Лекция 1

Геометрия и физика специальной теории относительности

Специальная теория относительности основана на геометрии пространства-времени Минковского $M^4 = \mathbb{R}^{1,3}$ или, более обще $M^d = \mathbb{R}^{1,d-1}$.[1] Это пространство-время представляет собой аффинное пространство с заданной на нем плоской метрикой сигнатуры $(1, d-1)$. Чтобы разобраться в этом, начнем с векторных (линейных) пространств.

Пусть V — d-мерное линейное пространство. С каждым таким пространством связано d-мерное *двойственное пространство* V^*, то есть пространство линейных функций (форм) на пространстве V. Предположим, что на пространстве V задана невырожденная симметричная линейная форма $g : V \otimes V \to \mathbb{R}$ (или, что то же самое, $g \in V^* \otimes V^*$), то есть билинейное симметричное отображение $g(u, v) = g(v, u)$ $(u, v \in V)$, такая, что для любого вектора $u \neq 0$ существует хотя бы один вектор v, такой что $g(u, v) \neq 0$. Форму g можно также понимать как отображение $\overline{g} : V \to V^*$, сопоставляющее каждому вектору $u \in V$ линейную форму $g(u, \cdot) \in V^*$. Невырожденность формы g означает существование обратного отображения $\overline{g}^* : V^* \to V$, которое по тому же принципу задает билинейную форму $g^* : V^* \otimes V^* \to \mathbb{R}$, то есть бивектор $g^* \in V \otimes V$.

Изучим вопрос о знакоопределенности формы g. Предположим, что $g(u, u) \geq 0$ для любого $u \neq 0$. Тогда из невырожденности формы g следует, сто $g(u, u) > 0$. Действительно, пусть есть такой ненулевой вектор u, что $g(u, u) = 0$. В силу невырожденности g существует такой вектор v, что $g(u, v) \neq 0$ и, по условию, $g(v, v) \geq 0$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \leq g(u + \alpha v, u + \alpha v) = 2\alpha g(u, v) + \alpha^2 g(v, v).$$

Очевидно, это неравенство не может быть соблюдено в некоторой окрестности точки $\alpha = 0$ в силу того, что $g(u, v) \neq 0$. Таким образом, любая неотрицательная форма положительно определена.

Но это значит, что если существует «нулевой» вектор u, то есть вектор, такой что $g(u, u) = 0$, то существуют и такие два вектора v_+, v_-, что $g(v_+, v_+) > 0$, а $g(v_-, v_-) < 0$. Более того, любой «нулевой» вектор u может быть представлен как линейная комбинация двух таких векторов с разными знаками формы. Пусть имеется вектор v_+, такой что $g(v_+, v_+) = 1$, $g(u, v_+) \neq 0$. Тогда для вектора $v_- = u - g(u, v_+)v_+$ имеем $g(v_-, v_-) = -(g(u, v_+))^2$. Ни множество векторов $\mathcal{C}_+$ с $g(u, u) > 0$, ни множество векторов $\mathcal{C}_-$ с $g(u, u) < 0$, ни множество векторов $\mathcal{J}$ с $g(u, u) = 0$ не образуют векторных пространств. Но тот факт, что «нулевые» вектора раскладываются в пару «положительных» и «отрицательных» векторов, позволяет предположить, что и само векторное пространство V распадается в сумму $V = V_+ \oplus V_-$ пространств с положительно- и отрицательно-определенной формой g.

Чтобы в этом убедиться, построим базис в V_-. Пусть v_1 — вектор с $g(v_1, v_1) < 0$. Тогда множество ортогональных ему векторов, то есть векторов u, таких что $g(v_1, u) = 0$ образует линейное пространство $V^{(1)}$. В пространстве $V^{(1)}$ форма g может быть положительно определена. Тогда $V_+ = V^{(1)}$, а $V_- = \mathrm{span}(v_1)$. Если же нет, выберем вектор $v_2 \in V^{(1)}$ такой, что $g(v_2, v_2) < 0$ и определяем пространство $V^{(2)}$ как пространство ортогональных ему векторов. Продолжаем процедуру, пока на пространстве $V^{(d_-)}$ форма g не будет положительно определена. Тогда $V_+ = V^{(d_-)}$ размерности $d_+ = d - d_-$, а $V_- = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_{d_-})$. Заодно мы получили ортогональный базис в V_-, который легко превратить в ортонормированный, если выбирать векторы v_i условием $g(v_i, v_i) = -1$. Мы будем говорить, что форма g имеет *сигнатуру* (d_+, d_-). В теории относительности нас будут интересовать формы сигнатуры $(1, 3)$.[2] Одномерное пространство V^+ отвечает времени, а трехмерное пространство V^- — физическому пространству. Векторы из $\mathcal{C}^+$ (с положительной нормой) называют *времениподобными*, векторы из $\mathcal{C}^-$ (с отрицательной нормой) — пространственноподобными. Векторы из $\mathcal{J}$ (с нулевой нормой) называют *светоподобными*. Само множество $\mathcal{J}$ называют *световым конусом*, причем $\mathcal{C}^+$ считается внутренностью светового конуса, а $\mathcal{C}^-$ — его внешней областью. В теории относительности светоподобный базисный вектор принято обозначать e_0, а три пространственноподобных — $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$. Во всех векторных и матричных формулах будем принимать порядок значений индексов $0, 1, 2, 3$.

[1] Нас, конечно, будет интересовать прежде всего случай $d = 4$, однако там, где это не будет заметно усложнять рассуждения, мы будем рассматривать общие $d > 1$.

[2] Можно было бы рассматривать формы сигнатуры $(3, 1)$. В некоторых отношениях такой выбор удобнее, а в чем-то менее удобен, так что это дело вкуса.

Рассмотрим некоторый базис e_μ, $\mu = 1, \ldots, d$ в пространстве V. Любой вектор $u \in V$ записывается в виде $u = u^\mu \mathrm{e}_\mu$, где мы предполагаем суммирование по повторяющемуся индексу. Тогда числа $g_{\mu\nu} = g(\mathrm{e}_\mu, \mathrm{e}_\nu)$ образуют симметричную матрицу $G = (g_{\mu\nu})^d_{\mu,\nu=1}$. Замена базиса $\mathrm{e}_\mu = V_\mu{}^\nu \mathrm{e}'_\nu$ отвечает преобразованию $g_{\mu\nu} = V_\mu{}^\rho V_\nu{}^\sigma g'_{\rho\sigma}$ или $G = VG'V^T$. Тот факт, что пространство V распадается в сумму $V_+ \oplus V_-$ означает, что таким преобразованием мы можем привести матрицу G к виду

$$G = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{d_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{d_-}) \equiv (\eta_{\mu\nu})^d_{\mu,\nu=1} \equiv \mathrm{H}^{(d_+,d_-)}. \qquad (1.1)$$

Матрицы V, сохраняющие этот вид формы G, то есть

$$\mathrm{H}^{(d_+,d_-)} = V\mathrm{H}^{(d_+,d_-)}V^T,$$

образуют группу псевдоортогональных матриц $O(d_+, d_-)$. Те, которые при этом имеют положительный (равный единице) определитель, образуют группу $SO(d_+, d_-)$. Группа $SO(1, 3)$ (и ее обобщение $SO(1, d-1)$ в гипотетическом пространстве-времени размерности d) называется *группой Лоренца*. В теории относительности будем писать $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$.

Бивектор g^* равен, очевидно, $g^{\mu\nu}\mathrm{e}_\mu\mathrm{e}_\nu$, где коэффициенты $g^{\mu\nu}$ образуют матрицу G^{-1}:

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \qquad (1.2)$$

Использование индексных обозначений компактно, но имеет один недостаток: мы заменяем реальные инвариантные объекты (тензоры) их компонентами. В то же время безындексная запись математически корректна, обща, но громоздка. Поэтому мы часто будем пользоваться *методом формальных индексов*. Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V \otimes V \otimes \cdots$ и перенумеруем входящие в него пространства натуральными числами по порядку. Будем соответствующим числом жирным шрифтом указывать, в каком пространстве расположен или на какое пространство действует объект. Например, $u^{\mathbf{k}}$ — это вектор u, расположенный в k-й тензорной компоненте, а $\omega_{\mathbf{k}}$ — 1-форма, действующая на k-ю компоненту. Тогда $\omega_{\mathbf{1}}u^{\mathbf{1}} = u^{\mathbf{1}}\omega_{\mathbf{1}} = \omega u = \omega(u)$. Здесь от формального индекса, вроде бы, нет никакой пользы. Но вот $g_{\mathbf{12}}u^{\mathbf{1}}v^{\mathbf{2}} = g(u, v)$ и $g_{\mathbf{12}}u^{\mathbf{1}} = (\overline{g}(u))_{\mathbf{2}}$ записать с формальными индексами уже удобней. И все четыре объекта $g, \overline{g}, g^*, \overline{g}^*$ можно теперь обозначать одной буквой g. Действительно,

$$g^{\mathbf{13}}g_{\mathbf{32}} = \delta^{\mathbf{1}}_{\mathbf{2}} \qquad (1.3)$$

формально похоже на (1.2), но выражает инвариантный факт, что $\overline{g}^* = \overline{g}^{-1}$. На общих многообразиях запись с формальными индексами будет значительно упрощать вывод явных формул в компонентах, не мешая пониманию инвариантного смысла выражений.

Нам часто удобно будет отождествлять вектор $u \in V$, например, с формой $\overline{g}(u) \in V^*$ и, наоборот, форму $\omega \in V^*$ с вектором $\overline{g}^*(\omega) \in V$. Чтобы подчеркнуть разницу мы будем писать верхний формальный индекс у объекта из V и нижний у объекта из V^*. Если не будет необходимости указывать конкретную «цифру», но нужно будет подчеркнуть, какому пространству принадлежит объект, мы будем вместо индекса ставить жирную точку, например, $u^{\bullet} = u$, $u_{\bullet} = \overline{g}(u)$ (то есть $u_{\mathbf{1}} = g_{\mathbf{12}}u^{\mathbf{2}}$).

Теперь перейдем к аффинным пространствам. Аффинное пространство отличается от линейного только отсутствием выделенного нуля. То есть это множество точек, такое что каждой паре точек A, B отвечает вектор в линейном пространстве, обозначаемый $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ а для любых трех точек A, B, C выполняется правило треугольников $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Форма g определяет *метрику* на аффинном пространстве, то есть расстояние $|AB|$ между точками A и B задается формулой

$$|AB|^2 = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}).$$

Понятно, что определенное таким образом расстояние может быть как вещественным, так и мнимым. В теории относительности величина $|AB|$ называется *собственным временем*, отвечающим отрезку $[AB]$. Точки в аффинном пространстве-времени называются *событиями*.

В аффинном пространстве точки можно задать координатами. Если мы выделим «начальную» точку O и базис $\{\mathrm{e}_\mu\}$ в пространстве V, то координаты x^μ_A точки A задаются уравнением

$$\overrightarrow{OA} = x^\mu_A \mathrm{e}_\mu.$$

С одной стороны, это отождествляет аффинное пространство с пространством $\mathbb{R}^d$, которое, в случае метрики $g=\eta$ обозначается как $\mathbb{R}^{d_+,d_-}$. С другой стороны, это вводит на аффинном пространстве структуру многообразия. Понятно, что аффинное пространство покрывается одной картой, но специальная теория относительности имеет смысл на многообразиях с разной топологией. Главное, чтобы матрицы перехода между картами с (псевдо)декартовыми координатами задавались бы псевдоортогональными матрицами. Обозначения и понятия, связанные со структурой многообразия мы разберем в следующей лекции, посвященной более общей геометрии.

В теории относительности мы иногда будем пользоваться обозначениями $x^0=t, x^1=x, x^2=y, x^3=z$. Скорость света мы будем всюду принимать равной единице. Соответственно, расстояние между событиями в специальной теории относительности равно

$$|AB|^2=(t_A-t_B)^2-(x_A-x_B)^2-(y_A-y_B)^2-(z_A-z_B)^2. \tag{1.4}$$

Для бесконечно-малых расстояний собственное время обозначается ds и равно

$$ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{1.5}$$

Обсудим группу Лоренца $SO(1,3)$ и ее физическую интерпретацию. Рассмотрим две системы отсчета K и K' и связанные с ними системы пространственных координат x^i и x'^i $(i=1,2,3)$. Пространственными вращениями $SO(3)\subset SO(1,3)$ мы можем добиться того, чтобы базисные векторы e_i и e'_i совпали. Более того, мы можем сделать так, чтобы скорость системы отсчета K' в системе отсчета K была направлена по одной из осей, например вдоль e_1. Тогда преобразование (*преобразование Лоренца*)

$$t'=\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}},\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}},\qquad y'=y,\qquad z'=z. \tag{1.6}$$

принадлежит группе Лоренца. Три вращения и преобразование Лоренца порождают всю группу Лоренца $SO(1,3)$. Преобразования Лоренца, также как и все остальные факты релятивистской кинематики, полностью выводятся из следующего постулата: *Величина $|AB|^2$ для двух событий A и B, определенная (1.4), не зависит от системы отсчета.*

Полезно ввести *быстроту* θ уравнением $v=\operatorname{th}\theta$. Тогда преобразование Лоренца принимает вид

$$t'=t\operatorname{ch}\theta-x\operatorname{sh}\theta,\qquad x'=-t\operatorname{sh}\theta+x\operatorname{ch}\theta,\qquad y'=y,\qquad z'=z, \tag{1.7}$$

напоминающий вращение в эвклидовом пространстве. Легко проверить, что оно прямо переходит во вращение на комплексный угол $-\mathrm{i}\theta$ после *викова поворота* $t=-\mathrm{i}\tau$ времени в комплексной плоскости.

Рассмотрим теперь динамику специальной теории относительности. Нас будет интересовать поведение частиц, полей и непрерывной жидкости в геометрии Минковского.

1. Свободная частица. Движение частицы описывается *мировой линией*, то есть линией $x^\bullet(t)=(t,\boldsymbol{r}(t))$, где $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ — закон движения частицы.[3] Свободная частица согласно первому закону Ньютона движется равномерно и прямолинейно. То есть, если имеются два события A и B, то мировая линия свободной частицы, в момент t_A находящейся в точке $\boldsymbol{r}_A=(x_A,y_A,z_A)$, а в момент t_B — в точке $\boldsymbol{r}_B=(x_B,y_B,z_B)$, будет отрезком $[AB]$. Такая линия минимизирует действие

$$S[x]=-m\int_A^B ds=-m\int_{t_A}^{t_B}dt\,\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}. \tag{1.8}$$

В нерелятивистском пределе $v\ll 1$ действие сводится к интегралу от кинетической энергии

$$S[x]\simeq -m\int_{t_A}^{t_B}dt\,\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right)=\text{const}+\int_{t_A}^{t_B}dt\,\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}. \tag{1.9}$$

Уравнение движения, отвечающее действию (1.8), очевидно, имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{v}}=0. \tag{1.10}$$

[3] Во избежание недоразумений мы иногда будем указывать «слепой» индекс у векторов и тензоров в виде жирной точки.

Тем не менее, полезно найти импульсы и гамильтониан системы:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}, \qquad H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{p} - L = \frac{m}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} = \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}. \tag{1.11}$$

Таким образом, в гамильтоновой форме уравнение движения имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{p}} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{E}, \qquad E = \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}. \tag{1.12}$$

Энергия E и импульс $\boldsymbol{p}$ образуют 4-импульс

$$p^\bullet = (E, \boldsymbol{p}) = mu^\bullet, \tag{1.13}$$

где u — 4-скорость

$$u^\bullet = \frac{dx^\bullet}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\right). \tag{1.14}$$

Величины

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \tag{1.15}$$

тоже сохраняются и дают пространственно-временной момент импульса. Его чисто пространственные компоненты[4] J^{ik} $(k = 1, \dots, 3)$ дают обычный момент импульса:

$$J_i = \epsilon_{ijk} J^{jk}, \tag{1.16}$$

где ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{123} = 1$. Временные компоненты J^{0i} не порождают независимых сохраняющихся величин.

2. Частица в электромагнитном поле. Электромагнитное поле описывается 4-потенциалом $A_\bullet = (\varphi, -\boldsymbol{A})$ или, более точно, 1-формой $A(x) = A_\mu(x)\,dx^\mu$. Движение частицы описывается действием

$$S[x] = \int_A^B (-m\,ds - eA) = \int_A^B (-m\,ds - eA_\mu\,dx^\mu) = \int_{t_A}^{t_B} dt\,\left(-m\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2} + e\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi\right). \tag{1.17}$$

Уравнение движения удобнее написать в гамильтоновой форме. Имеем для импульсов

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \tag{1.18}$$

и для гамильтониана

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P} - L = \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))^2} + e\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{1.19}$$

Уравнение движения

$$\dot{\boldsymbol{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}} \tag{1.20}$$

нетрудно привести к стандартному виду

$$\dot{\boldsymbol{p}} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\varphi, \qquad \boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{1.21}$$

В более инвариантном виде уравнение движения можно записать как

$$m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu{}_\nu u^\nu, \tag{1.22}$$

где тензор электромагнитного поля определяется как

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu = dA, \tag{1.23}$$

[4] Всюду греческие буквы из середины алфавита $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ будут использоваться для пространственно-временных индексов, пробегающих значения $0, 1, \dots, d-1$. Латинские буквы из середины алфавита $i, j, k, l, \dots$ будут использоваться для пространственных индексов и пробегать значения $1, \dots, d-1$.

или

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{1.24}$$

Этот тензор выражается через компоненты напряженности поля

$$F_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

Обратите внимание, что в левой части (1.22) дифференцирование выполняется по лоренц-инвариантному собственному времени.

3. Скалярные поля. Хотя формально взаимодействия в теории относительности, в принципе, можно описывать как дальнодействие (например, потенциалами Лиена́ра—Ви́херта), фактически гораздо удобнее (и продуктивнее) использовать поля. Давайте сначала рассмотрим самое простое поле — скалярное поле $\phi(x)$ с действием

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^{d-1}x\, \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - m^2\phi^2\right). \tag{1.26}$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi = 0 \tag{1.27}$$

называется *уравнением Клейна—Го́рдона*. Это простейшее волновое уравнение в физике. Легко построить его решения в виде плоских волн. Подставляя

$$\phi_k(x) = \operatorname{Re} e^{ikx+\alpha},$$

легко находим

$$k^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^0 = \pm\omega_{\boldsymbol{k}} \equiv \pm\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}. \tag{1.28}$$

Действие (1.26) допускает простые обобщения как на случай нелинейных уравнений (неквадратичного действия), так и на случай многокомпонентных полей. Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \ldots, N)$ — набор скалярных вещественных полей. Тогда мы можем рассматривать общее действие вида

$$S[\phi] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi). \tag{1.29}$$

Функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi)$ называется *плотностью лагранжиана*. Довольно широкий класс систем представляют системы с плотностью лагранжиана вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}G_{rs}(\phi)\,\partial_\mu\phi^r\,\partial_\nu\phi^s - U(\phi), \tag{1.30}$$

где $G_{ij}(\phi)$ — симметричная матрица.

Уравнение движение записывается через плотность лагранжиана в виде

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^r} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^r)} = 0. \tag{1.31}$$

Важным объектом является *тензор энергии-импульса*

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu\phi^r\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi^r)} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L} + \partial_\lambda f_\mu{}^{\nu\lambda}, \qquad T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}T_\mu{}^\nu. \tag{1.32}$$

Добавка $f_\mu{}^{\nu\lambda} = -f_\mu{}^{\lambda\nu}$ выбирается таким образом, чтобы тензор $T^{\mu\nu}$ был симметричен:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{1.33}$$

Симметрия необходима для того, чтобы можно было определить сохраняющийся момент импульса (см. ниже).

Тензор энергии-импульса является сохраняющимся током для 4-импульса P_μ системы. Это значит, что на решениях уравнения движения выполняется равенство

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{1.34}$$

а компоненты 4-импульса выражаются через тензор энергии-импульса как

$$P^\mu = \int d^{d-1}x\, T^{\mu 0}. \tag{1.35}$$

При интегрировании по всему пространству (или, точнее, по области пространства, где поле отлично от нуля) 4-импульс становится сохраняющейся величиной

$$\dot{P}^\mu = 0. \tag{1.36}$$

При этом энергия $E = P^0$, выраженная через конфигурации полей $\phi^r(\boldsymbol{r})$ в данный момент времени и обобщенные импульсы системы $\frac{\delta}{\delta\phi^i(\boldsymbol{r})}\int d^{d-1}x\,\mathcal{L}$, является гамильтонианом.

Другая сохраняющая величина, связанная с тензором энергии-импульса — это момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int d^{d-1}x\,(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}), \tag{1.37}$$

$$\dot{J}^{\mu\nu} = 0. \tag{1.38}$$

Рассмотрим по отдельности различные компоненты тензора энергии-импульса:

$$W = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ik} = -T^{ik} \quad (i,k = 1,\dots,d-1). \tag{1.39}$$

Величина W имеет смысл плотности энергии. Компоненты S^i образуют пространственный вектор $\boldsymbol{S}$ с двойным смыслом: плотности импульса и плотности потока энергии. Вообще говоря, эти две плотности могли бы не совпадать. Их совпадение связано с тем, что тензор энергии-импульса можно сделать симметричным. Величины σ^{ik} образуют пространственный тензор, который называется *тензором напряжений* и имеет смысл плотности потока импульса.

4. Электромагнитное поле. Действие электромагнитного поля (в системе Хевисайда) имеет вид

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\int F \wedge *F, \tag{1.40}$$

где $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$. Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_\mu{}^\nu = -F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} + \frac{\delta_\mu^\nu}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}. \tag{1.41}$$

В компонентах имеем

$$W = \frac{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2}{2}, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \qquad \sigma^{ij} = E_iE_j + H_iH_j - W\delta_{ij}. \tag{1.42}$$

Величина $\boldsymbol{S}$ в случае электромагнитного поля называется *вектором Пойнтинга*, а W и σ^{ij} — плотностью электромагнитной энергии, и электромагнитным тензором напряжений.

Действие (1.40) обладает *калибровочной инвариантностью*, то есть инвариантностью относительно преобразований

$$A' = A + d\chi, \tag{1.43}$$

где $\chi(x)$ — произвольное скалярное поле. Для того, чтобы калибровочная инвариантность сохранялась при взаимодействии с частицами и полями, соответствующие члены взаимодействия должно быть тоже калибровочно-инвариантны. Действие (1.17) изменяется при калибровочных преобразованиях так

$$S[x, A'] = S[x, A] - e(\chi(x_B) - \chi(x_A)).$$

Поскольку принцип наименьшего действия требует минимума действия при фиксированных x_A, x_B, это не влияет на уравнения движения.

В случае полей ситуация несколько сложнее. Для вещественного скалярного поля не существует обобщения действия (1.26), которое включало бы калибровочно-инвариантное взаимодействие с электромагнитным полем. Однако для комплексного поля $\phi(x)$ с действием вида

$$S[\phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \, \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \bar{\phi} - U(|\phi|^2)\right), \tag{1.44}$$

обладающего $U(1)$-симметрией

$$\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi(x),$$

такое обобщение легко найти. Это обобщение имеет вид

$$S[\phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \, \left(\eta^{\mu\nu} D_\mu \phi \, \overline{D_\nu \phi} - U(|\phi|^2)\right), \qquad D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu. \tag{1.45}$$

Операция D_μ называется *ковариантной производной*. Легко проверить, что при преобразовании

$$A'(x) = A(x) + \partial\chi(x), \qquad \phi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\chi(x)}\phi(x) \tag{1.46}$$

величина $D_\mu \phi$ не меняется и, следовательно, действие (1.45) калибровочно-инвариантно.

Задачи

1. Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия (1.8), то есть максимум собственного времени $s = \int_A^B ds$. Приведите примеры мировых линий, отвечающих *наименьшему* собственному времени. Чему равно это время?

2. В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu).$$

Покажите, что сохранение компонент J^{0i} эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_s E_s \boldsymbol{r}_s}{\sum_s E_s}$$

движется с постоянной скоростью.

3. Рассмотрите частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой $m(x)$ в действии (1.17). Напишите гамильтониан и уравнения движения такой частицы. Покажите, что если $m(x) = m_0 + U(x)$, $U(x) \ll m_0$, то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле $U(x)$.

4. Выведите уравнение (1.22).

5. Покажите, что из симметричности тензора энергии-импульса (1.33) следует сохранение момента импульса (1.38).

6. Получите преобразования Лоренца для компонент полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Семинар 1

Преобразования Лоренца, системы координат, метрика — разминка

На первом семинаре вы будете решать несложные задачи, которые позволят вам более наглядно представить себе базовые математические конструкции. Мы обсудим наглядно-геометрический смысл преобразований Лоренца, рассмотрим эвклидово пространство и пространство Минковского как многообразия, рассмотрим примеры систем координат и подмногообразий в этих пространствах.