

Лекция 13

Заряженные и вращающиеся черные дыры

В лекции 10 было описано решение Шварцшильда, содержащее две особенности пространства-времени. Эти особенности были пространственноподобными и находились в бесконечном прошлом (белая дыра) и бесконечном будущем (черная дыра) соответственно. В этой лекции мы рассмотрим несколько решений, в которых особенность имеет другую структуру.

Сначала рассмотрим решение Рейснера—Нордстрёма. Это решение можно получить как совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла в вакууме. Под вакуумом мы здесь понимаем отсутствие частиц и других полей, кроме электромагнитного и гравитационного. Учитывая равенство нулю следа тензора энергии-импульса электромагнитного поля, имеем уравнения поля

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(-F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (13.1)$$

Будем искать решение для метрики в виде (10.13). В силу того, что для этого решения площадь любой сферы с центром в точке $r = 0$ равна $4\pi r^2$, из теоремы Гаусса мы получаем решение уравнений Максвелла

$$E_r \equiv F_{tr} = -F_{rt} = e^{k+h} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_{\vartheta} = E_{\varphi} = 0, \quad H_i = 0. \quad (13.2)$$

Постоянная Q естественным образом отождествляется с зарядом центрального тела. Отсюда немедленно получаем тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_t^t = T_r^r = -T_{\vartheta}^{\vartheta} = -T_{\varphi}^{\varphi} = \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4}. \quad (13.3)$$

Подставляя его в уравнения Эйнштейна с тензором Риччи вида (10.16), находим

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad (13.4)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (13.5)$$

где

$$r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}. \quad (13.6)$$

Параметр r_g связан с массой гравитирующего тела той же формулой $r_g = 2GM$, что и в шварцшильдовском случае. Действительно, слагаемое с r_Q не меняет главную асимптотику решения на больших расстояниях.

Величина e^{2k} обращается в нуль в точках

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (13.7)$$

В предельном случае шварцшильдовской метрики $Q = 0$ имеем $r_- = 0$, $r_+ = r_g$. Чтобы понять смысл радиусов r_{\pm} необходимо перейти к системе координат, аналогичной системе Эддингтона—Финкельштейна, не имеющей особенностей в этих точках. Как и в шварцшильдовском случае, найдем радиальные светоподобные геодезические:

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (13.8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

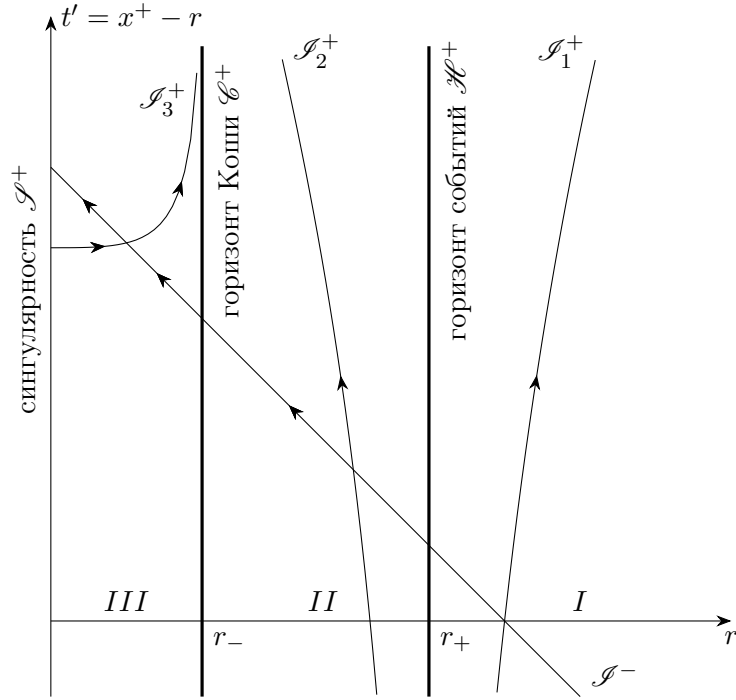


Рис. 13.1. Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при $2r_Q < r_g$.

где

$$\begin{aligned}
 r^* &= r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| && \text{при } r_Q < \frac{r_g}{2}; \\
 r^* &= r + r_g \log \left| \frac{2r}{r_g} - 1 \right| - \frac{r_g r}{2r - r_g} && \text{при } r_Q = \frac{r_g}{2}; \\
 r^* &= r + \frac{r_g}{2} \log \frac{r^2 - r_g r + r_Q^2}{r_Q^2} - \frac{r_Q^2 - r_g^2/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{r - r_g/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} && \text{при } r_Q > \frac{r_g}{2}.
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

Как и раньше, введем переменные

$$x^\pm = t \pm r^*. \tag{13.10}$$

Отсюда легко получаем метрику в виде

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2 \\
 &= \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \left(1 - \frac{r_-}{r} \right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2.
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

Сингулярность осталась только на линии $r = 0$. Теперь рассмотрим три случая для разных соотношений между массой и зарядом.

Если заряд достаточно мал, так что $2r_Q < r_g$, корни $r = r_\pm$ вещественны. Соответствующие линии (при $\vartheta, \varphi = \text{const}$) в пространстве-времени представляют собой изотропные геодезические, пересекающиеся с изотропными геодезическими \mathcal{S}^- ($x^+ = \text{const}$) (Рис. 13.1). Все геодезические \mathcal{S}^- направлены к центру и достигают сингулярности. Геодезические же \mathcal{S}^+ ($x^- = \text{const}$) в трех областях значений r ведут себя по-разному. Во внешней области I : $r > r_+$ эти геодезические удаляются от центра и уходят на бесконечность. В области II : $r_- < r < r_+$ они асимптотически стремятся к линии $r = r_+$ в прошлом и к линии $r = r_-$ в будущем. Частица, попавшая в эту область, не может выйти в область I . Таким образом, поверхность $r = r_+$ является *горизонтом событий*. С другой стороны, частица может, но не обязана попасть в область III : $r < r_-$. Может случиться так, что она будет асимптотически приближаться к поверхности $r = r_-$ (например, если частица обладает достаточно большим зарядом

того же знака, что и источник гравитации). Что происходит в этом случае, мы увидим позже, когда перейдем к координатам светового конуса. Если же частица попадает в область *III*, то она, тем не менее, не обязана падать на сингулярность, поскольку в этой области изотропные геодезические \mathcal{S}^+ начинаются на сингулярности и асимптотически приближаются к поверхности $r = r_-$. Но это значит, что линия сингулярности $r = 0$ является *временеподобной*, и может как поглощать частицы, так и излучать их, сочетая свойства как черной дыры, так и белой. В области *III* не существует *пространственноподобной* поверхности Коши. Любая поверхность, на которой мы можем задать данные, однозначно определяющие дальнейшую эволюцию системы, должна содержать *временеподобный* участок, окружающий сингулярность. Но в этом случае данные на такой поверхности будут избыточны, так как кривые \mathcal{S}^- будут пересекать ее дважды. Поверхность, ограничивающая область, данные в которой однозначно определяются данными на некоторой *пространственноподобной* частичной поверхности Коши называется *горизонтом Коши*. В данном случае горизонтом Коши является поверхность $r = r_-$.

В шварцшильдовском пределе $r_- \rightarrow 0$ ($Q \rightarrow 0$) изотропная геодезическая \mathcal{S}^+ в области *II* «прижимается» к горизонту Коши, испытывая резкий изгиб вблизи него, а вдали от него становится неотличимой от таковой для метрики Шварцшильда. Таким образом, небольшая окрестность сингулярности и области *III* становится неотличимой от *пространственно-подобной* сингулярности. Экспериментатор, приблизившийся к этой окрестности испытывал бы такие же приливные силы, как экспериментатор, падающий на шварцшильдовскую черную дыру.

Теперь перейдем к описанию в координатах светового конуса x^\pm . Имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (13.12)$$

где функция $r(x^-, x^+)$ определяется как решение уравнения $x^+ - x^- = 2r^*(r)$ относительно r . Легко видеть, что если мы выберем решение $r > r_+$, координаты x^\pm покроют область *I*. Предел $x^+ \rightarrow +\infty$, $x^- = \text{const}$ отвечает удаленной точке в будущем, $t, r \rightarrow +\infty$, предел $x^- \rightarrow -\infty$, $x^+ = \text{const}$ — удаленной точке в прошлом, $-t, r \rightarrow +\infty$, предел $x^- \rightarrow +\infty$, $x^+ = \text{const}$ — горизонту событий будущего \mathcal{H}^+ , $r = r_+$, а предел $x^+ \rightarrow -\infty$, $x^- = \text{const}$ — горизонту событий прошлого \mathcal{H}^- , $r = r_+$, получаемому из \mathcal{H}^+ обращением времени $x^+ \leftrightarrow -x^-$.

Выбирая другие решения уравнения $x^+ - x^- = 2r^*$, мы можем покрыть области *II* и *III*, но нам бы хотелось иметь координаты, которые можно было бы гладко продолжить из одной области в другую. Этому служат координаты, аналогичные координатам Крускала—Секереша:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_+^{-1} e^{-\alpha_+ x^-} = -\alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r-t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \\ v &= \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+ x^+} = \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r+t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \end{aligned} \quad (13.13)$$

где

$$\alpha_\pm = \frac{r_+ - r_-}{2r_\pm^2}, \quad \beta_\pm = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{\pm 2}. \quad (13.14)$$

Я здесь специально убрал знаки модуля, ограничив решение на область $r > r_+$. В этих переменных это отвечает области $u < 0$, $v > 0$. Уравнение $x^+ - x^- = 2r^*$ на переменную r приобретает вид

$$uv = -\alpha_+^{-2} e^{2\alpha_+ r} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right) \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+}. \quad (13.15)$$

Для метрики имеем

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{1-\beta_+} e^{-2\alpha_+ r} du dv - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (13.16)$$

Теперь вы видите, что переменные u, v могут быть продолжены за пределы области $u < 0$, $v > 0$ на все вещественные значения. Если мы сделаем дополнительное преобразование

$$u = \alpha_+^{-1} \text{tg } \bar{u}, \quad v = \alpha_+^{-1} \text{tg } \bar{v},$$

мы отобразим плоскость \mathbb{R}^2 на квадрат, что удобнее для графического представления. На Рис. 13.2 этот квадрат отмечен жирным контуром.

Координатная система u, v не продолжается в область $r < r_-$ ввиду особенности компонент метрики (13.16) вида $(r/r_- - 1)^{1-\beta_+}$ на этой поверхности. В области II введем новые координаты $u^{(1)}, v^{(1)}$:

$$u^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v)^{-\beta_-}, \quad (13.17)$$

так что

$$u^{(1)}v^{(1)} = \alpha_-^{-2} e^{-2\alpha_- r} \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right) \left(1 - \frac{r}{r_+} \right)^{-\beta_-}. \quad (13.18)$$

Эти координаты уже продолжаются за горизонт Коши. Действительно, метрика в этих координатах

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_+} \right)^{1-\beta_-} e^{-2\alpha_- r} du^{(1)} dv^{(1)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (13.19)$$

гладко продолжается в область положительных значений $u^{(1)}, v^{(1)}$, то есть на области III, III'_1, II'_1 . В областях III, III_1 они продолжаются вплоть до сингулярности $u^{(1)}v^{(1)} = -\alpha_-^{-2}$. В области II'_1 мы делаем замену

$$u^{(2)} = -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(1)})^{-\beta_+}, \quad v^{(2)} = -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(1)})^{-\beta_+}. \quad (13.20)$$

Эти координаты, очевидно, продолжаются на области I_1, I'_1, II_1 . Далее повторяем операцию по индукции для всех областей в абсолютном будущем (вверх по рисунку) и в абсолютном прошлом (вниз по рисунку):

$$\begin{aligned} u^{(2n+1)} &= -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u^{(2n)})^{-\beta_-}, & v^{(2n+1)} &= -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v^{(2n)})^{-\beta_-}, \\ u^{(2n)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(2n-1)})^{-\beta_+}, & v^{(2n)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(2n-1)})^{-\beta_+} \end{aligned} \quad (13.21)$$

для всех целых n . Для координат с четными индексами выполняется уравнение (13.15), а метрика имеет вид (13.16). Для координат с нечетными индексами выполняется уравнение (13.18), а метрика имеет вид (13.19).

Важное отличие черной дыры Рейснера—Нордстрема состоит в том, что частица вовсе не обязательно должна упасть на сингулярность. Частица, попавшая под горизонт событий, может пройти через область III или III_1 , затем через белую дыру II'_1 и попасть в другой «открытый» мир I_1 или I'_1 . При этом, пересекая горизонт Коши области III находящийся на ней наблюдатель может получить всю информацию о всем будущем «зеркального» мира I' , а пересекая горизонт Коши области III_1 — всю информацию о будущем мира I , из которого он проник за горизонт событий. Мы видим, что судьба такого наблюдателя намного более оптимистична, чем в шварцшильдовском случае.¹

С помощью такой черной дыры мы можем построить кротовую нору, ведущую в наше собственное прошлое, если отождествим, например область II'_1 с областью II_1 .

В вырожденном случае $2r_Q = r_g$ область II схлопывается, горизонт событий и горизонт Коши совпадают, а переменные u, v , которые теперь следует определять как

$$\begin{aligned} u &= -2r_g e^{-x^-/2r_g} = -2r_g e^{\frac{r-t}{2r_g} - \frac{r}{2(2r-r_g)}} \left(\frac{2r}{r_g} - 1 \right)^{1/2}, \\ v &= 2r_g e^{x^+/2r_g} = 2r_g e^{\frac{r+t}{2r_g} - \frac{r}{2(2r-r_g)}} \left(\frac{2r}{r_g} - 1 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (13.22)$$

продолжаются непосредственно в области III и III_{-1} . Далее, легко построить координаты, которые продолжаются в $I_{\pm 1}$, затем в $III_{\pm 1}$ и т.д.

Случай $2r_Q > r_g$ — самый простой. Пространство-время покрывается одной картой и не ни содержит горизонтов событий ни горизонтов Коши, но содержит особенность $r = 0$. Такую особенность

¹Разумеется, при условии, что наблюдатель сможет перенести перегрузки связанные с приливными силами. Диаграмма Пенроуза точно отражает причинную структуру, но ничего не говорит о масштабах, временах и кривизнах. Надо заметить, что если r_- достаточно мало, то ситуация для физического наблюдателя больших размеров будет мало отличаться от шварцшильдовской. Область $r \leq r_-$ будет для него трудно отличима от пространственноподобной сингулярности шварцшильдовской черной дыры, и результат падения на горизонт Коши кончится для него его разрушением.

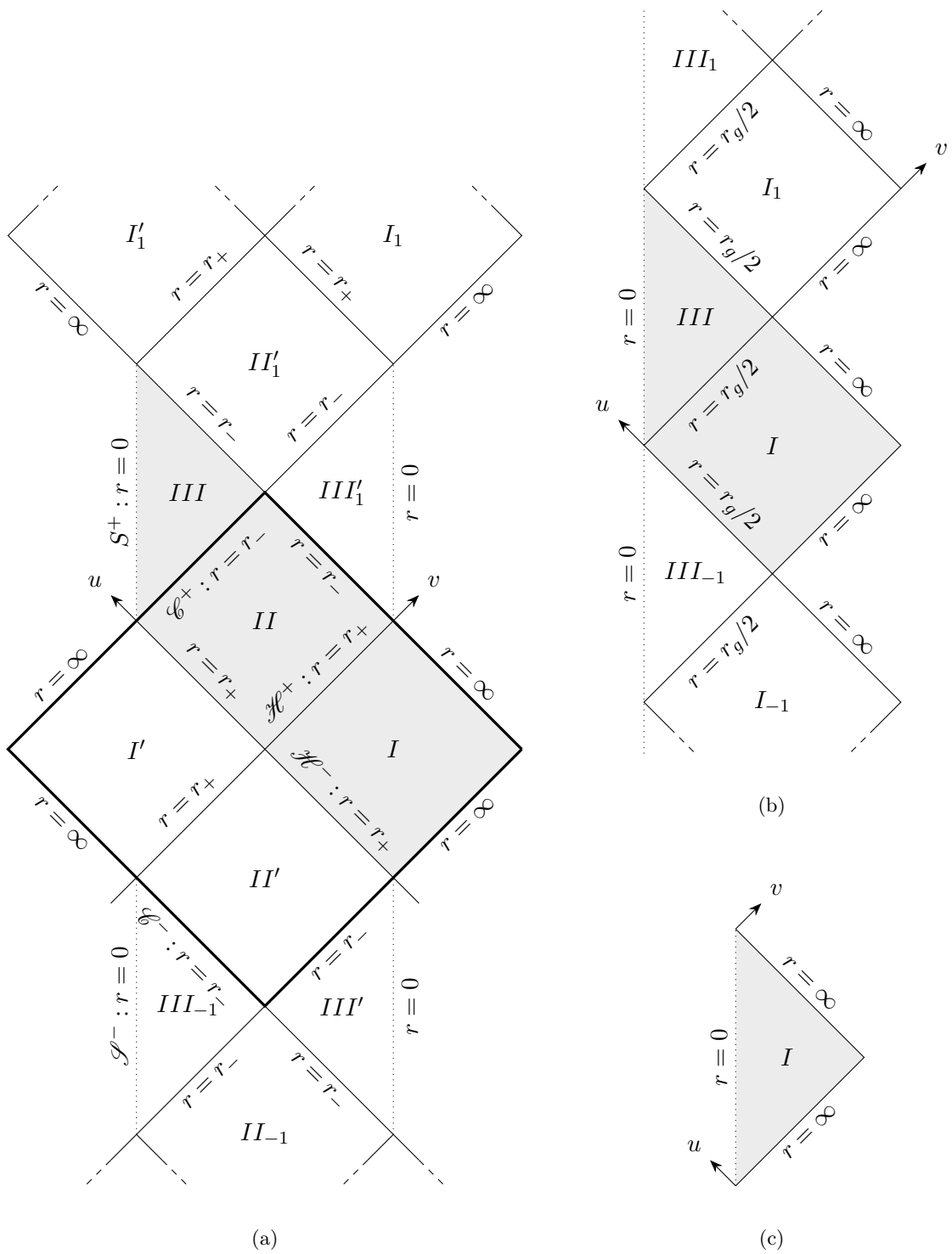


Рис. 13.2. Диаграмма Пенроуза для метрики Рейснера–Нордстрема. (а) Случай $2r_Q < r_g$. Жирным обведен квадрат, представляющий плоскость переменных u, v , определенных координатами x^+, r с метрикой (13.11). (б) Случай $2r_Q = r_g$. Область II исчезает. Горизонт событий и горизонт Коши совпадают. (с) Случай $2r_Q > r_g$. Голая сингулярность: горизонта событий и горизонта Коши нет.

называют *голой сингулярностью*. Это пространство «плохо» тем, что в нем вообще нет пространственноподобных поверхностей Коши. Многим ученым такая ситуация не нравится, и они предполагают, что во Вселенной действует *принцип космической цензуры*: в природе не может быть голых сингулярностей. По отношению к метрике Рейснера—Нордстрема валидность этого принципа может быть связана с тем, что кулоновское отталкивание не позволит создать голую сингулярность этого типа, но этот факт не доказан. Возможно, принцип космической цензуры является чисто эстетическим принципом и не имеет отношения к природе вещей.

Рассмотрим теперь (без всяких доказательств) «максимальное» обобщение метрики Шварцшильда — метрику Кёрра—Ньюмена. Эта метрика отвечает вращающейся заряженной черной дыре. В случае нулевого заряда она называется метрикой Керра. В координатах Бойера—Линдквиста, обобщающих координаты Шварцшильда, метрика Керра—Ньюмена имеет вид²

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2, \quad (13.23)$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$

Параметр a связан с моментом импульса J :

$$J = aM. \quad (13.24)$$

Тензор электромагнитного поля удобнее записать в виде формы

$$F = \frac{Q}{4\pi\rho^4} ((r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)(dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi) \wedge dr + ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)), \quad (13.25)$$

где, как обычно, $dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu)$.

Метрика имеет особенность в корнях полинома $\Delta(r)$,

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - \frac{GQ^2}{4\pi} - a^2}. \quad (13.26)$$

Чтобы понять смысл этих корней, перейдем к координатам Керра x^+ , r , ϑ , ϕ , аналогичным координатам Эддингтона—Финкельштейна:

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (13.27)$$

В этих координатах кривая x^+ , ϑ , $\phi = \text{const}$ является изотропной кривой, однако, вообще говоря, не является геодезической. Метрика в них имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dx^+ d\phi. \quad (13.28)$$

Кривая r , ϑ , $\phi = \text{const}$ является изотропной, но, опять же, не геодезической кривой на поверхности, где

$$\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta = 0, \quad (13.29)$$

то есть

$$r_{e,\pm}(\vartheta) = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (13.30)$$

²Выражения в скобках определяют ортогональный базис, отличный от координатного. Такие базисы (реперы или «тетрады») дают важный метод решения уравнений Эйнштейна, но изучение этой техники находится за пределами данного курса. Такой же вид имеет и выражение (13.31) ниже.

При этом $r_{e,+} \geq r_+$. В полюсах $\vartheta = 0, \pi$ радиальная часть метрики (13.28) имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr,$$

так что ясно, что точки с $r = r_+ = r_{e,+}(0)$ находятся на горизонте событий, а с $r = r_- = r_{e,-}(0)$ — на горизонте Коши. Давайте разберемся, что происходит на произвольных широтах. Для этого перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (13.31)$$

Изучим пересечение светового конуса с трехмерным пространственно-временным цилиндром $r = \text{const}$ (точнее, с касательным пространством к нему). При $dr = 0$ третий член пропадает, и остаются только три члена, имеющие вид полных квадратов. При $\Delta < 0$ все эти члены отрицательны, и световой конус, начинающийся в некоторой точке, пересекается с поверхностью только в вершине. Поверхность является пространственноподобной. Можно показать, что половина конуса, соответствующая $dx^+ > 0$, направлена внутрь поверхности. Таким образом, если в какой-то момент времени x^+ поместить на поверхность $r = \text{const}$ легкие частицы и исследовать движение поверхности, образуемой этими частицами, площадь поверхности будет со временем уменьшаться. В этом случае мы говорим, что пространственная поверхность $r = \text{const}$, $r_- < r < r_+$ является *ловушечной поверхностью*.

При $\Delta > 0$ световой конус пересекает поверхность по двумерному конусу

$$\rho^4 d\vartheta^2 = \Delta (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \sin^2 \vartheta ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2.$$

Это значит, что всегда есть часть светового конуса $dx^+ > 0$, которая направлена наружу. Поверхность является времениподобной. Если же $\Delta = 0$, двумерный конус вырождается в одну линию

$$d\vartheta = 0, \quad \frac{d\phi}{dx^+} = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Таким образом, световой конус касается гиперповерхности $r = \text{const}$ и частицы, вошедшие под эту поверхность, не могут уже пересечь ее снова. Это значит, что поверхности $\Delta = 0$ являются *изотропными* гиперповерхностями. По-другому в этом можно убедиться так. Как нетрудно проверить, на них $g^{rr} = 0$, и, следовательно, $g^{\mu\nu} \Delta_{,\mu} \Delta_{,\nu} = g^{rr} \Delta_{,r}^2 = 0$. Как мы убедились на прошлом семинаре, это значит, что интегральные кривые

$$r = r_{\pm}, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

являются изотропными геодезическими. Так как на каждом подпространстве $r = r_{\pm}$, $\vartheta = \text{const}$ метрика постоянна, мы можем заключить, что x^+ является аффинным параметром геодезической.

Сравнивая с ситуацией в решении Рейснера—Нордстрема, мы видим, что поверхность $r = r_+$ является горизонтом событий, а $r = r_-$ — горизонтом Коши *при всех значениях угла* ϑ . Поверхность же $r = r_{e,+}(\vartheta)$ играет роль горизонта событий только для радиальных движений. Эта поверхность охватывает горизонт событий и касается его в полюсах. Она называется *пределом статичности* и ограничивает область (*эргосферу*), внутри которой частицы не могут оставаться стационарными по отношению к бесконечно-удаленной системе координат. Черная дыра «увлекает» их и заставляет вращаться вместе с собой. Однако частица, попавшая в эргосферу, может из нее вырваться во внешнюю область.

Наличие эргосферы отличает вращающуюся черную дыру от невращающейся. Другое отличие состоит в том, что сингулярность представляет собой не точку, а *окружность*. Если вычислить компоненты тензора Римана, то окажется, что они имеют особенности при $r = 0$ и $\vartheta = \pi/2$. При всех других значениях ϑ особенности нет. Чтобы понять смысл особенности, следует перейти к координатам:

$$X^0 = x^+ - r, \quad X^1 + iX^2 = (r + ia)e^{i\phi} \sin \vartheta, \quad X^3 = r \cos \vartheta. \quad (13.32)$$

Обратно, r является решением уравнения

$$r^4 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - a^2)r^2 - a^2(X^3)^2 = 0. \quad (13.33)$$

Метрика в этих координатах принимает вид *метрики Керра—Шильда*

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu - 2H(k_\mu dX^\mu)^2, \quad (13.34)$$

где H и k_μ ($g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$) — некоторые функции координат. Для решения Керра—Ньюмена они принимают вид

$$H = \frac{r_g r - r_Q^2}{2\rho^2}, \quad k_\mu dX^\mu = dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi. \quad (13.35)$$

Разумеется, их можно выразить через координаты X^μ , но это нам не понадобится. Для нас важно, что в этих координатах поверхности $r = \text{const}$ при данном x^+ представляют собой софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения с фокальной окружностью $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$, $X^3 = 0$ (Рис. 13.3) При $r \rightarrow 0$ эллипсоид вырождается в диск радиуса a , натянутый на фокальную окружность, причем сингулярность расположена на краю диска — фокальной окружности эллипсоидов. На диске компоненты метрики конечны, но их производная по X^3 имеет разрыв. Действительно, при $(X^3)^2 \ll a^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2$ уравнение (13.33) имеет решение

$$r \simeq \frac{|aX^3|}{\sqrt{a^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2}},$$

а коэффициент H гладко зависит от r при $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$. Таким образом, H испытывает излом при $X^3 = 0$. Чтобы избежать нарушения гладкости метрики, следует продолжить ее в область $r < 0$. Но при любых отрицательных r имеем $\Delta > 0$, так что в этой области нет горизонтов событий и горизонтов Коши.³

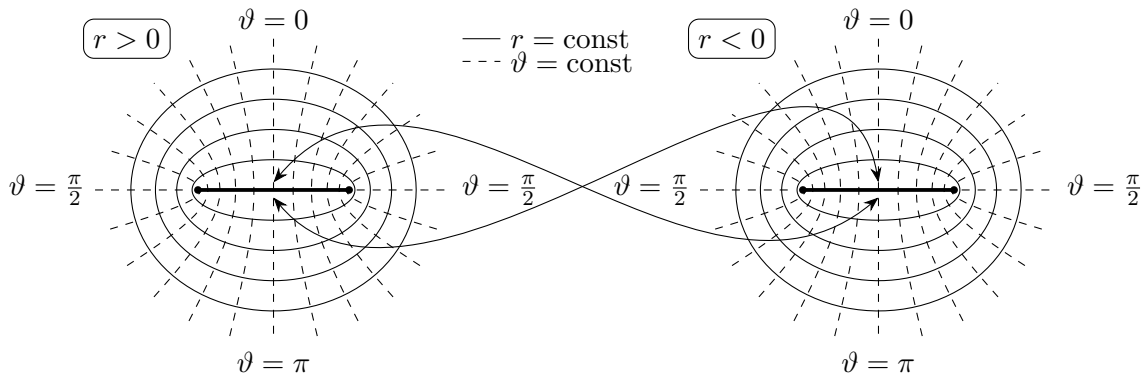


Рис. 13.3. Окрестность сингулярности в черной дыре Керра—Ньюмена. При уменьшении параметра r эллипсоид вырождается в диск (жирная линия посередине). При этом край диска (жирные точки) представляет собой пространственно-временную сингулярность, а внутренность диска — разрез. Двусторонние стрелки показывают, какие берега разреза областей $r > 0$ и $r < 0$ должны быть склеены.

Что касается диаграммы Пенроуза для пространства Керра—Ньюмена, то она почти не отличается от диаграммы для пространства Рейснера—Нордстрема, изображенной на Рис. 13.2. Единственное отличие состоит в том, что области типа *III* превращаются из «треугольников» в «квадраты» за счет области $r < 0$. На Рис. 13.4 представлена соответствующая часть диаграммы Пенроуза в экваториальной плоскости. (Вне экваториальной плоскости мы вообще не увидели бы сингулярности.)

Мы рассмотрели случай черной дыры $r_g^2/4 > r_Q^2 + a^2$. Обобщение на вырожденный случай $r_g^2/4 = r_Q^2 + a^2$ и случай голой сингулярности $r_g^2/4 < r_Q^2 + a^2$ не составляет труда. Надо сказать, что задача о движении частицы в поле решения Керра—Ньюмена тоже решается точно: переменные в соответствующем уравнении Гамильтона—Якоби разделяются.

Мы обнаружили сингулярности, изучая точные решения уравнений Эйнштейна в пустоте. Возникает вопрос, насколько универсально такое поведение. При каких условиях возникает особенность, и насколько ее возникновение неизбежно. На этот счет есть несколько теорем, которые формулируются

³Можно заметить, что наблюдатель в области $r < 0$ будет наблюдать голую сингулярность *отрицательной массы*. Действительно, замена $r \rightarrow -r$ эквивалентна замене $r_g \rightarrow -r_g$.

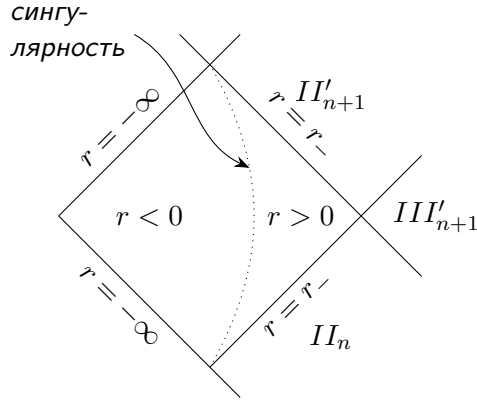


Рис. 13.4. Область III_n конформной диаграммы пространства Керра—Ньюмена в экваториальной плоскости.

настолько локально, насколько возможно. Введем важное понятие. Рассмотрим *замкнутое* компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{S} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит две ортогональные ему изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки x многообразия \mathcal{S} два пучка изотропных геодезических \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 . Введем на них аффинный параметр τ так, чтобы $\tau = 0$ на \mathcal{S} . Мы можем измерить площади $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ пучков в зависимости от аффинного параметра. Тогда, если

$$\left. \frac{dA_i}{d\tau} \right|_{\tau=0} < 0 \quad (i = 1, 2)$$

для каждой точки на \mathcal{S} , то \mathcal{S} называется *ловушечной поверхностью*.

Простейшая теорема об особенностях звучит так. Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем \mathbb{R}), если

- 1) в каждой точке пространства-времени x для любого изотропного вектора $k \in TM_x$ выполняется неравенство $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$;
- 2) в пространстве-времени существует некомпактная глобальная поверхность Коши;
- 3) в пространстве-времени существует ловушечная поверхность.

Условия этой теоремы очень ограничительны. Из рассмотренных нами точных решений ее условиям удовлетворяет только решение Шварцшильда. Кроме того, ему могут удовлетворять некоторый класс задач о коллапсе тел. Тем не менее, эта теорема дает некоторое представление о том, как могут выглядеть условия существования особенностей пространства-времени.

Задачи

1. Выведите решение уравнений Максвелла (13.2) и тензор энергии-импульса (13.3).
2. Решив уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса (13.3), получите метрику Рейснера—Нордстрема (13.5).
3. Найдите векторный потенциал для поля (13.2) и разделите переменные в уравнении Гамильтона—Якоби для *заряженной* частицы в метрике Рейснера—Нордстрема.
4. Рассмотрите метрику в форме Керра—Шильда (13.34) с произвольной функцией $H(X)$ и векторным полем $k(X)$, таким что $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$. Покажите, что $k^\mu = k^{\bar{\mu}}$ и $\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$, а также получите явный вид обратной метрики $g^{\mu\nu}$.
- 5*. Изучите решение Керра—Ньюмена на больших расстояниях $r \gg r_g, r_Q$ и покажите, что оно отвечает объекту массы M , заряда Q и момента импульса $J = aM$. Покажите, что магнитный дипольный момент этого объекта равен $\mu = Qa$.⁴

⁴Используйте тот факт, что неподвижная частица с магнитным моментом μ в пространстве-времени Минковского создает магнитное поле $\mathbf{H} = \frac{3(\mu\mathbf{n})\mathbf{n} - \mu}{4\pi r^3}$.

Семинар 13

Изотропные гиперповерхности. Эволюция изображений

В прошлый раз мы выяснили, что форма тени на экране не зависит от системы отсчета экрана при одном условии: экран находится в плоскости, перпендикулярной лучу света. В этот раз мы изучим, как меняется это изображение вдоль изотропных геодезических.

Рассмотрим теперь две «соседних» изотропных геодезических $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$ и $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ с малым δy . Как мы видели раньше, если они находятся на одной поверхности $F(x) = c$, выполняется условие $l(x(\tau))\delta x(\tau) = 0$. Выберем также семейство экранов $S(\tau)$, движущихся с такими скоростями $U(\tau)$, что $U(\tau)\delta x(\tau) = 0$. Это значит, что выполнены условия (12.32) и (12.33) и экраны ортогональны лучам света. Так как для формы изображений скорости экранов не важны, будем считать вектор $U(\tau)$ ковариантно-постоянным вдоль геодезической $x(\tau)$: $\nabla_{l(\tau)}U(\tau) = 0$.

Эволюция компонент $\delta x^\mu(\tau)$ вектора $\delta x(\tau)$ определяется простым уравнением

$$\frac{d}{d\tau}\delta x^\lambda = l^\lambda{}_{,\mu}\delta x^\mu.$$

Но нас будет интересовать не само изменение набора чисел δx^μ , а изменение изображения на экране $S(\tau)$. Мы знаем, что связность Леви-Чивиты переносит метрику саму в себя, поэтому изображение не менялось бы, если бы векторы $\delta x(\tau)$ были ковариантно-постоянными. Значит, нас будет интересовать разность между вектором $\delta x(\tau)$ и вектором $\tilde{\delta}_{\tau_0}x(\tau)$, который представляет собой перенос вектора $\delta x(\tau_0)$ вдоль геодезической $x(\tau)$. Последняя величина определяется уравнением

$$\nabla_l\tilde{\delta}x(\tau_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\tilde{\delta}_{\tau_0}x^\lambda = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda l^\nu \tilde{\delta}_{\tau_0}x^\mu.$$

Заменяя $\tau_0 \rightarrow \tau$, $\tau \rightarrow \tau + \Delta\tau$ и вычитая одно из другого и, получаем

$$\delta\dot{x}^\lambda(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\delta x^\lambda(\tau + \Delta\tau) - \tilde{\delta}_{\tau}x^\lambda(\tau + \Delta\tau)}{\Delta\tau} = l^\lambda{}_{;\mu}\delta x^\mu \quad (13.36)$$

или

$$\delta\dot{x} = \nabla_{\delta x}l. \quad (13.37)$$

Иными словами, параллельный перенос вдоль геодезической $x(\tau)$ позволяет нам отождествить все экраны, а уравнение (13.36) или (13.37) определяет эволюцию формы изображения на экране. Чтобы описать эволюцию изображений более явно, выберем на экранах базис из двух ортонормированных ковариантно-постоянных векторов e_1, e_2 :

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (13.38)$$

Поскольку мы будем в дальнейшем понимать их как фиксированные векторы в двумерном пространстве всех отождествленных экранов, параметр τ мы будем опускать.

Вместо векторов e_i удобно использовать комплексные «изотропные» векторы m, \bar{m} :

$$m = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{m} = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \quad m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad m\bar{m} = -1. \quad (13.39)$$

Тогда произвольную точку $x^\mu + \delta x^\mu$ можно задать комплексным числом ζ :

$$\delta x^\mu = \zeta\bar{m}^\mu + \bar{\zeta}m^\mu. \quad (13.40)$$

Из (13.37) получаем

$$\dot{\zeta} = -(\rho\zeta + \sigma\bar{\zeta}), \quad (13.41)$$

где

$$\rho = l_{\mu;\nu}m^\mu\bar{m}^\nu, \quad \sigma = l_{\mu;\nu}m^\mu m^\nu \quad (13.42)$$

называются *оптическими скалярами*. Оптические скаляры определяют изменение формы изображения. Если на первом экране нарисовать круг с контуром $\zeta(\theta) = e^{i\theta}$, то на близко расположенном втором экране его изображение будет выглядеть как эллипс

$$\zeta'(\theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (13.43)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на величину $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$, а $|\sigma|$ характеризует сплющивание круга (астигматизм). Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, ρ является вещественным числом. В этом случае верно утверждение

$$\frac{d}{d\tau}\delta A^{1/2} = -\rho\delta A^{1/2}, \quad (13.44)$$

где δA площадь элемента поверхности

Теперь посмотрим, как эволюционируют сами оптические скаляры. Для этого нам понадобится тождество

$$\delta_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{(Ul)^2}l^{\mu}l_{\nu} - m^{\mu}\bar{m}_{\nu} - \bar{m}^{\mu}m_{\nu} + \frac{1}{Ul}(U^{\mu}l_{\nu} + l^{\mu}U_{\nu}). \quad (13.45)$$

Из определения тензора Римана можно получить

$$l_{\lambda;\mu\nu} = l_{\lambda;\nu\mu} + R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}l_{\kappa},$$

откуда

$$\frac{dl_{\mu;\nu}}{d\tau} \equiv l^{\lambda}l_{\mu;\nu\lambda} = -l^{\lambda}{}_{;\nu}l_{\mu;\lambda} + R_{\kappa\mu\nu\lambda}l^{\kappa}l^{\lambda}. \quad (13.46)$$

Используя тождество (13.45), получаем

$$R_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = -2R_{\kappa\mu\lambda\nu}m^{\kappa}l^{\mu}\bar{m}^{\lambda}l^{\nu}.$$

С помощью того же тождества из (13.46) получаем

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu}, \quad (13.47)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^{\kappa}m^{\lambda}l^{\mu}m^{\nu} = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^{\kappa}m^{\lambda}l^{\mu}m^{\nu}. \quad (13.48)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана.

Если при начальном параметре $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, уравнения легко решить:

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$, где скаляр ρ обращается в бесконечность. Решая (13.44), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Если начальное значение ρ отрицательно ($\tau_0 > \tau_*$), площадь растет пропорционально квадрату геодезического параметра. Если же начальное значение положительно ($\tau_0 < \tau_*$) в момент времени, отвечающий τ_* площадь обращается в нуль, что отвечает фокальной точке.

Имеется общая теорема.

Теорема о фокусировании. Если во всем пространстве $\Phi \geq 0$ и в некоторой точке светового пучка $\tau = \tau_0$ первый оптический скаляр положителен, $\rho(\tau_0) = \rho_0 > 0$, то на конечном положительном расстоянии от этой точки $\tau - \tau_0 \leq \rho_0^{-1}$ пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль.

Действительно, из (13.44) получаем

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\delta A^{1/2} = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)\delta A^{1/2}. \quad (13.49)$$

Поскольку правая часть неположительна, имеем $\frac{d}{d\tau}\delta A^{1/2} \leq -\rho_0\delta A_0^{1/2}$, откуда и следует теорема.

Таким образом, ловушечная поверхность, это такая поверхность, для которой $\rho > 0$ на проходящих через нее перпендикулярных ей изотропных конгруэнций.