d \equiv \mathrm{H}^{(d_+, d_-)}. \tag{1.1}$$

Матрицы V, сохраняющие этот вид формы G, то есть

$$\mathrm{H}^{(d_+, d_-)} = V \mathrm{H}^{(d_+, d_-)} V^T,$$

образуют группу псевдоортогональных матриц $O(d_+, d_-)$. Те, которые при этом имеют положительный (равный единице) определитель, образуют группу $SO(d_+, d_-)$. Группа $SO(1, 3)$ (и ее обобщение $SO(1, d-1)$ в гипотетическом пространстве-времени размерности d) называется *группой Лоренца*. В теории относительности будем писать $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$.

Пусть $\omega \in V^*$, то есть ω — линейная форма на V. Тогда мы можем ввести компоненты $\omega_\mu = \omega(\mathrm{e}_\mu)$. Это значит, что мы можем записать форму в виде $\omega = \omega_\mu \mathrm{e}^\mu$, где e^μ — базисные формы, определяемые соотношением

$$\mathrm{e}^\mu(\mathrm{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu. \tag{1.2}$$

Бивектор g^*, очевидно, можно записать в виде $g^{\mu\nu} \mathrm{e}_\mu \otimes \mathrm{e}_\nu$, то есть $g^*(\omega, \sigma) = g^{\mu\nu} \omega(\mathrm{e}_\mu) \sigma(\mathrm{e}_\nu) = g^{\mu\nu} \omega_\mu \sigma_\nu$. Коэффициенты $g^{\mu\nu}$ образуют матрицу G^{-1}:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{1.3}$$

Использование индексных обозначений компактно, но имеет один недостаток: мы заменяем реальные инвариантные объекты (тензоры) их компонентами, зависящими от выбора базиса. В то же время безындексная запись математически корректна, обща, но громоздка. Поэтому мы часто будем пользоваться *методом формальных индексов*. Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V \otimes V \otimes \cdots$ и перенумеруем входящие в него пространства натуральными числами по порядку. Будем соответствующим числом жирным шрифтом указывать, в каком пространстве расположен или на какое пространство действует объект. Например, $u^{\mathbf{k}}$ — это вектор u, расположенный в k-й тензорной компоненте, а $\omega_{\mathbf{k}}$ — 1-форма, действующая на k-ю компоненту. Тогда $\omega_{\mathbf{1}} u^{\mathbf{1}} = u^{\mathbf{1}} \omega_{\mathbf{1}} = \omega u = \omega(u)$. Здесь от формального индекса, вроде бы, нет никакой пользы. Но вот $g_{\mathbf{12}} u^{\mathbf{1}} v^{\mathbf{2}} = g(u, v)$ и $g_{\mathbf{12}} u^{\mathbf{1}} = (\overline{g}(u))_{\mathbf{2}}$ записать с формальными индексами уже удобней. И все четыре объекта $g, \overline{g}, g^*, \overline{g}^*$ можно теперь обозначать одной буквой g. Действительно,

$$g^{\mathbf{13}} g_{\mathbf{32}} = \delta^{\mathbf{1}}_{\mathbf{2}} \tag{1.4}$$

формально похоже на (1.3), но выражает инвариантный факт, что $\overline{g}^* = \overline{g}^{-1}$. На общих многообразиях запись с формальными индексами позволит упростить вывод многих формул по сравнению с выводом в компонентах.

Нам часто удобно будет отождествлять вектор $u \in V$ с формой $\overline{g}(u) \in V^*$ и, наоборот, форму $\omega \in V^*$ с вектором $\overline{g}^*(\omega) \in V$. Чтобы подчеркнуть разницу мы будем писать верхний формальный индекс у объекта из V и нижний у объекта из V^*. Если не будет необходимости указывать конкретную «цифру», но нужно будет подчеркнуть, какому пространству принадлежит объект, мы будем вместо индекса ставить жирную точку, например, $u^\bullet = u$, $u_\bullet = \overline{g}(u)$ (то есть $u_{\mathbf{1}} = g_{\mathbf{12}} u^{\mathbf{2}}$).

Теперь перейдем к аффинным пространствам. Аффинное пространство $\mathcal{A}(V)$ отличается от линейного V только отсутствием выделенного нуля. То есть это множество точек, такое что каждой паре точек A, B отвечает вектор в линейном пространстве V, обозначаемый $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, а для любых трех точек A, B, C выполняется правило треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Форма g определяет *метрику* на аффинном пространстве, то есть расстояние $|AB|$ между точками A и B задается формулой

$$|AB|^2 = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}).$$

Понятно, что определенное таким образом расстояние может быть как вещественным, так и мнимым. В специальной теории относительности пространство-время является аффинным пространством $M^4 = \mathcal{A}(V)$, где V — векторное пространство, на котором задана метрика сигнатурой $(1, 3)$. Точки в этом пространстве называются *событиями*. Расстояние $|AB|$ между двумя событиями называется *собственным временем*, отвечающим отрезку $[AB]$.

В аффинном пространстве точки можно задать координатами. Если мы выделим «начальную» точку O и базис $\{\mathrm{e}_\mu\}$ в пространстве V, то координаты x^μ_A точки A задаются уравнением

$$\overrightarrow{OA} = x^\mu_A \mathrm{e}_\mu.$$

С одной стороны, это отождествляет аффинное пространство с пространством $\mathbb{R}^d$, которое, в случае метрики $g = \eta_{\mu\nu}\mathrm{e}^\mu\mathrm{e}^\nu$ обозначается как $\mathbb{R}^{d_+, d_-}$. С другой стороны, это вводит на аффинном пространстве структуру многообразия. Понятно, что аффинное пространство покрывается одной картой, но специальная теория относительности имеет смысл на многообразиях с разной топологией. Главное, чтобы матрицы перехода между картами с (псевдо)декартовыми координатами задавались бы псевдоортогональными матрицами. Обозначения и понятия, связанные со структурой многообразия мы разберем в следующей лекции, посвященной более общей геометрии.

В теории относительности мы иногда будем пользоваться обозначениями $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Скорость света мы будем всюду принимать равной единице. Соответственно, квадрат расстояния (собственного времени) между событиями в специальной теории относительности равен

$$|AB|^2 = (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2. \tag{1.5}$$

Для бесконечно-малых расстояний собственное время обозначается ds и равно

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.6}$$

Обсудим группу Лоренца $SO(1, 3)$ и ее физическую интерпретацию. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' и связанные с ними системы пространственных координат x^i и x'^i $(i = 1, 2, 3)$. Выберем эти системы координат специальным образом. Во-первых, примем, что оси времени пересекаются в точке $t = t' = 0$. Эти оси лежат в одной двумерной плоскости. Векторы $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}'_0$, очевидно, направлены вдоль этих осей. Затем выберем базисный векторы $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}'_1$ в этой плоскости ортогонально $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}'_0$ соответственно и по одну сторону от осей времени. В подпространстве ортогональном плоскости временных осей выберем $\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}'_2$, $\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}'_3$. Положим, что система K' движется относительно системы K со скоростью v, то есть прямая вдоль вектора e'_0 задается уравнениями $x = vt$, $y = z = 0$. Тогда *преобразование Лоренца*

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{1.7}$$

принадлежит группе Лоренца. Параметр v есть скорость системы K' в системе отсчета K. Действительно, прямые вдоль вектора e'_0 задаются уравнениями $x = vt + \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$. Три вращения и преобразование Лоренца порождают всю группу Лоренца $SO(1, 3)$.[3] Преобразования Лоренца, также как и все остальные факты релятивистской кинематики, полностью выводятся из следующего основного постулата: *квадрат собственного времени $|AB|^2$ для двух событий A и B, определенный формулой (1.5), не зависит от системы отсчета.*

[3] Это означает, что любой элемент группы Лоренца может быть представлен в виде произведения некоторого количества этих специальных элементов. Можно показать, что любой элемент можно представить как произведение шести таких элементов (аналогично трем поворотам Эйлера в трехмерном пространстве) и поэтому группа Лоренца четырехмерного пространства является шестимерной группой Ли.

Полезно ввести *быстроту* θ уравнением $v = \operatorname{th}\theta$. Тогда преобразование Лоренца принимает вид

$$t' = t\operatorname{ch}\theta - x\operatorname{sh}\theta, \qquad x' = -t\operatorname{sh}\theta + x\operatorname{ch}\theta, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \tag{1.8}$$

напоминающий вращение в эвклидовом пространстве. Легко проверить, что оно прямо переходит во вращение эвклидова пространства после *викова поворота* $t = -\mathrm{i}\tau$ времени в комплексной плоскости. Тогда угол поворота совпадет с $-\mathrm{i}\theta$.

Рассмотрим теперь динамику специальной теории относительности. Нас будет интересовать поведение частиц в геометрии Минковского.

1. Свободная частица. Движение частицы описывается *мировой линией*, то есть линией $x^\bullet(t) = (t, \boldsymbol{r}(t)) = t\mathrm{e}_0 + x^i(t)\mathrm{e}_i$, где $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x^i(t)\mathrm{e}_i$ — закон движения частицы. Свободная частица согласно первому закону Ньютона движется равномерно и прямолинейно. То есть, если имеются два события A и B, то мировая линия свободной частицы, в момент t_A находящейся в точке $\boldsymbol{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$, а в момент t_B — в точке $\boldsymbol{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$, будет отрезком $[AB]$. Такая линия минимизирует действие

$$S[x] = -m\int_A^B ds = -m\int_{t_A}^{t_B} dt\,\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}. \tag{1.9}$$

В нерелятивистском пределе $v \ll 1$ действие сводится к интегралу от кинетической энергии

$$S[x] \simeq -m\int_{t_A}^{t_B} dt\,\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) = \mathrm{const} + \int_{t_A}^{t_B} dt\,\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}. \tag{1.10}$$

Уравнение движения, отвечающее действию (1.9), очевидно, имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{v}} = 0. \tag{1.11}$$

Тем не менее, полезно найти импульсы и гамильтониан системы:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}, \qquad H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{p} - L = \frac{m}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}. \tag{1.12}$$

Таким образом, в гамильтоновой форме уравнение движения имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{p}} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{E}, \qquad E = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}. \tag{1.13}$$

Энергия E и импульс $\boldsymbol{p}$ образуют 4-импульс[4]

$$p^\bullet = (E, \boldsymbol{p}) \equiv E\mathrm{e}_0 + p^i\mathrm{e}_i = mu^\bullet, \tag{1.14}$$

где u — 4-скорость

$$u^\bullet = \frac{dx^\bullet}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\right). \tag{1.15}$$

Величины

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \tag{1.16}$$

тоже сохраняются и образуют пространственно-временной момент импульса. Его чисто пространственные компоненты J^{ij} $(i, j = 1, \ldots, 3)$ совпадают с компонентами трехмерного момента импульса:

$$J^{ij} = \epsilon^{ijk} J_k, \tag{1.17}$$

где ϵ^{ijk} — полностью антисимметричный символ, такой что $\epsilon^{123} = 1$. Временные компоненты J^{0i} не порождают независимых сохраняющихся величин.

[4] Греческие буквы из середины алфавита $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ будут всюду использоваться для пространственно-временных индексов, пробегающих значения $0, 1, \ldots, d-1$. Латинские буквы из середины алфавита $i, j, k, l, \ldots$ будут использоваться для пространственных индексов и пробегать значения $1, \ldots, d-1$.

2. Частица в электромагнитном поле. Электромагнитное поле описывается 4-потенциалом $A_\bullet = (\varphi, -\boldsymbol{A}) \equiv \varphi \mathrm{e}^0 - A^i \mathrm{e}^i$ или, более точно, 1-формой $A(x) = A_\mu(x)\mathrm{e}^\mu = A_\mu(x)\,dx^\mu$. Движение частицы заряда e описывается действием

$$S[x] = \int_A^B (-m\,ds - eA) = \int_A^B (-m\,ds - eA_\mu\,dx^\mu) = \int_{t_A}^{t_B} dt\,\left(-m\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2} + e\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi\right). \tag{1.18}$$

Уравнение движения можно написать в гамильтоновой форме. Имеем для импульсов

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \tag{1.19}$$

и для гамильтониана

$$H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P} - L = \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))^2} + e\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{1.20}$$

Уравнение движения

$$\dot{\boldsymbol{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}} \tag{1.21}$$

нетрудно привести к стандартному виду

$$\dot{\boldsymbol{p}} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\varphi, \qquad \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{1.22}$$

В более инвариантном виде уравнение движения можно записать как

$$m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu{}_\nu u^\nu, \tag{1.23}$$

где тензор электромагнитного поля определяется как

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu = dA, \tag{1.24}$$

или

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{1.25}$$

Этот тензор выражается через компоненты напряженности поля

$$F_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Обратите внимание, что в левой части (1.23) дифференцирование выполняется по лоренц-инвариантному собственному времени.

Задачи

1. Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия (1.9), то есть максимум собственного времени $s = \int_A^B ds$. Приведите примеры мировых линий, отвечающих *наименьшему* собственному времени. Чему равно это время?

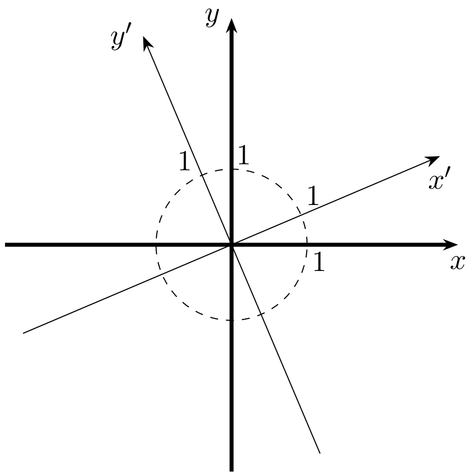
2. В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu).$$

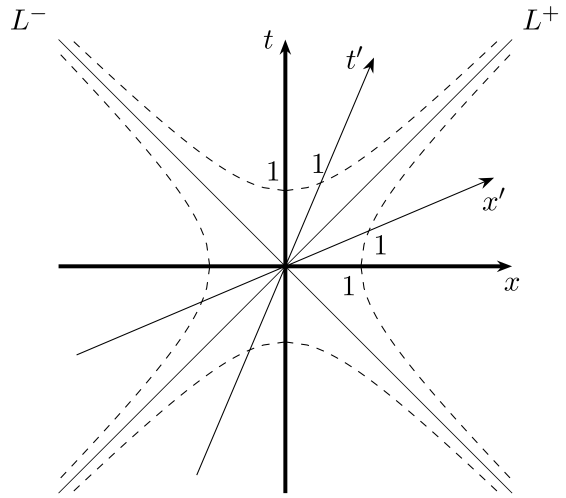
Покажите, что сохранение компонент J^{0i} эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_s E_s \boldsymbol{r}_s}{\sum_s E_s}$$

движется с постоянной скоростью.



(a) Поворот.



(b) Преобразование Лоренца. Прямые $L^{\pm}$ образуют световой конус.

Рис. 1.1. Поворот и преобразование Лоренца в двумерном пространстве-времени. Пунктирные линии содержат точки, удаленные на единичное (по модулю) расстояние от начала координат.

3. Покажите, что при калибровочном преобразовании

$$A \to A + d\chi,$$

где $\chi(x)$ — произвольное скалярное поле, действие (1.18) преобразуется как

$$S \to S + e(\chi(x_A) - \chi(x_B)).$$

Объясните, почему отсюда следует, что уравнение движения частицы не меняется при калибровочных преобразованиях.

4. Выведите уравнение (1.23).

5*. Рассмотрите незаряженную частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой $m(x)$ в действии (1.18), зависящей от точки в пространстве-времени. Получите уравнения движения такой частицы. Найдите гамильтониан и обобщенные импульсы. Покажите, что если $m(x) = m_0 + U(x)$, $U(x) \ll m_0$ и если $U(x)$ меняется со временем x^0 достаточно (насколько?) медленно, то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле $U(x)$.

Семинар 1

Преобразования Лоренца, координаты светового конуса, диаграмма Пенроуза

Для простоты мы будем рассматривать двумерное пространство-время.

1. Графическое представление преобразований Лоренца в двух измерениях (Рис. 1.1).

2. Координаты Риндлера и равноускоренное движение. Введем координаты τ и ξ уравнениями:

$$t = \xi \operatorname{sh} \tau, \qquad x = \xi \operatorname{ch} \tau.$$

Метрика в этих координатах принимает вид

$$ds^2 = \xi^2 \, d\tau^2 - d\xi^2.$$

Координаты Риндлера определены в во внешней области светового конуса: $|x| < |t|$ (Рис. 1.2). Линии постоянной координаты ξ отвечают мировым линиям наблюдателей с инвариантным ускорением ξ^{-1}, причем собственное время такой частицы равно $\xi\tau + \mathrm{const}$.

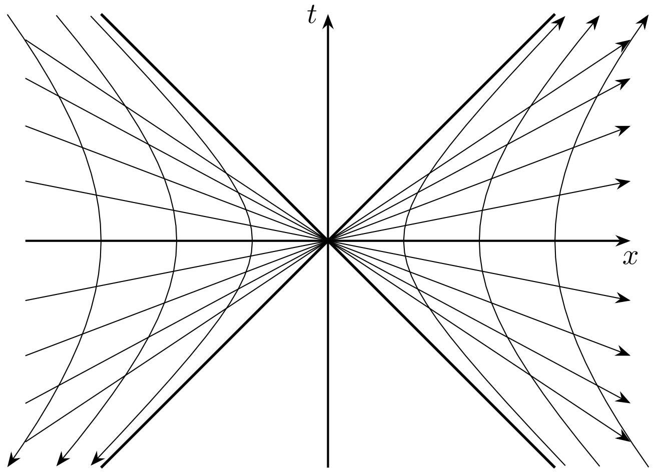


Рис. 1.2. Координаты Риндлера. Гиперболы отвечают линиям постоянной координаты $\xi = -3, -2, \ldots, 3$, а прямые — линиям постоянного времени $\tau = -0.8, -0.6, \ldots, 0.8$.

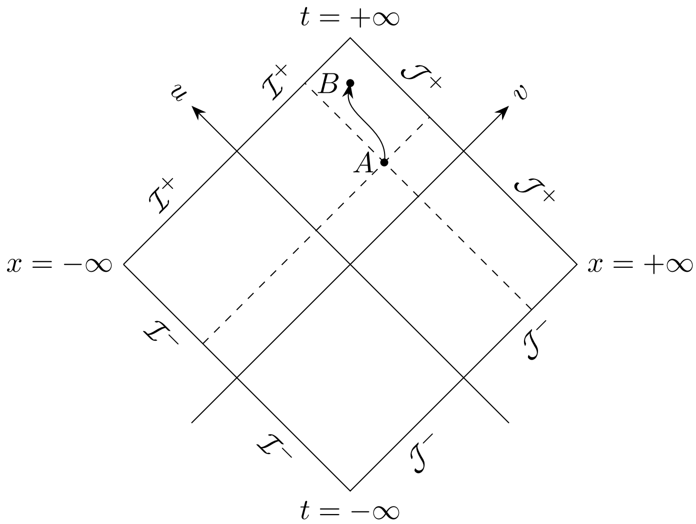


Рис. 1.3. Диаграмма Пенроуза для пространства Минковского. Граница $\mathcal{I}^+, \mathcal{J}^+$ отвечает бесконечному будущему, а граница $\mathcal{I}^-, \mathcal{J}^-$ — бесконечному прошлому.

Важной особенностью риндлеровских наблюдателей является наличие горизонта событий. События вне правого (при $\xi > 0$) или левого (при $\xi < 0$) клина для них ненаблюдаемы. Другое полезное наблюдение: твердый стержень не может ускоряться так, чтобы все его точки ускорялись с одним и тем же ускорением. Задний конец должен иметь большее ускорение («парадокс» Белла).

3. Координаты светового конуса и причинная диаграмма (диаграмма Пенроуза) пространства Минковского.

   Введем координаты
$$u = t - x, \qquad v = t + x.$$
   В этих координатах метрика имеет вид
$$ds^2 = du\, dv.$$
   В отличие от риндлеровских координат эти координаты глобально определены на всем двумерном пространстве-времени. Используя их можно «сжать» пространство-время, чтобы изобразить его на конечном листе:
$$u = 2 \operatorname{tg} u', \qquad v = 2 \operatorname{tg} v', \qquad ds^2 = \frac{4du'\, dv'}{\cos^2 u' \cos^2 v'}.$$

Тогда пространство-время примет вид, изображенный на Рис. 1.3. Диаграмма Пенроуза описывает причинную структуру пространства-времени. Световой конус любого события на этой диаграмме изображается двумя прямыми, наклоненными под углов $45°$ к горизонту.