Лекция 7

Слабое гравитационное поле

В этой лекции мы рассмотрим предел слабого гравитационного поля, то есть теорию гравитации в почти плоском пространстве. Такая задача возникает в двух случаях:

1. Когда компоненты тензора энергии-импульса малы, то есть, грубо говоря, в системах с малой плотностью вещества. К этому случаю относится и нерелятивистский предел, когда, помимо малости кривизны, еще и скорости частиц достаточно малы.

2. Когда мы изучаем гравитационное поле достаточно далеко от гравитирующих тел. В этом случае представляют интерес асимптотические разложения для метрики и кривизны. Мы увидим, как с их помощью можно узнать общую массу и момент импульса источника гравитации.

Кроме того, мы увидим, что уравнения слабого гравитационного поля содержат свободную динамическую часть, которая приводит к новому по сравнению с ньютоновской теорией эффекту — гравитационным волнам.

Приближение слабого гравитационного поля, вообще говоря, не предполагает малых скоростей движения частиц и наблюдателей. Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{7.1}$$

Тогда в первом приближении уравнения Эйнштейна можно считать линейными. Иными словами, гравитационное поле настолько слабо, что его самодействие пренебрежимо мало. Для этого, разумеется, тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{7.2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика. На самом деле, это не значит, что компоненты тензора энергии-импульса должны удовлетворять этому условию во всем пространстве. Линеаризованные уравнения мы можем использовать достаточно далеко от областей с большой концентрацией масс, рассматривая области больших масс и сильного поля как «черные ящики», создающие определенное поле на своих границах.

Есть еще один важный момент. Если вещество имеет низкую плотность, но занимает область большого размера L, отклонения метрики от плоской будут расти к границам области. Так что мы должны потребовать

$$G|T^{\mu\nu}|L^2 \ll 1. \tag{7.3}$$

Что делать, если масштаб L не удовлетворяет этому условию? Тогда надо разбить пространство-время на области, в которых это условие удовлетворено, и на каждой из этих областей выбрать карту так, чтобы компоненты метрики на ней мало отклонялись от $\eta_{\mu\nu}$.

В линейном приближении удобно поднимать и опускать индексы с помощью фоновой метрики $\eta_{\mu\nu}$. Чтобы избежать путаницы, мы будем рисовать черточку над соответствующими индексами: $h^{\bar\mu}_\nu = \eta^{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}$ и т.д. В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad |g| = 1 + h, \qquad h = h^{\bar\mu}_\mu. \tag{7.4}$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\eta^{\lambda\kappa}h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h^{\bar\lambda}_{(\mu,\nu)\lambda} - h_{,\mu\nu}\right), \tag{7.5}$$

где скобки означают симметризацию: $a_{(\mu_1\ldots\mu_n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S^n} a_{\mu_{\sigma_1}\ldots\mu_{\sigma_n}}$.

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\eta^{\lambda\kappa}h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - 2h^{\bar\lambda}_{(\mu,\nu)\lambda} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}T\right) \tag{7.6}$$

выглядят пока еще довольно устрашающе. Дело не столько в его сложности, сколько в том, что он содержит существенную проблему. Представим выражение (7.5) в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \tag{7.7}$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\delta^\lambda_\mu \delta^\kappa_\nu \Box + \delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\right), \tag{7.8}$$

действующий на симметричных тензорах в пространстве Минковского. Здесь

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{7.9}$$

— лапласиан в пространстве-времени Минковского (иногда его называют *даламбертианом*). Проблема состоит в том, что оператор K вырожден. Легко видеть, что любой тензор вида $\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$ является его собственной функцией с нулевым собственным значением (*нулевой модой*). Это означает, что оператор K необратим, и метрика не определяется однозначно тензором Риччи или, в силу уравнений Эйнштейна, тензором энергии-импульса материи. На самом деле в этом нет ничего удивительного. Как мы уже не раз говорили, геометрия пространства-времени не меняется при произвольном преобразовании координат. Рассмотрим малое преобразование: $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Метрика при таком преобразовании меняется как $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$. Близость метрики к плоской не фиксирует однозначно систему координат: остается свобода относительно преобразований той же малости, что и тензор h. В первом порядке имеем

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\bar\mu,\nu} + \xi_{\bar\nu,\mu}. \tag{7.10}$$

Полагая $\varphi_\mu = \xi_{\bar\mu}$, мы видим, что именно малые преобразования координат и вырождают оператор K. Чтобы снять это вырождение, нужно как-то ограничить класс допустимых решений или, как говорят физики, зафиксировать калибровку. Для этого нужно наложить дополнительные условия таким образом, чтобы общее решение получалось из решений, удовлетворяющих этим условиям, преобразованием (7.10). Наложим d условий

$$\psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h. \tag{7.11}$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \qquad \psi = \psi^{\bar\mu}_\mu = -\frac{d-2}{2}h. \tag{7.12}$$

При этих условиях все слагаемые в (7.5), кроме первого, сокращаются, и тензор Риччи приобретает вид

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}. \tag{7.13}$$

Соответственно, уравнения Эйнштейна в калибровке (7.11) имеют вид волнового уравнения с распределенным источником:

$$\Box \psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{7.14}$$

Условия согласованности калибровки с этим уравнением

$$0 = \Box \psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu} = -16\pi G T^{\bar\mu}_{\nu,\mu}$$

совпадает с уравнением непрерывности для тензора энергии-импульса в лидирующем порядке. Это значит, что эффекты обмена энергией и импульсом между гравитационным полем и материей являются эффектами второго порядка по $h_{\mu\nu}$ и лежат за пределами линейного приближения.

Рассмотрим теперь в рамках приближения слабого поля нерелятивистский предел, определяемый условиями:

1) скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам, большим чем характерные масштабы рассматриваемых областей;

2) плотность энергии совпадает с плотностью массы: $T^{00} = \rho$, а плотности импульса и напряжения малы: $|T^{0i}|, |T^{ij}| \ll \rho$.

Первое условие означает также, что мы можем пренебречь производными по времени от метрики и решать задачу как статическую:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{00}(t,\boldsymbol{r}) &= 16\pi G\rho(t,\boldsymbol{r}), \\ \Delta\psi_{0i}(t,\boldsymbol{r}) &= \Delta\psi_{ij}(t,\boldsymbol{r}) = 0. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2$ — пространственный лапласиан. Время t в этом уравнении играет роль параметра. Решение уравнения Лапласа, стремящееся к нулю на бесконечности, хорошо известно:

$$\psi_{00}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}}\int d^{d-1}x'\,\frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \qquad \psi_{0i}(t,\boldsymbol{r}) = \psi_{ij}(t,\boldsymbol{r}) = 0, \tag{7.16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в n-мерном эвклидовом пространстве. Это решение, очевидно, удовлетворяет калибровочному условию (7.11) с той же точностью, с какой мы можем пренебречь плотностью потока массы. Из (7.12) получаем $h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}$ и $h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}$. Следовательно,

$$h_{00}(t,\boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\int d^{d-1}x'\,\frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \tag{7.17}$$

Из формулы (4.8) мы знаем, что ньютоновский гравитационный потенциал равен $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Однако пространственная часть метрики (7.17) не согласуется с (4.8), поскольку согласно этой формуле компоненты h_{ii} должны равняться нулю. На самом деле для нерелятивистской пробной частицы ($v^2 \ll 1$), движущейся в слабом гравитационном поле ($\phi \ll 1$), вклад $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$ в действие является превышением точности. Действительно, для нерелятивистского действия частицы в гравитационном поле имеем

$$S = \int dt\,\left(-m + \left(1 - \frac{2\phi(t,\boldsymbol{r})}{d-3}\right)\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - m\phi(t,\boldsymbol{r})\right).$$

Очевидно, поправка к лагранжиану — порядка $m\phi v^2 \ll m\phi, mv^2$, то есть мала по сравнению с остальными членами. Иными словами, вклад h_{ii} пренебрежимо мал, поскольку в нерелятивистском пределе вклад в квадрат собственного времени, пропорциональный $d\boldsymbol{r}^2$, сам по себе мал по сравнению с dt^2. Если же мы хотим изучать движение релятивистской частицы в слабом гравитационном поле (даже созданном нерелятивистскими объектами), этим вкладом пренебрегать нельзя.

Итак, нерелятивистский потенциал системы масс m_i в точках $\boldsymbol{r}_i$ равен

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}. \tag{7.18}$$

При $d=4$ мы получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(t,\{\boldsymbol{r}_a\}) = \frac{1}{2}\sum_a \lim_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}_a} m_a\left(\phi(t,\boldsymbol{r}') + G\frac{m_a}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_a(t)|}\right) = -\sum_{a<b} G\frac{m_a m_b}{|\boldsymbol{r}_a(t)-\boldsymbol{r}_b(t)|}. \tag{7.19}$$

Отсюда заключаем, что константа G в действии Эйнштейна—Гильберта равна гравитационной постоянной Ньютона.

Изучим теперь стационарные (не зависящие от времени) решения вне гравитирующих масс.[1] Мы не будем предполагать малости масс или нерелятивистских скоростей их движения, но будем считать, что гравитационное поле слабо в силу удаленности от источника. Кроме того, мы будем предполагать источник автономным, не находящимся под действием внешних по отношению к системе полей. В этом случае тензор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i\psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i\psi_{ij} = 0. \tag{7.20}$$

Чтобы найти связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующих тел, выразим суперпотенциалы псевдотензора энергии-импульса $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ через асимптотики решений. Отметим,

[1] Нестационарные решения мы будем изучать в следующих двух лекциях.

что условие $\psi^{\bar\nu}_{\mu,\nu} = 0$ не фиксирует калибровку до конца. Преобразование (7.10) не нарушает это условие, если

$$\Box\,\xi^\mu = 0, \tag{7.21}$$

что в случае не зависящих от времени преобразований означает

$$\Delta\xi^\mu = 0. \tag{7.22}$$

Такие преобразования мы будем называть *остаточными* калибровочными преобразованиями.

Будем искать решение уравнения Лапласа двух лидирующих порядках по r^{-1}. Функция r^{3-d} сама является решением уравнения Лапласа. Решения, которые спадают быстрее, даются просто производными этого решения. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
&\psi_{00} = Ar^{3-d} + B^k\,\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}),\\
&\psi_{0i} = A^i r^{3-d} + B^{ik}\,\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}),\\
&\psi_{ij} = A^{ij} r^{3-d} + B^{ijk}\,\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \quad A^{ij} = A^{ji}, \quad B^{ijk} = B^{jik}.
\end{aligned}$$

Калибровочное условие сводится к равенствам

$$\begin{gathered}
A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0,\\
B^{ik}\,\partial_i\partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0.
\end{gathered}$$

Первая строчка немедленно дает $A^i = A^{ij} = 0$. Из второй строчки получаем, что[2]

$$B^{ik} = B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \qquad B^{ijk} = B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}.$$

Члены с символами Кронекера разрешены потому, что соответствующий вклад в левую часть калибровочного условия пропорционален функции $\Delta r^{3-d} = 0$.

Из последнего равенства нетрудно доказать, что $B^{ijk} = 0$, $C^i = 0$ и, таким образом, $\psi_{ij} = 0$. Выражения для ψ_{00} и ψ_{0i} можно упростить, используя преобразование координат, удовлетворяющее (7.22). Действительно, преобразованием[3] $\xi^i = -B^i/A$, $\xi^0 = 0$ можно устранить второй член в выражении для ψ_{00}, а преобразованием $\xi^i = 0$, $\xi^0 = -Cr^{3-d}$ устранить симметричную часть в B^{ik}.

Итак, мы можем записать решение в виде

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \qquad \psi_{0i} = B^{ik}\partial_k r^{3-d} \quad (B^{ki} = -B^{ik}), \qquad \psi_{ij} = 0. \tag{7.23}$$

Осталось связать константы A и B^{ik} с данными об источнике гравитации. Для этого вычислим величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, входящие в псевдотензор энергии-импульса. Все компоненты нас интересовать не будут. Мы ограничимся компонентами $\chi^{\mu 0kl}$.

В компоненту χ^{00kl} вносит вклад как ψ_{00}, так и ψ_{0i}, но, поскольку на больших расстояниях $|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|$, достаточно сохранить только вклад ψ_{00}. Действительно,

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{0l}).$$

Первый член в скобках имеет в качестве первой поправки ψ_{00}, а второй — только ψ_{0i}. Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Первая поправка в $|g|$ также содержит ψ_{00}, так что членами, содержащими ψ_{0i} пренебрегаем. В результате получаем

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}(1 - Ar^{3-d}), \qquad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}r^{1-d}x^k. \tag{7.24}$$

Подставляя в (6.29) получаем полную массу гравитирующей системы

$$M = P^0 = \oint df_{0i}\,\tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}\oint \frac{df_{0i}\,x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \tag{7.25}$$

[2] Квадратные скобки означают антисимметризацию: $a_{[\mu_1\cdots\mu_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S^n}(-1)^\sigma a_{\mu_{\sigma_1}\cdots\mu_{\sigma_n}}$.

[3] Обратим внимание, что это преобразование не является малым в указанном выше смысле.

Вклад ψ_{0i} в массу, очевидно, будет стремиться к нулю при $r \to \infty$, что оправдывает сделанное приближение. Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \tag{7.26}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (7.16). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \qquad (d = 4). \tag{7.27}$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых содержат множитель вида $g^{0i} = -h^{\overline{0i}} = h_{0i} = \psi_{0i}$, поэтому мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ik} = -\delta^{ik}$. Находим

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Так как $\tau^{i0k} \sim r^{1-d}$ интеграл по поверхности для P^i обращается в нуль и мы получаем

$$P^i = 0, \tag{7.29}$$

как и следовало ожидать в статической задаче. А вот интеграл для момента импульса имеет степень на единицу больше и, вообще говоря, не равен нулю. Прямое вычисление с помощью (6.31) дает

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}}J^{ij}. \tag{7.30}$$

В четырехмерном случае имеем

$$B^{ij} = 2GJ^{ij} \qquad (d = 4). \tag{7.31}$$

Итак, по ведущим асимптотикам «гравитационных потенциалов» $h_{\mu\nu}$ на больших расстояниях мы можем узнать общие массу и момент импульса системы гравитирующих тел.

Задачи

1. Покажите, что для оператора K, определенного в (7.8), $Kh = 0$, если $h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$.

2. Выведите формулы (7.24), (7.28).

3. Найдите усредненную по времени асимптотику метрики на большом расстоянии от системы двух тел масс m_1 и m_2, вращающихся вокруг общего центра масс, если дана относительная скорость тел $v_\text{п} \ll 1$ в точке наибольшего сближения и расстояние $r_\text{п}$ между ними в этой точке.

4. Выведите формулу (7.30).

5*. Рассмотрим сферически симметричную тонкую сферу массы M и радиуса R, вращающуюся как твердое тело с постоянной угловой скоростью Ω, $\Omega R \ll 1$. В предположении применимости линейного приближения ($GM \ll l \ll R$, где l — толщина сферы) найдите создаваемое сферой гравитационное поле (метрику) в линейном приближении в первом порядке по ΩR и покажите, что метрика внутри сферы может быть описана как плоская метрика, вращающаяся с угловой скоростью

$$\omega = \frac{4}{3}\frac{GM\Omega}{R}.$$

(Для этого вам надо будет в сферических координатах сделать замену координат $\varphi = \varphi' + \omega t$ и подобрать ω так, чтобы метрика приобрела плоский вид $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi'^2)$.)

Семинар 7

Полная энергия стационарной системы

Пусть псевдориманово пространство имеет времениподобное векторное поле Киллинга ξ, то есть векторное поле, удовлетворяющего условию $\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0$, времениподобное во всех точках. Мы можем выбрать координаты так, чтобы время текло вдоль этого вектора Киллинга: $\xi=\partial_0$ (т.е. $\xi^0=1,\xi^i=0$). В этой системе координат метрика стационарна: $g_{\mu\nu,0}=0$.

Для стационарной метрики можно показать, что

$$\sqrt{|g|}R^0_0=\partial_i(\sqrt{|g|}g^{0\mu}\Gamma^i_{0\mu}). \tag{7.32}$$

Предположим, что поле создается массами, расположенными в конечном объеме, так что на достаточно большом расстоянии поле становится слабым. Из (7.32) следует, что пространственный интеграл $\int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}R^0_0$ сводится к поверхностному интегралу. Подставляя в него асимптотическое выражение (7.23) и учитывая (7.26), получаем, что этот интеграл выражается через массу. Согласно уравнениям Эйнштейна, R^0_0 выражается через тензор энергии-импульса. Окончательно получаем, что полная энергия (=масса) вещества и гравитационного поля может быть выражена через интеграл от тензора энергии-импульса материи по пространственному объему:

$$M=\int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}\left(T^0_0-\frac{1}{d-3}T^i_i\right). \tag{7.33}$$

В частности, в системе координат в которой $g_{0i}=0$ в четырехмерном пространстве-времени для неподвижной (в данной системе координат) газообразной среды имеем

$$M=\int d^3x\,\sqrt{|g|}(\rho+3p),$$

где ρ — плотность энергии, а p — давление.

Все это верно, конечно, только в том случае, если гиперповерхность $x^0=\mathrm{const}$ является гладким многообразием, гладко вложенным в пространство-время и топологически изоморфным $\mathbb{R}^{d-1}$. Как мы увидим ниже, это условие не выполняется в случае черной дыры, где эта поверхность имеет полость, из-за чего нельзя воспользоваться теоремой Гаусса. Черная дыра может быть даже полностью вакуумным решением, которое, тем не менее, ведет себя как объект конечной массы.