Лекция 5

Поля в гравитационном поле. Тензор энергии-импульса

В этой лекции мы обсудим такой фундаментальный объект как *тензор энергии-импульса.* Дело в том, что общая теория относительности является теорией поля, и взаимодействие гравитации с веществом естественнее всего описывать в терминах теории поля. Мы начнем с теории поля, но потом увидим, что соответствующие объекты достаточно хорошо определены и для более привычных вам точечных частиц.

Начнем со специальной теории относительности. Пусть $\phi^a(x)$ $(a = 1, \ldots, N)$ — набор вещественных полей. Теория поля описывается обычно действием вида

$$S[\phi] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi). \tag{5.1}$$

Функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ называется *плотностью лагранжиана.* Довольно широкий класс систем представляют системы с плотностью лагранжиана вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} G_{ab}(\phi)\, \partial_\mu \phi^a\, \partial_\nu \phi^b - U(\phi), \tag{5.2}$$

где $G_{ij}(\phi)$ — симметричная матрица.

Уравнение движение записывается через плотность лагранжиана в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} = 0. \tag{5.3}$$

Это совершенно аналогично лагранжевым уравнениям движения для частицы в нерелятивистской классической механике.

Чтобы лучше понять смысл этих уравнений, рассмотрим простой пример. Пусть $N = 1$, а действие имеет вид

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2 \right). \tag{5.4}$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0 \tag{5.5}$$

называется *уравнением Клейна—Го́рдона.* Это — простейшее волновое уравнение в физике. Легко построить его решения в виде плоских волн. Подставляя

$$\phi_{k,\alpha}(x) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx + \mathrm{i}\alpha},$$

легко находим[1]

$$k^2 = \omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^0 = \pm \omega_{\boldsymbol{k}} \equiv \pm \sqrt{\omega_0^2 + \boldsymbol{k}^2}. \tag{5.6}$$

В силу инвариантности решения относительно замены $k \to -k$, $\alpha \to -\alpha$ можно выбрать знак «+». В силу линейности уравнения (5.5) любая линейная комбинация этих решений тоже является решением. Более того, построенная система решений полна: любое ограниченное решение уравнения Клейна—Гордона раскладывается по плоским волнам. Более того, она, очевидно, избыточна. Можно ограничиться двумя различными по модулю π значениями α, например $\alpha = 0, \pi/2$.

Теперь вернемся к лагранжиану общего вида. Изучим преобразование действия при сдвигах $x = x' + \xi$. В силу трансляционной инвариантности действие в некоторой конечной области U не должно меняться:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x\, \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{5.7}$$

[1] Обратите внимание на сходство этого закона дисперсии с законом $E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$ для частицы. На самом деле в квантовой теории поля уравнение Клейна—Гордона действительно описывает частицу массы $m = \hbar\omega_0$.

Последнее слагаемое связано с изменением области интегрирования при сдвиге. Операция δ_ξ, примененная к полям — это уже знакомая нам производная Ли. В аффинном пространстве в случае постоянного поля ξ эта производная тривиальна:

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \qquad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x\, \xi^\mu \phi_{,\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \xi^\mu \int_U d^d x\, \partial_\lambda T_\mu{}^\lambda, \tag{5.8}$$

где

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} + \partial_\lambda f_\mu{}^{\nu\lambda}, \qquad f_\mu{}^{\nu\lambda} = -f_\mu{}^{\lambda\nu}, \tag{5.9}$$

называется *каноническим тензором энергии-импульса*. Добавка $f_\mu{}^{\nu\lambda}$ обычно выбирается таким образом, чтобы тензор $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} T_\lambda{}^\nu$ был симметричен:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{5.10}$$

Канонический тензор энергии-импульса является сохраняющимся током для 4-импульса P^μ системы. Действительно, на решениях уравнения движения (5.3) первое слагаемое в (5.8) исчезает. В силу произвольности вектора ξ и области U, интеграл обращается в нуль при условии

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{5.11}$$

Компоненты *4-импульса*

$$P^\mu = \int d^{d-1}x\, T^{\mu 0}. \tag{5.12}$$

являются сохраняющимися зарядами,

$$\dot P^\mu = 0. \tag{5.13}$$

если интеграл берется по всему пространству (или, точнее, по области пространства, где происходит динамика поля ϕ). При этом величина $\mathcal{H}(\phi, \pi) = P_0$ как функция конфигурации полей $\phi^a(\boldsymbol{r})$ и обобщенных импульсов $\pi_a(\boldsymbol{r}) = \frac{\delta}{\delta \phi^a(\boldsymbol{r})} \int d^{d-1}x\, \mathcal{L}$ в данный момент времени t является гамильтонианом системы.

Другая сохраняющая величина, связанная с тензором энергии-импульса — это момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int d^{d-1}x\, (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}), \tag{5.14}$$

$$\dot J^{\mu\nu} = 0. \tag{5.15}$$

Его сохранение следует из возможности сделать тензор энергии-импульса симметричным (5.10).

Рассмотрим по отдельности различные компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, d-1). \tag{5.16}$$

Величина W имеет смысл плотности энергии. Компоненты S^i образуют пространственный вектор $\boldsymbol{S}$ с двойным смыслом: плотности импульса и плотности потока энергии. Вообще говоря, эти две плотности могли бы не совпадать. Их совпадение является следствием сохранения момента импульса. Величины σ^{ik} образуют пространственный тензор, который называется *тензором напряжений* и имеет смысл плотности потока импульса.

Хорошим физическим примером поля является электромагнитное поле. Аналогом полей ϕ для него являются компоненты 4-потенциала A_μ. Действие электромагнитного поля (в системе Хевисайда) имеет вид

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\int F \wedge *F, \tag{5.17}$$

где $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$. Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_\mu{}^\nu = -F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} + \frac{\delta_\mu^\nu}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}. \tag{5.18}$$

В компонентах имеем

$$\rho = \frac{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2}{2}, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \qquad \sigma^{ij} = E_i E_j + H_i H_j - \rho \delta_{ij}. \tag{5.19}$$

Величина $\boldsymbol{S}$ в случае электромагнитного поля называется *вектором Пойнтинга*, а ρ и σ^{ij} — плотностью электромагнитной энергии, и электромагнитным тензором напряжений.

Теперь перейдем к теории поля на многообразии. В этом случае действие (5.1) зависит также от метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{5.20}$$

Пока что мы будем рассматривать метрику не как поле, а как функциональный параметр. Чтобы подчеркнуть это, мы отделили ее от полей вертикальной чертой. Очевидно, что такое действие уже не является трансляционно-инвариантным. Тем не менее, можно ввести тензор, который будет переходить в канонический тензор энергии-импульса (5.9) в пределе $g = \eta$.

Нас будут интересовать *общековариантные* функционалы действия, то есть такие, которые не меняются при замене координат. Лагранжианы для таких функционалов действия (их мы тоже будем называть общековариантными) несложно построить. Например, все лагранжианы вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{ab}(\phi)\, \partial_\mu \phi^a\, \partial_\nu \phi^b - U(\phi) - R V(\phi) \tag{5.21}$$

являются общековариантными. Большой класс общековариантных лагранжианов можно построить из лоренц-инвариантных лагранжианов заменой

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu. \tag{5.22}$$

Получаемые таким способом лагранжианы называются лагранжианами с *минимальной* связью материи с гравитацией. Иными словами, лагранжиан с минимальной связью имеет вид

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_\bullet \phi | g, 0, \ldots, 0). \tag{5.23}$$

Например, лагранжиан (5.21) будет лагранжианом с минимальной связью, если $V(\phi) = 0$. В дальнейшем мы будем ограничиваться случаями минимальной связи.

Лагранжиан электромагнитного поля почти не меняется:

$$\mathcal{L}_{EM}(A, dA) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} F_{\kappa\lambda} F_{\mu\nu}.$$

Это связано с тем, что тензор напряженностей электромагнитного поля $F = dA$ получается операцией внешней производной d, которая не зависит от связностей. Отсюда следует, что лагранжиан электромагнитного поля тоже является лагранжианом с минимальной связью.

Для простоты рассмотрим лагранжианы для полей ϕ^a с какой-то тензорной структурой, такие что лагранжиан зависит только от компонент $g_{\mu\nu}$ и их первых производных. Это верно, например, для лагранжианов (5.21) с $V = 0$. Мы будем также пользоваться кратким обозначением $a_{,\mu} = \partial_\mu a$. Вариация *общековариантного* действия при преобразовании δ_ξ должна обратиться в нуль:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi}\, \delta_\xi \phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}}\, \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) \\ + \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\, \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\, \delta_\xi g_{\mu\nu,\lambda} \right) - \int_U d^d x\, \partial_\mu (\xi^\mu \sqrt{|g|}\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Последнее слагаемое обобщает последнее слагаемое в (5.7) и связано с тем, что одна и та же область интегрирования на многообразии M отображается в разные области в $\mathbb{R}^d$ в разных системах координат.

Здесь возникает некоторый вопрос, который не вызывал проблем в случае трансляций в плоском пространстве: как понимать выражение $\delta_\xi \phi_{,\lambda}$ для какого-то набора тензорных компонент ϕ? Что мы делаем вначале, дифференцируем по λ или берем производную Ли вдоль ξ? Чтобы понять это, разберемся с тем, как мы понимаем вариацию лагранжиана. Правильное понимание состоит в том, что мы заменяем не переменную x на $f_\xi(x) = x + \xi(x)$, а функции $\phi(x)$ преобразуем согласно их тензорной структуре. Именно в этом месте важно, чтобы действие было общековариантным: оно будет инвариантно относительно именно таких преобразований.

Более явно, рассмотрим преобразование

$$\phi(x) \to (1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)), \qquad \delta_\xi\phi(x) = (1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)) - \phi(x) = \xi\phi(x) + K_\xi(x)\phi(x),$$

где $K_\xi(x)$ — оператор, отвечающий преобразованию компонент тензора, линейно (при $\xi \to 0$) зависящий от векторного поля ξ и его производных. Например для скалярных полей $K_\xi\phi = 0$, а для векторных $(K_\xi\phi)^\lambda = -\phi^\mu\xi^\lambda{}_{,\mu}$. Поэтому мы должны сначала применять производную Ли, а потом дифференцировать по координатам

$$\delta_\xi\phi_{,\lambda}(x) = ((1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)) - \phi(x))_{,\lambda} = (\delta_\xi\phi)_{,\lambda}(x).$$

Ниже нам будет удобно слегка изменить запись для производной Ли, «перекинув» часть оператора K_ξ в ковариантную производную:

$$\delta_\xi\phi = \xi\phi + K_\xi\phi = \nabla_\xi\phi + \tilde{K}_\xi\phi.$$

Например, для скалярных полей $\tilde{K}_\xi\phi = 0$, а для векторных полей $(\tilde{K}_\xi\phi)^\lambda = -(\nabla_\phi\xi)^\lambda = -\phi^\mu\xi^\lambda{}_{;\mu}$.

Теперь мы можем вернуться к вычислению вариации. Прежде всего, распишем сумму первого и третьего слагаемых в (5.24). При этом второй член в скобках в первом интеграле возьмем по частям и слегка перегруппируем слагаемые:

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) = \int_U d^dx \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi\phi + \int_U d^dx\, \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_\xi\phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Выражение в скобках в первом интеграле представляет собой левую часть уравнения движения:

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \tag{5.25}$$

В случае скалярного поля ϕ нетрудно записать его через ковариантную производную. Используя (3.33), получим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \tag{5.26}$$

Таким образом, первый интеграл на уравнениях движения для поля ϕ обращается в нуль, а оставшееся выражение можно записать в виде:

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) = \int_{\partial U} df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} (\xi^\mu\nabla_\mu\phi + \tilde{K}_\xi\phi) - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

где ∂U — граница области U, а $df_\mu = \frac{1}{(d-1)!}\epsilon_{\mu\nu_1\ldots\nu_{d-1}}\, dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_{d-1}}$ — элемент поверхности границы. Перегруппировав слагаемые, получаем

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) = \int_{\partial U} df_\lambda \left(\sqrt{|g|}\tilde{T}^\lambda{}_\kappa\xi^\kappa + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \tilde{K}_\xi\phi \right),$$

где

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = \nabla_\nu\phi\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu \tag{5.27}$$

— канонический тензор энергии-импульса, определенный аналогично (5.9).[2] Однако в отличие от СТО действие не трансляционно-инвариантно, что приводит к появлению второго слагаемого в (5.24). Для последнего имеем

$$(\mathrm{II}) = \int_U d^dx \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right)$$

[2]Строго говоря, тензор $\tilde{T}^\mu{}_\nu\partial_\mu \otimes dx^\nu$ не зависит от системы координат только для моделей с минимальной связью.

$$= \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int_{\partial U} df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right).$$

Введем обозначение

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots \right), \tag{5.28}$$

где многоточие изображает члены со старшими производными от компонент метрики, если таковые есть. По причине, которая сейчас будет ясна, мы будем называть эту величину *метрическим тензором энергии-импульса*. На практике довольно часто удобнее варьировать по обратной метрике. Так как $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}\, \delta g_{\kappa\lambda}\, g^{\lambda\nu}$, имеем

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{5.29}$$

Используем теперь формулу для производной Ли от метрики: $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$. Имеем

$$\text{(II)} = -\int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} + 2 \int_{\partial U} df_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu}.$$

Используя тождество

$$\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = \sqrt{|g|} (T^{\mu\nu}\xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\, \xi_\mu = (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu}\xi_\mu)_{,\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\, \xi_\mu,$$

получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu + \int_{\partial U} df_\nu \sqrt{|g|} \left((\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu})\xi_\mu + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\xi \phi \right). \tag{5.30}$$

Рассмотрим сначала такие векторные поля ξ, которые обращаются в нуль на границе вместе со всеми своими производными. Тогда второе слагаемое в (5.30) исчезает и мы получаем тождество

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{5.31}$$

которое верно для любого общековариантного действия вида (5.20). Поскольку мы можем произвольно выбирать область интегрирования, мы заключаем, что это равенство верно *на уравнениях движения* во всем пространстве. Мы будем говорить, что тензор $T^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu$ *ковариантно сохраняется*. Следует обратить внимание, что вывод уравнения ковариантного сохранения (5.31) на самом деле не использует никаких специальных свойств лагранжиана и верен для любых тензорных полей материи и любой зависимости лагранжиана от метрики и любых ее производных.

Теперь рассмотрим общее векторное поле ξ, не обращающееся в нуль на границе. В силу доказанного равенства (5.31) в выражении (5.30) остается только второе слагаемое, которое сводится к поверхностному интегралу. В случае *минимальной связи* для *скалярного* поля действие не содержит производных от компонент метрики, а $\tilde{K}_\xi = 0$. Поэтому второе и третье слагаемые под интегралом обращаются в нуль. Так как поверхность произвольна, отсюда следует, что метрический и канонический тензоры энергии-импульса совпадают:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{5.32}$$

В общем случае моделей с минимальной связью, когда полями материи являются произвольные тензорные поля,[3] второе слагаемое в поверхностном интеграле в (5.24) выражается через производные по полям материи:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}} \frac{\partial \phi_{;\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

так как производные от метрики входят только через символы Кристоффеля, входящие в ковариантные производные. В правой части этого равенства лагранжиан понимается как функция полей, их

[3] В этом курсе мы не рассматриваем случай спинорных полей, для определения которых требуется более сложная техника — *реперный* (или *тетрадный*) формализм.

ковариантных производных и метрики, так же как в правой части (5.23). При этом симметричная по μ, ν часть этого второго слагаемого под интегралом сокращается с третьим слагаемым. Можно (хотя и в общем виде непросто) показать, что в этом случае

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda}), \tag{5.33}$$

где ψ — антисимметричный тензор третьего ранга.

Это значит, что уравнение (5.31) в системе с минимальной связью переходит в закон сохранения энергии, импульса и момента импульса в плоском пространстве. Поэтому мы будем *определять* тензор энергии-импульса формулой (5.28) для любой физической теории.

Как и следовало ожидать, энергия и импульс не сохраняются в отсутствие однородности (трансляционной инвариантности) пространства-времени, а момент импульса — в отсутствии изотропии. Физически это означает обмен энергией, импульсом и моментом импульса с гравитационным полем. Позже мы обсудим это более подробно.

В заключение найдем тензор энергии-импульса для точечной частицы. Запишем действие (4.10) в виде

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau)\right).$$

Дифференцируя по метрике, получаем в калибровке $\tau = s$:

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s).$$

Первый множитель представляет собой инвариантную дельта-функцию на псевдоримановом многообразии:

$$\delta_g(x, y) = \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}}. \tag{5.34}$$

Поэтому окончательно получаем

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \delta_g(x, x(s))\, m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s). \tag{5.35}$$

Задачи

1. Покажите, что из симметричности тензора энергии-импульса (5.10) следует сохранение момента импульса (5.15).

2. С помощью формулы (5.28) получите общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и для скалярного поля с $V = 0$.

3. Покажите, что величины $\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda})$ с антисимметричным тензором ψ обладают свойством $\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, откуда следует, что канонический тензор энергии импульса для модели с минимальной связью ковариантно сохраняется.

4. На концы тонкого стержня длиной $2a$ нулевой массы насажены точечные массы m. Центр стержня неподвижен с лабораторной системе отсчета, а сам стержень вращается с угловой скоростью ω, причем скорость концов ωa не предполагается малой. Найдите тензор энергии-импульса для стержня и точечных масс.

5*. Для действия, зависящего от одного векторного поля материи $\phi = \phi^\mu\partial_\mu$, минимально связанного с гравитацией, докажите (5.33).

Семинар 5

Тензор энергии-импульса разных физических систем

Источником гравитационного поля, как мы увидим в следующей лекции, является тензор энергии-импульса материи. На семинаре мы будем вычислять тензор энергии-импульса для нескольких физических систем:

1. Движущаяся пылевидная материя.

2. Движущаяся жидкость с плотностью ρ и давлением p. Нерелятивистский и ультрарелятивистский идеальные газы.

3. Задача о движущемся конденсаторе.