Пояснение B

Обобщенная теорема Остроградского—Гаусса

Пусть $a = a^{\mu_1\cdots\mu_k}\,\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}$ — полностью антисимметричное тензорное поле на d-мерном (псевдо)римановом многообразии, а

$$df_{\mu_1\dots\mu_l} = \frac{1}{(d-l)!}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\,dx^{\mu_{l+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_d} \tag{B.1}$$

— элемент $(d-l)$-мерной поверхности. Пусть U — замкнутое подмножество в $(d-k+1)$-мерном подмногообразии M, а ∂U — $(d-k)$-мерная граница этой области в подмногообразии M. Мы хотим доказать формулу

$$\int_U df_{\mu_1\dots\mu_{k-1}}\,\partial_{\mu_k}(\sqrt{|g|}a^{\mu_1\cdots\mu_k}) = \frac{1}{k}\int_{\partial U} df_{\mu_1\dots\mu_k}\,\sqrt{|g|}a^{\mu_1\cdots\mu_k}. \tag{B.2}$$

Мы будем доказывать для случая, когда область U покрывается одной картой. В случае, когда это не так, мы можем разбить область U на несколько подобластей, покрываемой одной картой каждая, и воспользоваться аддитивностью интегралов.

Прежде всего заметим, что левая и правая части равенства (B.2) не зависят от системы координат. Действительно, форма объема

$$dV = \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\,dx^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_d}$$

является инвариантным объектом, а правая часть (B.2) является сверткой формы объема с контравариантным тензором ранга k, то есть объектом инвариантным. Левая же часть является сверткой той же формы объема с тензором

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu_k}(\sqrt{|g|}a^{\mu_1\cdots\mu_k})\,\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_{k-1}} = (\nabla_{\mu_k}a)^{\mu_1\cdots\mu_k}\,\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_{k-1}}.$$

Это равенство, обобщающее (3.33) на произвольный антисимметричный тензор, нетрудно проверяется. Таким образом, левая часть тоже не зависит от системы координат.

Выберем систему координат на карте, покрывающей U так, чтобы подмногообразие M задавалось уравнением вида

$$x^a = 0 \quad (a = 1,\ldots,k-1).$$

(Мы здесь будем нумеровать индексы μ от 1 до d.) Тогда на M единственные отличные от нуля компоненты это компонента $df_{1\dots k-1}$ и все компоненты, получаемые из нее перестановкой индексов. Действительно, все $dx^a = 0$, так что все ненулевые dx^μ, входящие в правую сторону (B.1) имеют $\mu > k-1$. Их как раз $d-k+1$ штука. При этом набор $\mu_1,\ldots,\mu_d$ для ненулевых слагаемых является перестановкой чисел $1,\ldots,d$. Это значит, что индексы $\mu_1,\ldots,\mu_{k-1}$ должны быть перестановками числе $1,\ldots,k-1$.

Из антисимметричности df и a получаем

$$I = \int df_{\mu_1\dots\mu_{k-1}}\,\partial_{\mu_k}(\sqrt{|g|}a^{\mu_1\cdots\mu_k}) = (k-1)!\int df_{1\dots(k-1)}\,\partial_\mu(\sqrt{|g|}a^{1\dots(k-1)\mu}).$$

Очевидно, μ можно ограничить областью $k,\ldots,d$, то есть номерами координат на подмногообразии M. Это значит, что к последней формуле можно применить теорему Гаусса:

$$I = (k-1)!\int df_{1\dots(k-1)\mu}\,\sqrt{|g|}a^{1\dots(k-1)\mu}.$$

Теперь заметим, что все остальные ненулевые элементы $df_{\mu_1\dots\mu_k}$ получаются перестановкой k индексов $1,\ldots,k-1,\mu$ (подумайте сами, почему). Ввиду все той же антисимметричности наших объектов, получаем

$$I = \frac{(k-1)!}{k!}\int df_{\mu_1\dots\mu_k}\,\sqrt{|g|}a^{\mu_1\cdots\mu_k}.$$

Можно сделать два замечания. Во-первых, утверждение (B.2) можно также получить из обобщенной теоремы Стокса для антисимметричных форм

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega, \tag{B.3}$$

которая верная для любых гладких многообразий, даже без всякой связности или метрики. Для доказательства достаточно взять

$$\omega = \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} a^{\mu_1 \cdots \mu_k}\, dx^{\mu_{k+1}} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_d} = \frac{1}{(d-k)!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} a^{\mu_1 \cdots \mu_k}\, dx^{\mu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d}.$$

Нетрудно увидеть, что внешний дифференциал формы сведется к дивергенции из левой части (B.2).

Во-вторых, теорема применима не только к антисимметричным тензорам, но и к любым антисимметричным символам $a^{\mu_1 \cdots \mu_k}$. Действительно, определим тензор $\tilde{a}$, компоненты которого $\tilde{a}^{\mu_1 \cdots \mu_k}$ равны $a^{\mu_1 \cdots \mu_k}$ в данной системе координат. Для него, как мы видели, верна теорема Остроградского—Гаусса. Но в левой и правой части (B.2) этот тензор находится в одной и той же системе координат и поэтому его компоненты совпадают с компонентами символа $a^{\mu_1 \cdots \mu_k}$. Иными словами, те преобразования, с помощью которых мы доказывали, следует применять к компонентам тензора $\tilde{a}$. А поскольку в конце рассуждения мы возвращаемся к исходной системе координат, то и компоненты тензора снова становятся равными компонентам символа a.