

Лекция 8

Гравитационные волны

До сих пор мы рассматривали специальное решение линейной системы (7.14), (7.11). Мы рассмотрели стационарный случай, в котором само условие стационарности и условие достаточно быстрого убывания на бесконечности ($\sim r^{3-d}$) выделяло определенное решение. В следующей лекции мы рассмотрим специальное решение, определенное условиями запаздывания и убывания. Но мы знаем, что общее решение линейной неоднородной системы равно сумме любого специального решения и общего решения однородной системы. Последнее мы и рассмотрим в этой лекции. В случае линеаризованного уравнения Эйнштейна однородная система состоит из волнового уравнения и условия калибровки:

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0, \quad \psi_{\nu,\mu}^{\bar{\mu}} = 0. \quad (8.1)$$

Мы ослабим ограничения и разрешим решения этого уравнения во всем пространстве, которые не спадают на бесконечности. Сначала найдем комплексные решения в виде плоских волн, а потом наложим условие вещественности на их комбинации. Именно, подставляя функции $\psi_{\mu\nu}$ в виде

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu} e^{-ikx}, \quad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \quad (8.2)$$

в волновое уравнение, получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm \sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm |\mathbf{k}|, \quad \mathbf{k} = k^{\bar{i}} \partial_i, \quad (8.3)$$

а подставляя в условие калибровки, получаем уравнение пространственно-временной поперечности

$$k^{\bar{\mu}} A_{\mu\nu} = 0. \quad (8.4)$$

Общее решение имеет вид линейной комбинации всех возможных плоских волн

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=\pm} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} A_{\mu\nu}^{\varepsilon}(\mathbf{k}) e^{-i\varepsilon(|\mathbf{k}|x^0 - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (8.5)$$

$$|\mathbf{k}| A_{0\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) + k^{\bar{i}} A_{i\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) = 0, \quad A_{\nu\mu}^{\pm}(\mathbf{k}) = A_{\mu\nu}^{\pm}(\mathbf{k}), \quad A_{\mu\nu}^{-}(\mathbf{k}) = (A_{\mu\nu}^{+}(\mathbf{k}))^{*}.$$

Последнее равенство во второй строчке представляет собой условие вещественности решения.

Рассмотрим одну монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1 , то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^{\bar{a}} = 0$ ($a \geq 2$):

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \text{Re } A_{\mu\nu} e^{-i\omega(x^0 - x^1)}. \quad (8.6)$$

Иными словами $A_{\mu\nu}^{+}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{d-1} A_{\mu\nu} \delta(\mathbf{k} - \omega \partial_1)$. Для удобства в этой лекции мы будем обозначать индексы 0, 1 начальными буквами греческого алфавита, а индексы 2, ..., $d-1$ — латинского:

$$\alpha, \beta, \dots = 0, 1; \quad a, b, \dots = 2, \dots, d-1.$$

Условие калибровки (7.11) дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \quad (8.7)$$

Таким образом, из $d(d+1)/2$ величин $A_{\mu\nu}$ осталось $d(d-1)/2$. Тем не менее, количество физически различных поляризаций меньше. Как мы уже отмечали, условие (7.11) не фиксирует калибровку полностью. Остаются еще преобразования

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^{\lambda}_{,\lambda}. \quad (8.8)$$

удовлетворяющие уравнению (7.21): $\square \xi^{\mu} = 0$. Возьмем вектор ξ^{μ} вида

$$\xi^{\mu} = \text{Re } X^{\mu} e^{-i\omega(x^0 - x^1)}. \quad (8.9)$$

Из (8.8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - i\omega(X^0 + X^1), \\ A'_{0a} &= A_{0a} + i\omega X^a, \\ A'_{ab} &= A_{ab} - i\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Мы видим, что калибровочные преобразования позволяют устранить еще d компонент. Например, положив

$$X^0 + X^1 = -i\omega^{-1}A_{00}, \quad X^a = i\omega^{-1}A_{0a}, \quad X^0 - X^1 = -\frac{i\omega^{-1}}{d-2} \sum_{a=1}^{d-2} A_{aa},$$

мы получаем $A'_{\alpha\mu} = 0$, $A'^{\bar{\mu}} = 0$, то есть в результате калибровочного преобразования волна стала поперечной и бесследовой. Всего «живых» компонент остается $d(d-3)/2$. Так как числа $A_{\mu\nu}$ комплексные, имеем $d(d-3)$ начальных данных для плоской волны с импульсом \mathbf{k} .

Для описания гравитационной волны удобно выбрать $d(d-3)/2$ комбинаций компонент, инвариантных относительно остаточных калибровочных преобразований: ψ_{ab} ($a < b$) и $\psi_{aa} - \psi_{a+1,a+1}$ ($a = 2, \dots, d-2$). В частности, в четырехмерном пространстве это ψ_{23} и $\psi_{22} - \psi_{33}$. Вместе с их производными по времени они образуют $d(d-3)$ функции пространственных координат, необходимые для решения задачи Коши. В четырехмерном пространстве-времени нужно задать четыре функции. Решения однородного уравнения в размерностях $d \leq 3$ полностью устраняются калибровкой, и гравитация в этих размерностях не имеет собственных динамических степеней свободы. Хотя мы рассматривали слабые возмущения плоского пространства-времени, выводы, касающиеся задачи Коши в ОТО, имеют общий характер.

Изучая плоские волны, мы можем рассуждать по-другому. Рассмотрим общее решение уравнений (8.1), не зависящее от координат x^a . В плоскости (x^0, x^1) удобно перейти к координатам светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$. Тогда

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})dx^+ dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})dx^a dx^b. \quad (8.11)$$

Уравнения (8.1) для постоянных по x^a функций принимают вид

$$\partial_+ \partial_- \psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_+ \psi_{-\mu} + \partial_- \psi_{+\mu} = 0. \quad (8.12)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}^R(x^-) + \psi_{\mu\nu}^L(x^+). \quad (8.13)$$

Функция $\psi_{\mu\nu}^R(x^-)$ описывает волну, движущуюся направо, а функция $\psi_{\mu\nu}^L(x^+)$ — волну, движущуюся налево. Калибровочное условие дает $\psi_{-\mu}^L(x^+) = -\psi_{+\mu}^R(x^-)$. Левая часть этого уравнения зависит только от x^+ , а правая — только от x^- . Это значит, что обе функции постоянны. Исключая линейные решения для $\psi_{\mu\nu}^{R,L}$ как не соответствующие физическому условию малости и постоянные ненулевые решения, как отвечающие другой задаче (мы еще обсудим это в следующей лекции), находим:

$$\psi_{-\mu}^L = \psi_{+\mu}^R = 0. \quad (8.14)$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием вида (8.8) можно обратить в нуль компоненты $\psi_{+\mu}^L, \psi_{-\mu}^R$ и следы $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}^{R,L}$ (поперечная калибровка). Тогда $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ и решения будут иметь вид

$$h_{ab}(x) = h_{ab}^R(x^-) + h_{ab}^L(x^+), \quad h_{\alpha\mu} = 0, \quad \eta^{ab} h_{ab}^{R,L} = 0. \quad (8.15)$$

Мы видим, что эволюция системы волн определяется $d(d-3)$ функциями $h_{ab}^{R,L}$ ($a < b$), $h_{aa}^{R,L} - h_{a+1,a+1}^{R,L}$ ($2 \leq a \leq d-2$) в согласии с нашими предыдущими соображениями.

Оставив только одну движущуюся направо волну, изучим, как меняются под ее влиянием пространственные расстояния. Так как поперечной калибровке отвечает синхронная система координат ($g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$), имеем

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})dx^a dx^b. \quad (8.16)$$

Если мы возьмем $(d-2)$ -мерную сферу в плоскости, перпендикулярной волне, то функции h_{ab} описывают небольшие центрально-симметричные деформации такой сферы, причем величина h_{aa} дает нам уменьшение диаметра сферы в направлении оси x^a , а h_{ab} ($a \neq b$) дает уменьшение диаметра сферы в диагональном направлении $x^a = x^b$ в плоскости $x^a x^b$ и увеличение диаметра в перпендикулярном ему диагональном направлении $x^a = -x^b$. В силу бесследовости объем сферы в первом порядке по h_{ab} сохраняется: $\det(\gamma_{ab}) = \det(\delta_{ab} - h_{ab}) \simeq 1 - \text{tr}(h_{ab}) = 1$.

Важно, что эта $(d-2)$ -мерная сфера может быть физически реализована как система частиц. Именно, свободные пробные частицы, неподвижные в системе координат, в которой реализуется поперечная калибровка, остаются неподвижными в этой системе координат в течение всего времени прохождения волны. Действительно, в силу калибровки $h_{0\mu} = 0$ имеем $\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}) = 0$. Это значит, что уравнение движения свободной частицы имеет вид

$$\ddot{x}^\mu = -2\Gamma_{i0}^\mu \dot{x}^i \dot{x}^0 - \Gamma_{ij}^\mu \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

То есть, если частица имеет нулевую скорость ($\dot{x}^i = 0$) в какой-то момент времени, то она имеет и нулевое ускорение ($\ddot{x}^i = 0$). Значит, она будет оставаться неподвижной в поле волны сколь угодно долго.

Рассмотрим подробно случай $d = 4$. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \quad h_\times = h_{23}. \quad (8.17)$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_\perp^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times dx^2 dx^3. \quad (8.18)$$

Рассмотрим маленькую окружность радиуса dr в плоскости $x^2 x^3$ (точнее, в соответствующем касательном пространстве), перпендикулярной волновому вектору. Будем задавать точку на окружности углом θ , отсчитываемым от оси x^2 . Тогда координаты этой точки отличаются от координат центра окружности на величины

$$dx^2 = dr \cos \theta, \quad dx^3 = dr \sin \theta.$$

Отсюда имеем

$$dl_\perp = dr \left(1 - \frac{h_+}{2} \cos 2\theta - \frac{h_\times}{2} \sin 2\theta \right) = dr \left(1 - \frac{h_*}{2} \cos 2(\theta - \varphi) \right), \quad (8.19)$$

где

$$h_+ = h_* \cos 2\varphi, \quad h_\times = h_* \sin 2\varphi.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Предположим, у нашей волны h_+ и h_\times пропорциональны (в случае монохромной волны это значит, что отношение A_{22}/A_{23} вещественно), то есть $\varphi = \text{const}$. Тогда кольцо в плоскости $x^2 x^3$, будет сжиматься и растягиваться вдоль прямой, повернутой под углом φ к оси x^2 , и одновременно растягиваться и сжиматься вдоль перпендикулярной ей прямой. Мы будем называть такую волну волной с линейной (или плоской) поляризацией. В отличие от линейной поляризации электромагнитных волн угол φ наклона плоскости поляризации определен не по модулю π , а по модулю $\frac{\pi}{2}$. Действительно, правая часть (8.19) не меняется при замене $\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2}$, $h_* \rightarrow -h_*$. Иными словами, плоская поляризация определяется двумя перпендикулярными плоскостями, параллельным лучу.

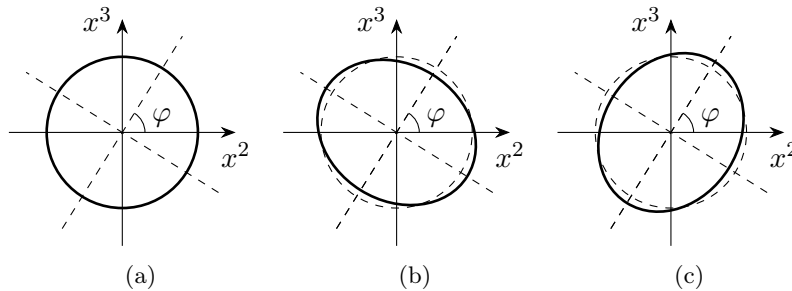


Рис. 8.1. Изменение формы пространственной окружности в линейно поляризованной гравитационной волне в поперечной плоскости: (а) исходная окружность до того, как ее достигла волна; (б) фаза $h_* > 0$; фаза $h_* < 0$ (в случае монохромной волны, например, через полупериод после фазы (б)).

Наличие двух независимых коэффициентов h_+ и h_\times означает, что любую поляризацию волны (в том числе, любую плоскую поляризацию) можно представить как линейную комбинацию двух линейно независимых поляризаций, например, поляризаций с $\varphi = 0$ (определяемой функцией h_+) и с $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (определяемой функцией h_\times).

Теперь выясним, какие энергию и импульс переносят гравитационные волны. Рассмотрим плоскую гравитационную волну в виде (8.15). Наша цель состоит в том, чтобы вычислить псевдотензор энергии-импульса. Согласно определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T_{\text{грав}}^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \quad (8.20)$$

Казалось бы, можно положить $T_{\text{грав}}^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu} = 0$, но это не так. Дело в том, что мы рассматриваем гравитационные волны в линейном приближении, а плотности и потоки энергии и импульса — величины *второго порядка* по $h_{\mu\nu}$. Наше решение обращает в нуль только вклад первого порядка в $T_{\text{грав}}^{\mu\nu}$, а вклад второго порядка оказывается ненулевым. Есть два способа решить эту проблему. Первый способ состоит в том, чтобы получить явную формулу для $t^{\mu\nu}$ и увидеть, что она представляет собой линейную комбинацию членов, содержащих произведения вида $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}g^{\rho\sigma}{}_{,\kappa}$. В первом порядке $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = -h^{\mu\nu}{}_{,\lambda}$, поэтому все эти произведения — второго порядка, а, значит, во всех коэффициентах можно заменить $g_{\mu\nu}$ на $\eta_{\mu\nu}$. Этот метод дает правильный ответ, но требует дополнительного обоснования. Поэтому мы используем другой, более последовательный метод. Мы получим уравнения для поправок второго порядка в гравитационной волне и, подставив их в выражение для $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, покажем что в выражении для псевдотензора энергии-импульса $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$ соответствующие вклады можно выразить через решения линейного уравнения (8.1).

Давайте рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (8.21)$$

Здесь $h_{\mu\nu}^{(1)}$ — решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, в нашей задаче — (8.1), а $h_{\mu\nu}^{(k)}$ — поправка k -го порядка. Мы немного изменим обозначения: буквы h, ψ без индексов теперь будут обозначать матрицы, отвечающие соответствующим тензорам, а следы будут обозначаться значком tr : $\text{tr} a = a_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu}$, $(ab)_{\mu\nu} = a_{\mu}{}^{\lambda} b_{\lambda\nu}$ и т.п. Отсюда легко находим:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\bar{\mu}\bar{\nu}} - h^{(2)\bar{\mu}\bar{\nu}} + (h^{(1)2})^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \dots, \\ |g| &= 1 + \text{tr} h^{(1)} + \text{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2} \left((\text{tr} h^{(1)})^2 - \text{tr} h^{(1)2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (8.22)$$

В нашей задаче в силу калибровочных условий $h_{\alpha\nu}^{(1)} = 0$, $\text{tr} h^{(1)} = 0$. Отсюда получаем во втором порядке

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \\ g^{\alpha b} &= -h^{(2)\bar{\alpha}\bar{b}}, \\ g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\bar{a}\bar{b}} - h^{(2)\bar{a}\bar{b}} + (h^{(1)2})^{\bar{a}\bar{b}}, \\ |g| &= 1 + \text{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr} h^{(1)2}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля. При этом на поправки второго порядка наложим такое же калибровочное условие, как и на поправки первого порядка:

$$\psi^{(2)\bar{\mu}\bar{\nu}}{}_{,\nu} = 0, \quad \psi_{\mu\nu}^{(2)} = h_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \text{tr} h^{(2)}. \quad (8.24)$$

Вклады $h^{(2)}$ входят в выражения до второго порядка только линейно и отдельно от $h^{(1)}$. Для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(h_{\mu\kappa,\nu}^{(2)} + h_{\nu\kappa,\mu}^{(2)} - h_{\mu\nu,\kappa}^{(2)}) + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (8.25)$$

где $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ содержат только вклады $h_{\mu\nu}^{(1)}$. Нетрудно проверить, что

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\bar{\lambda}\kappa})h_{\kappa\nu,\alpha}^{(1)}, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^\lambda = -\frac{1}{2}h_{ab}^{(1),\lambda}, \quad (8.26)$$

Отсюда следует, что единственные ненулевые компоненты равны

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha b}^c = \frac{1}{2}(\eta^{cd} - h^{(1)\bar{c}d})h_{bd,\alpha}^{(1)}, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^\gamma = -\frac{1}{2}h_{ab}^{(1),\gamma}. \quad (8.27)$$

Кроме того, для следа символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} \left(\text{tr } h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr } h^{(1)2} \right)_{,\alpha}, \quad \Gamma_{a\lambda}^\lambda = 0. \quad (8.28)$$

Отсюда во втором порядке немедленно получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}^{(2)} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \quad (8.29)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \text{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \text{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}), & \tilde{R}_{ab} &= 0, & \tilde{R}_{ab} &= \frac{1}{2}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}, \\ \tilde{R} &= \frac{3}{4} \text{tr}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha}). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Так как это уже выражения второго порядка, мы можем здесь поднимать индексы с помощью $\eta^{\mu\nu}$, а $|g|$ в коэффициентах при тензоре Риччи положить равным единице.

Из уравнений Эйнштейна в вакууме $R_{\mu\nu} = 0$ мы немедленно получаем уравнение для поправки второго порядка к метрике:

$$\square h_{\mu\nu}^{(2)} = 2\tilde{R}_{\mu\nu}. \quad (8.31)$$

Для плоской волны имеем

$$\square h_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \text{tr } h_{,\alpha}^{(1)}h_{,\beta}^{(1)} \right), \quad (8.32a)$$

$$\square h_{ab}^{(2)} = 0, \quad (8.32b)$$

$$\square h_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2} \square (h^{(1)2})_{ab}. \quad (8.32c)$$

Также имеем

$$\square \text{tr } h^{(2)} = \frac{3}{4} \square \text{tr } h^{(1)2}. \quad (8.33)$$

Мы всюду учитывали уравнение движения для вклада первого порядка $\square h_{ab}^{(1)} = 0$. Подняв индексы в (8.32a) и вычислив дивергенцию нетрудно привести ее к виду половины градиента правой части (8.33) и, тем самым, убедиться, что условие калибровки (8.24) согласовано с уравнениями движения.

Найдем величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$. Подставляя (8.23) в определение (6.22), получаем

$$\begin{aligned} 16\pi G\chi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(1 + \text{tr } h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr } h^{(1)2} \right) (\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}) \\ &\quad - h^{(2)\bar{\alpha}\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\beta}h^{(2)\bar{\gamma}\delta} + h^{(2)\bar{\alpha}\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\bar{\beta}\delta}, \end{aligned} \quad (8.34a)$$

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta} = -h^{(2)\bar{\alpha}b}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\bar{b}\delta}, \quad (8.34b)$$

$$16\pi G\chi^{ab\gamma\delta} = \left(1 + \text{tr } h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr } h^{(1)2} \right) \eta^{ab}\eta^{\gamma\delta} - \left(h^{(1)\bar{a}b} + h^{(2)\bar{a}b} - (h^{(1)2})^{\bar{a}b} \right) \eta^{\gamma\delta} - \eta^{ab}h^{(2)\bar{\gamma}\delta}. \quad (8.34c)$$

Чтобы получить $t^{\mu\nu}$, надо продифференцировать это по x^γ, x^δ . Явно выполним вычисление для второй строчки:

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}_{,\gamma\delta} = -\square h^{(2)\bar{\alpha}b} + (h^{(2)\bar{b}\delta}_{,\delta})^{\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения движения (8.32b), а второе слагаемое — в силу калибровочного условия (8.24). Мы получили естественный результат, что плотность импульса (= плотность потока энергии) в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, равна нулю. Аналогично, применяя уравнения движения (8.32) и калибровочное условие (8.24) к производным от правых частей (8.34a) и (8.34c) и опуская индекс (1) и черточки над индексами, получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \left(\text{tr } h^{\cdot\alpha} h^{\cdot\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \square \text{tr } h^2 \right), \quad (8.35a)$$

$$t^{ab} = 0, \quad (8.35b)$$

$$t^{ab} = \frac{1}{32\pi G} \left(\square (h^2)^{ab} - \frac{1}{4} \eta^{ab} \square \text{tr } h^2 \right). \quad (8.35c)$$

Немного удивляют ненулевые поперечные компоненты напряжений t^{ab} , однако вспомним, что этот результат получен для произвольного двумерного решения уравнения (8.1), состоящего из двух встречных волн:

$$h_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}^R(x^0 - x^1) + h_{\mu\nu}^L(x^0 + x^1),$$

Если мы положим $h_{\mu\nu}^L = 0$ (волна распространяется только вправо), все члены, содержащие даламбертиан \square в правых частях, обратятся в нуль, так как будут выражаться даламбертианом от функций одной световой координаты $x^- = x^0 - x^1$. Таким образом, для распространяющейся вправо волны получим

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}, \quad t^{\alpha b} = 0, \quad t^{ab} = 0. \quad (8.36)$$

В лоренц-инвариантном виде можно написать

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \text{tr } h^{\cdot\mu} h^{\cdot\nu} = \frac{1}{32\pi G} h_{\kappa}^{\lambda,\mu} h_{\lambda}^{\kappa,\nu}. \quad (8.37)$$

Эту формулу мы используем на следующей лекции, чтобы узнать потери энергии движущегося тела на излучение гравитационных волн.

Задачи

1. Покажите, что «остаточным» калибровочным преобразованием вида (8.8) решение (8.13) с калибровочным условием (8.14) можно привести к виду (8.15). (N.B.! При решении задачи не надо использовать преобразование Фурье.)

2. Для монохромной волны (8.6) найдите такое соотношение на A_{22}, A_{23} , при котором угол φ меняется линейно со временем (*круговая поляризация*). Сколько имеется таких круговых поляризаций?

3. Выведите формулы (8.25), (8.26), (8.29), (8.30), со всеми подробностями. Покажите, что уравнения (8.32) совместны с калибровочным условием (8.24).

4. Из формулы (8.34) выведите (8.36) в предположении $h_{\mu\nu}^L = 0$.

5*. Покажите, что, если подставить в правую часть (8.20) вместо $R_{\mu\nu}$ величины $\tilde{R}_{\mu\nu}$, а вместо $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ величины $\tilde{\chi}^{\mu\nu\lambda\kappa}$, отличающиеся тем, что в них $h^{(2)}$ положено равным нулю, ответ будет совпадать с (8.35). Объясните, почему ответы совпали.

Семинар 8

Сильная гравитационная волна

Рассмотрим решение уравнений гравитационного поля в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^- :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \quad (8.38)$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \quad x^- = \varphi^-(x'^-), \quad (8.39)$$

где буква i пробегает все остальные значения, кроме $-$. При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot{\varphi}^- g_{--} + 2\dot{\varphi}^i g_{-i})\dot{\varphi}^- + g_{ij}\dot{\varphi}^i\dot{\varphi}^j, \quad g'_{-i} = \dot{\varphi}^- g_{-i} + \dot{\varphi}^j g_{ij}, \quad g'_{ij} = g_{ij}, \quad (8.40)$$

где точкой мы обозначили производную по x'^- . Если $\det(g_{ij}) \neq 0$, можно преобразованием (8.39) добиться того, чтобы $g'_{-i} = 0$. После этого мы можем применить такое же преобразование с $\varphi'^i = 0$, чтобы добиться $g''_{--} = 1$. Тогда координата x''^- есть временная координата в синхронной системе координат. Нас этот случай интересовать не будет.

Пусть $\det(g_{ij}) = 0$. Пусть (g^i) есть такой вектор, что $g_{ij}g^j = 0$. Выберем одну из координат (обозначим ее x^+), для которой $g^+ \neq 0$. Изменяя норму (g^i) мы можем положить $g^+ = -1$. Полагая $a, b = 2, \dots, d-1$, получаем

$$g_{a+} = g_{ab}g^b, \quad g_{++} = g_{ab}g^a g^b. \quad (8.41)$$

Более высокого вырождения не может быть, поэтому $\det(g_{ab}) \neq 0$. С помощью преобразования (8.39) с любыми функциями φ^\pm можно добиться того, чтобы $g'_{-a} = 0$, а затем, подобрав подходящим образом $\dot{\varphi}'^+$ и $\dot{\varphi}'^-$ при условии $\dot{\varphi}'^a = -g^a\dot{\varphi}'^+$, можно добиться, чтобы $g''_{--} = 0$, а $g''_{-+} = \frac{1}{2}$. Опуская штрихи, получаем

$$g_{--} = 0, \quad g_{-+} = \frac{1}{2}, \quad g_{-a} = 0, \quad a = 2, \dots, d-1. \quad (8.42)$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a dx^+)(dx^b + g^b dx^+). \quad (8.43)$$

Вычислим тензор Риччи вдоль направлений ∂_a :

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \quad (8.44)$$

Так как согласно вакуумным уравнениям движения $R_{ab} = 0$, мы немедленно находим, что $\dot{g}^a = 0$, то есть $g^a = \text{const}$. Поэтому линейным преобразованием $x^a + g^a x^+ \rightarrow x^a$ мы можем привести метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) dx^a dx^b. \quad (8.45)$$

Ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{b-}^a = \frac{1}{2}\kappa_b^a = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \quad \Gamma_{ab}^+ = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \quad (8.46)$$

Тогда $(--)$ -компонента уравнения Эйнштейна имеет вид

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}_a^a - \frac{1}{4}\kappa_a^b\kappa_b^a = -\frac{1}{2}g^{ab}\dot{g}_{ab} + \frac{1}{4}g^{ab}\dot{g}_{bc}g^{cd}\dot{g}_{da} = 0. \quad (8.47)$$

Это — единственное уравнение на компоненты g_{ab} . Поэтому $d(d-3)/2$ из них можно выбрать произвольно, и только на оставшуюся компоненту писать уравнение. Удобно это сделать в виде:

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \quad \det(\gamma_{ab}) = 1. \quad (8.48)$$

Из последнего условия следует, что $\gamma^{ab}\dot{\gamma}_{ab} = 0$, где γ^{ab} — матрица обратная к γ_{ab} . Для χ получается замкнутое уравнение второго порядка:

$$\ddot{\chi} = \frac{1}{4(d-2)}\dot{\gamma}^{ab}\dot{\gamma}_{ab}\chi. \quad (8.49)$$

Теперь введем переменные

$$x^0 = \frac{x^+ + x^-}{2}, \quad x^1 = \frac{x^+ - x^-}{2}.$$

Это значит, что если мы задали произвольные функции $\gamma_{ab}(x^0 = 0, x^1, \dots, x^{d-1}) = \gamma_{ab}(x^- = -x^1)$ с условием $\det(\gamma_{ab}) = 1$, то есть всего $d(d-3)/2$ произвольные функции, и два числа $\chi(0)$, $\dot{\chi}(0)$, то мы полностью задали эволюцию системы. Калибровочным преобразованием (8.39) всегда можно добиться

того, чтобы $\chi(0) = 1$, $\dot{\chi}(0) = 0$. Поэтому достаточно задать $d(d-3)/2$ функций. Другие $d(d-3)/2$ функций уже «съедены» условием того, что волна движется в одну сторону (зависит только от x^-).

Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Величина под интегралом, усредненная по времени, есть, в сущности, интенсивность волны. Если эта интенсивность не меняется, χ по мере движения волны буде убывать по закону $\chi \simeq 1 - \text{const} \cdot t^2$. Хотя этот закон будет меняться, наступит момент t_0 , когда $\chi(t_0) = 0$. В окрестности этой области имеем

$$ds^2 = dx^- dx^+ - A^2(x^- - t_0)^2 \delta_{ab} dx^a dx^b. \quad (8.50)$$

Казалось бы, мы имеем особенность. Однако замена переменных

$$x^- = y^- + t_0, \quad x^a = \frac{y^a}{Ay^-}, \quad x^+ = y^+ - \frac{\delta_{ab} y^a y^b}{y^-} \quad (8.51)$$

разрешает эту особенность:

$$ds^2 = dy^- dy^+ - \delta_{ab} dy^a dy^b. \quad (8.52)$$

Поэтому на самом деле распространение гравитационной волны не приводит к особенности метрики пространства-времени.