Лекция 2

Геометрия псевдориманова пространства-времени

В специальной теории относительности мир представлял собой плоское (аффинное) пространство, и у нас не было принципиальной необходимости вводить криволинейные координаты на нем. Законы физики удобно было связывать с плоскими координатами, причем временна́я координата отвечала некоторой инерциальной системе отсчета, а пространственные координаты были произвольными координатами в одновременном слое. В общей теории относительности инерциальные системы отсчета никак не выделены. Более того, мир описывается как некоторое многообразие с (псевдоримановой) метрикой, и законы физики должны быть сформулированы так, чтобы их можно было записать в произвольных координатах. В этой лекции я вам вкратце напомню геометрические структуры, которые нам понадобятся.

Рассмотрим (четырехмерное) многообразие M. В этой лекции мы введем два фундаментальных объекта — аффинную связность и метрику. Нас будут интересовать только локальные свойства многообразия, поэтому мы ограничимся одной картой с координатами x^μ.

Прежде всего, напомним понятие касательного пространства. Рассмотрим пространство $C(M)$ гладких функций на M. Пусть $x_0 \in M$. Рассмотрим параметрическую кривые $x = \varphi(\tau)$, такие что $x_0 = \varphi(0)$. Тогда дифференцирование $\dot\varphi(0)$ вдоль кривой в точке $\tau = 0$ представляет собой оператор на $C(M)$:

$$\forall f \in C(M): \ \dot\varphi(0)f = \left.\frac{df(\varphi(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=\varphi(0)} \left.\frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}.$$

Легко понять, что совокупность всех операторов $\dot\varphi$, связанных со всеми возможными кривыми, проходящими через точку x, образуют векторное пространство. Действительно, для двух кривых φ и χ операторы $\dot\varphi(0)$ и $\dot\chi(0)$ совпадают, если $(\varphi^\mu)'(0) = (\chi^\mu)'(0)$, так что любой оператор $\dot\varphi(0)$ может быть однозначно записан в виде $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, где $a^\mu = (\varphi^\mu)'(0)$. С другой стороны, для любого оператора $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ можно найти такую кривую $\varphi(x)$, что это уравнение будет выполняться. Для любого набора чисел a^μ определим оператор $a = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Структура линейного пространства задается очевидным равенством

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a^\mu + \beta b^\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Легко проверить, что оно не зависит от выбора координат. Линейное пространство $TM_{x_0} = T^1M_{x_0}$ таких операторов называется *касательным пространством* к многообразию M в точке x_0. Совокупность касательных пространств со структурой многообразия на них образует *касательное расслоение* $TM = T^1M$. На языке расслоений векторные поля представляют собой гладкие сечения касательного расслоения. Пространство таких сечений мы будем обозначать $C(TM)$.

Векторы в касательном расслоении можно представлять себе как бесконечно-малые сдвиги. Действительно, пусть $a \in TM$, а $f \in C(M)$. В любой системе координат мы можем написать

$$f(x^\bullet + \varepsilon a^\bullet) = f(x) + \varepsilon a^\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2) = f(x) + \varepsilon a f(x) + O(\varepsilon^2).$$

Легко также ввести *кокасательное пространство* $T^*M_{x_0} = T_1M_{x_0}s$ как двойственное пространство, то есть пространство линейных форм на TM_{x_0}. Если у нас выбраны координаты x^μ, то с каждой координатой связана форма dx^μ, определенная уравнением

$$dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu_\nu,$$

то есть базис $\{dx^\mu\}$ представляет собой базис, двойственный к базису $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right\}$ в касательном пространстве. Совокупность кокасательных пространств образует *кокасательное расслоение* $T^*M = T_1M$, а 1-формы представляют собой гладкие сечения кокасательного расслоения, образующие пространство $C(T_1M)$. Более обще, тензорное произведение $T^m_nM_{x_0} = TM^{\otimes m}_{x_0} \otimes T^*M^{\otimes n}$ представляет собой пространство тензоров с m верхними индексами (у компонент) и n нижними в точке x_0. Соответствующие тензорные поля определяются как сечения расслоения T^m_nM.

Вместо символа $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ мы часто будем использовать символ ∂_μ. Оба этих символа мы будем применять как для обозначения базисного вектора в касательном пространстве (то есть оператора на пространстве функций на многообразии), так и для обозначения дифференцирования функции нескольких переменных (оператора на пространстве функций в $\mathbb{R}^d$, в том числе отвечающих функциям на многообразии в системе координат $\{x^\bullet\}$. Кроме того, для функции d переменных $f(x^\bullet) = f(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1})$ мы будем писать $f_{,\mu} = \partial_\mu f$.

Теперь возникает вопрос о том, как «склеить» слои касательного расслоения TM друг с другом. В аффинном пространстве все слои касательного расслоения естественным образом отождествляются. На произвольном многообразии это не так. Если мы проведем на многообразии некоторую незамкнутую и несамопересекающуюся кривую, можно отождествить (построить взаимно-однозначное отображение) касательные пространства в точках кривой каким-нибудь способом. Мы хотим, чтобы

- этот способ был локален, то есть правило было задано в каждой точке многообразия M и зависело только от направления $\dot\varphi(\tau)$, в котором кривая проходит через эту точку;
- этот способ уважал структуру линейного пространства на TM_x, то есть переводил линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию перенесенных векторов с теми же коэффициентами;
- этот способ был гладким, то есть компоненты «постоянного» вектора вдоль гладкой кривой являлись гладкими функциями параметра кривой, если он задан так, чтобы координаты были гладкими функциями параметра.

Предположим, мы хотим перенести вектор a из точки x_0 вдоль кривой $\varphi(\tau)$, $\varphi(0) = x_0$. Пусть $a(\tau)$ есть результат такого переноса. Иными словами, $a(\tau)$ есть постоянный по отношению к переносу вектор. Пусть также $b(\tau) = \dot\varphi(\tau)$. Мы хотим построить такой оператор ∇_b, что

$$\nabla_{b(\tau)} a(\tau) = 0. \tag{2.1}$$

Этот оператор мы будем называть *связностью* или *ковариантной производной*, а вектор $a(\tau)$ — *ковариантно-постоянным* вдоль кривой $\varphi(\tau)$. В силу условия локальности оператор может зависеть только от точки $x = \varphi(\tau)$, но не от самого параметра τ. В частности, это значит, что репараметризация $\tau = p(\lambda)$ не изменит этого условия. Направляющий вектор к этой кривой равен $p'(\lambda)b(p(\lambda))$. Отсюда следует, что условие $\nabla_{\alpha(\tau)b(\tau)} a(\tau) = 0$ должно выполняться для любой функции $\alpha(\tau)$. Очевидно, что для аффинного пространства за оператор ∇_b можно принять сам вектор b. Поэтому постулируем, что оператор ∇_b линеен по b. С другой стороны, потребуем, чтобы, как и оператор дифференцирования b, он удовлетворял правилу Лейбница по a. Более точно, наложим следующие условия:

$$\nabla_{fb} a = f \nabla_b a, \tag{2.2}$$
$$\nabla_b (fa) = (bf)a + f\nabla_b a \qquad (\forall f \in C(M),\ a, b \in C(TM)). \tag{2.3}$$

Последнее условие связывает параллельный перенос вектора с параллельным переносом скаляра и нормирует его. Первое условие означает, что существует оператор (*ковариантный дифференциал*) $\nabla : C(TM) \to C(T^1_1 M)$, такой что $\nabla_b a = b^{\mathbf{1}} \nabla_{\mathbf{1}} a = b^\mu \nabla_\mu a$. Иными словами, $\nabla = dx^\mu\, \partial_\mu$. Найдем общий вид оператора ∇ в координатах. Условие (2.3) переписывается в виде

$$\nabla(fa) = df\, a + f\nabla a \tag{2.3a}$$

или, в компонентах,

$$\nabla_\mu (fa) = \partial_\mu f\, a + f \nabla_\mu a. \tag{2.3b}$$

Применим эту формулу к $\nabla_\mu a = \nabla_\mu (a^\nu \partial_\nu)$, подставив вместо f компоненту a^ν, а вместо a базисный вектор ∂_ν:

$$\nabla_\mu (a^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu a^\nu)\partial_\nu + a^\nu \nabla_\mu \partial_\nu. \tag{2.4}$$

Левую часть разложим по базису

$$\nabla_\mu (a^\nu \partial_\nu) = (\nabla_\mu a)^\lambda \partial_\lambda, \tag{2.5}$$

В правой части (2.4) первый член уже разложен по базису, а для второго члена имеем

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda. \tag{2.6}$$

Коэффициенты разложения $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ называются *символами Кристоффеля.* Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получаем

$$(\nabla_\mu a)^\lambda = \partial_\mu a^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} a^\nu. \tag{2.7}$$

Набор символов Кристоффеля (как функций точки) однозначно задает связность на данном многообразии. Заметим, что для краткости часто пишут $\partial_\mu a^\lambda = a^\lambda{}_{,\mu}$, $(\nabla_\mu a)^\lambda = a^\lambda{}_{;\mu}$.

Говоря о существовании оператора ∇, я сделал небольшую подмену. Дело в том, что оператор ∇_b в (2.1) не требует, чтобы векторное поле a было определено в некоторой области пространства. Достаточно, чтобы оно было определено на кривой $\varphi(\tau)$. Поэтому следует оговориться, что условие (2.1) может быть определено через ковариантную производную ∇ для произвольного гладкого продолжения $a(\tau)$ на окрестность кривой. В силу того, что $\dot\varphi^\mu \partial_\mu = d/d\tau$, мы можем записать его в виде

$$\dot a^\lambda(\tau) + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\dot\varphi^\mu(\tau) a^\nu(\tau) = 0. \tag{2.8}$$

Связность может быть легко обобщена на общее тензорное расслоение $T^m_n M$. Действительно, для функций на многообразии ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_b f = bf, \qquad f \in C(M). \tag{2.9}$$

Тогда легко определить связность на кокасательном расслоении через правило Лейбница:

$$(\nabla_b \omega)(a) + \omega(\nabla_b a) = b\omega(a), \qquad \omega \in C(T^*M),\ a \in C(TM). \tag{2.10}$$

Явно получаем

$$(\nabla_\mu \omega)_\kappa = \partial_\mu \omega_\kappa - \Gamma^\nu_{\kappa\mu}\omega_\nu. \tag{2.11}$$

Наконец, для общего тензорного поля $t \in C(T^m_n M)$ ковариантная производная определяется через правило Лейбница для свертки $t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{m}}{}_{\mathbf{m+1},\ldots,\mathbf{m+n}}\omega^{(1)}_{\mathbf{1}}\cdots\omega^{(m)}_{\mathbf{m}} a^{\mathbf{m+1}}_{(1)}\cdots a^{\mathbf{m+n}}_{(n)}$ тензорного поля с m 1-формами $\omega^{(i)}$ и n векторами $a_{(j)}$. В координатном базисе ковариантная производная тензора t выглядит так

$$(\nabla_\mu t)^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} = \partial_\mu t^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} + \sum_{i=1}^m \Gamma^{\lambda_i}_{\nu_i\mu} t^{\lambda_1\ldots\nu_i\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} - \sum_{j=1}^n \Gamma^{\nu_j}_{\kappa_j\mu} t^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\nu_j\ldots\kappa_n}. \tag{2.12}$$

Теперь зададимся вопросом: как переносится касательный к кривой вектор? Вообще говоря, после переноса он перестает быть касательным. Кривые, для которых касательный к ней вектор является вдоль нее ковариантно-постоянным, называются *геодезическими.* Если мы дополнительно потребуем, чтобы семейство векторов $\dot\varphi(\tau)$ было бы постоянным на кривой (это означает специальную параметризацию кривой), то уравнение геодезической примет вид

$$\nabla_{\dot\varphi(\tau)}\dot\varphi(\tau) = 0. \tag{2.13}$$

В силу (2.8) в координатах это уравнение имеет вид

$$\ddot\varphi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot\varphi^\mu\dot\varphi^\nu = 0. \tag{2.14}$$

Геодезические будут играть большую роль. Как мы увидим ниже, они дают мировые линии частиц, свободно падающих в гравитационном поле. Рассмотренная здесь специальная параметризация геодезической отвечает тому, что параметр τ пропорционален собственному времени частицы.

Важно заметить, что символы Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ не являются компонентами какого-либо тензорного поля. Это легко понять хотя бы из того, что символы Кристоффеля естественной связности в аффинном пространстве тождественно равны нулю в плоских координатах и не равны нулю в криволинейных координатах, в то время как тензор не может обращаться или не обращаться в нуль в зависимости от базиса. Нетрудно показать, что при преобразовании координат $x^\mu = x^\mu(x'^\bullet)$ символы Кристоффеля преобразуются по закону

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}. \tag{2.15}$$

В то же время *разность* двух связностей является тензором. Пусть $\nabla, \tilde{\nabla}$ — две связности, а $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ — соответствующие символы Кристоффеля. Тогда, очевидно, разности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ преобразуются как компоненты тензора. По-другому: из определения (2.2), (2.3) немедленно следует, что

$$(\nabla_{fb} - \tilde{\nabla}_{fb})a = f(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b)a,$$
$$(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b)(fa) = f(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b)a,$$

то есть разность связностей в точке x является линейным отображением $TM_x \otimes TM_x \to TM_x$, то есть тензором из $T^1_2 M$.

Возникает вопрос, а нельзя ли подходящей заменой координат вообще обратить символы Кристоффеля в нуль на всем многообразии? Вообще говоря, нет. Чтобы убедиться в этом, нужно ввести тензорную величину, которая выражалась бы через связность и равнялась нулю для нулевых символов Кристоффеля. Если эта величина не равна нулю, невозможно обратить символы Кристоффеля в нуль заменой координат. Такой величиной является риманова кривизна. Верна и обратная теорема: если риманова кривизна равна нулю, существует такая система координат (плоские координаты), в которой символы Кристоффеля равны нулю. Разумеется, эта теорема верна локально. Можно придумать плоское многообразие с нетривиальной топологией, на котором невозможно обратить символы Кристоффеля в нуль на всех картах одновременно таким образом, чтобы функции переклейки были линейны.

Чтобы ввести риманову кривизну, рассмотрим параллельный перенос вдоль замкнутого контура $\varphi(\tau)$, $\varphi(1) = \varphi(0)$. Если $a(\tau)$ — постоянный вдоль контура вектор, то, тем не менее, нет никакой гарантии, что $a(1)$ окажется равным $a(0)$. Будем в координатах решать уравнение (2.8) на маленькой петле размера порядка ε во втором порядке по ε. При этом важно понимать, что символы Кристоффеля и компоненты вектора $a(\tau)$ меняются вдоль петли медленно, в то время как компоненты вектора $\dot{\varphi}(\tau)$ малы, но меняются быстро. Будем решать уравнение (2.8) итерациями, получая результат в виде суммы

$$a^\lambda(\tau) = a^\lambda_0(\tau) + a^\lambda_1(\tau) + a^\lambda_2(\tau) + O(\varepsilon^3).$$

В нулевом порядке $a^\lambda_0(\tau) = a^\lambda$. В первой итерации имеем:

$$\begin{aligned} a^\lambda_1(\tau) &= -\int_0^\tau d\tau_1\, \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\bullet + \delta\varphi^\bullet(\tau_1))\dot{\varphi}^\mu(\tau_1)a^\nu \\ &= -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\varphi^\mu(\tau)a^\nu - \partial_\kappa\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\int_0^\tau d\tau_1\, \delta\varphi^\kappa(\tau_1)\dot{\varphi}^\mu(\tau_1)a^\nu, \end{aligned}$$

где $\delta\varphi^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau) - \varphi^\mu(0) = \varphi^\mu(\tau) - x^\mu$, $\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x)$. Правая часть содержит как член первого порядка по ε, так и член второго порядка. Вторые производные от символов Кристоффеля дадут уже члены третьего порядка, которыми мы пренебрегаем. Во второй итерации имеем

$$\begin{aligned} a^\lambda_2(\tau) &= -a^\lambda_1(\tau) - \int_0^\tau d\tau_1\, \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\bullet + \varphi^\bullet(\tau_1))\dot{\varphi}^\mu(\tau_1)(a^\nu + a^\nu_1(\tau_1)) \\ &= -\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\int_0^\tau d\tau_1\, \dot{\varphi}^\mu(\tau_1)a^\nu_1(\tau_1) \\ &= -\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\Gamma^\nu_{\kappa\rho}\int_0^\tau d\tau_1\, \dot{\varphi}^\mu(\tau_1)\, \delta\varphi^\kappa(\tau_1)a^\rho. \end{aligned}$$

Мы опять опустили члены порядка $O(\varepsilon^3)$. Собирая вместе, получаем

$$\delta a^\lambda \equiv a^\lambda(1) - a^\lambda(0) = a^\lambda_1(1) + a^\lambda_2(1) = -(\partial_\kappa\Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\kappa})a^\nu f^{\kappa\mu}, \tag{2.16}$$

где

$$f^{\kappa\mu} = \int_0^1 d\tau\, \delta\phi^\kappa(\tau)\dot{\phi}^\mu(\tau) = \int_0^1 d\tau\, \delta\phi^\kappa(\tau)\delta\dot{\phi}^\mu(\tau).$$

Легко убедиться, что тензор $f^{\kappa\mu}$ антисимметричен. Действительно,

$$f^{\kappa\mu} + f^{\mu\kappa} = \int_0^1 d\tau\, (\delta\varphi^\kappa\delta\dot{\varphi}^\mu + \delta\dot{\varphi}^\kappa\delta\varphi^\mu) = \int_0^1 d\tau\, \frac{d}{d\tau}(\delta\varphi^\kappa\delta\varphi^\mu) = 0,$$

так как $\delta\varphi^\mu(1) = \delta\varphi^\mu(0) = 0$. Отсюда заключаем, что

$$f^{\kappa\mu} = \frac{1}{2}\int d\tau\,(\delta\varphi^\kappa\delta\dot\varphi^\mu - \delta\dot\varphi^\kappa\delta\varphi^\mu). \tag{2.17}$$

Если мы выберем контур в виде «параллелограмма» на карте со сторонами εb^μ и εc^μ, то нетрудно проверить, что

$$f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2(b^\kappa c^\mu - b^\mu c^\kappa), \tag{2.18}$$

что представляет собой элемент площади «параллелограмма». Антисимметризованное выражение в скобках в (2.16) представляет собой *тензор кривизны Римана* $R \in C(T^1_3 M)$:

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}. \tag{2.19}$$

С его помощью выражение (2.16) может быть записано как

$$\delta a^\kappa = -\frac{1}{2}R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}a^\lambda f^{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

В случае бесконечно малого контура площадка $f^{\mu\nu}$ превращается в форму $dx^\mu\wedge dx^\nu$. В случае конечного контура мы можем натянуть на него поверхность и разбить ее на маленькие площадки, а весь контур разбить в сумму маленьких контуров, окружающих эти площадки. Внутренние участки контуров при таком суммировании сократятся. Доопределим любым гладким способом векторное поле a так, чтобы оно было определено на поверхности, натянутой на контур. Тогда имеем

$$\Delta a^\kappa = -\frac{1}{2}\int dx^\mu\wedge dx^\nu\, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}a^\lambda. \tag{2.21}$$

Мы видим, что тензор R можно рассматривать как форму по двум последним индексам и оператор на TM_x по двум первым:

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{2}} = \frac{1}{2}R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{2}\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu. \tag{2.22}$$

Формулу (2.22) можно переписать в безындексном виде

$$\Delta a = -\int Ra. \tag{2.23}$$

Определение (2.19) имеет один недостаток: это определение дано в координатном базисе. Используя закон преобразования символов Кристоффеля (2.15), можно показать, что это выражение действительно определяет тензор. Хотелось бы иметь какое-нибудь безындексное определение, не зависящее от базиса или системы координат. Будем обозначать через $R(a,b)$ оператор на TM_x, получаемый как действие формы кривизны на пару векторов. Тогда тензор кривизны можно записать прямо через ковариантную производную:

$$R(b,c)a = [\nabla_b,\nabla_c]a - \nabla_{[b,c]}a. \tag{2.24}$$

Квадратные скобки здесь обозначают коммутатор соответствующих операторов (векторные поля тоже понимаются как операторы). Операторы в правой части действуют на векторные поля a, b, c, однако замечательное свойство этого выражения состоит в том, что действие операторов сокращается, так что результат зависит только от векторов в точке x.

До сих пор мы вводили аффинную связность чисто аксиоматически. В общей теории относительности используется возникает связность специального вида: связность, определяемая метрикой, или связность Ле́ви—Чиви́ты. Во-первых, введем метрику на многообразии M. Многообразие M называется *псевдоримановым многообразием*, если на нем задана симметричная невырожденная форма $g \in C(T_2 M)$, $g(a,b) = g(b,a)$. Такая форма называется *метрикой*. В силу непрерывности и невырожденности сигнатура метрики на псевдоримановом многообразии постоянна. В дальнейшем мы будем рассматривать многообразия с метрикой, которая может вырождаться на подмногообразиях меньшей размерности, однако в интересующих нас случаях такое вырождение будет иметь место только на границах многообразия. В рамках ОТО нас будут интересовать многообразия с сигнатурой $(1,3)$ (или иногда $(1,d-1)$).

Связность ∇ называется *согласованной с метрикой*, если она ковариантно-постоянна:

$$\nabla_c g = 0 \ (\forall c \in C(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.25}$$

Связность ∇ называется *связностью без кручения*, если она удовлетворяет условию

$$\nabla_a b - \nabla_b a - [a, b] = 0 \ (\forall a, b \in C(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \tag{2.26}$$

Имеется единственная связность без кручения, согласованная с метрикой. Такая связность называется *связностью Леви—Чивиты.* Явно символы Кристоффеля для связности Леви—Чивиты записываются как

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \tag{2.27}$$

На римановом многообразии мы можем использовать метрический тензор g и обратный к нему тензор g^* (точнее, соответствующие отображения $\overline{g}, \overline{g}^*$) чтобы опускать и поднимать индексы. Например, мы можем описывать кривизну тензором с четырьмя нижними индексами

$$R_{\mathbf{1234}} = g_{\mathbf{11'}} R^{\mathbf{1'}}{}_{234}. \tag{2.28}$$

Введем еще три важных объекта, связанных с тензором кривизны. Во-первых, свертка тензора Римана по первому и третьему индексам дает *тензор Риччи*:

$$R_{\mathbf{12}} = R^{\mathbf{3}}{}_{\mathbf{132}}. \tag{2.29}$$

Во-вторых, на римановом многообразии тензор Риччи можно свернуть по оставшимся индексам с помощью обратного метрического тензора. В результате получается *скаляр Риччи*:

$$R = R(g^*) = R_{\mathbf{12}} g^{\mathbf{12}}. \tag{2.30}$$

Наконец, *тензор Вейля*

$$W_{\mathbf{1234}} = R_{\mathbf{1234}} - \frac{2}{d-2}(g_{\mathbf{1}[\mathbf{3}} R_{\mathbf{4}]\mathbf{2}} - g_{\mathbf{2}[\mathbf{3}} R_{\mathbf{4}]\mathbf{1}}) + \frac{2}{(d-1)(d-2)} R g_{\mathbf{1}[\mathbf{3}} g_{\mathbf{4}]\mathbf{2}} \tag{2.31}$$

представляет собой такую комбинацию тензора Римана, тензора Риччи и скаляра Риччи, которая просто преобразуется при *преобразовании Вейля* $g(x) = \Omega(x) g'(x)$:

$$W_{\mathbf{1234}}(x) = \Omega(x) W'_{\mathbf{1234}}(x) \tag{2.32}$$

При $d \leq 3$ тензор Вейля тождественно обращается в нуль и потому тензор Римана однозначно определяется тензором Риччи. При $d = 2$ тензор Римана полностью определяется скаляром Риччи:

$$R_{\mathbf{1234}} = \frac{R}{2}(g_{\mathbf{13}} g_{\mathbf{24}} - g_{\mathbf{14}} g_{\mathbf{23}}), \tag{2.33}$$

причем величина $R/2$ совпадает с гауссовской кривизной.

Перечислим основные свойства тензора кривизны. Во-первых, это чисто алгебраические свойства симметрии:

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{234}} = -R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{243}}, \qquad R^{\mathbf{1}}{}_{234} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{342}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{423}} = 0. \tag{2.34}$$

В случае связности Леви—Чивиты добавляется еще одно свойство:

$$R_{\mathbf{1234}} = R_{\mathbf{3412}}. \tag{2.35}$$

Во-вторых, это тождество Бья́нки:

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{234;5}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{245;3}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{253;4}} = 0. \tag{2.36}$$

Задачи

1. Рассмотрим две системы координат $\{x^\bullet\}$ и $\{x'^\bullet = f^\bullet(x^\bullet)\}$ в некоторой области многообразия M. Пусть $a = a^\mu \partial_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \in TM_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент вектора

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu.$$

Частные производные здесь понимаются в следующем смысле: $\partial_\nu x'^\mu = f^\mu{}_{,\nu}(x^\bullet)|_{x^\bullet = x_0^\bullet}$.
Пусть теперь $\omega = \omega_\mu \, dx^\mu = \omega'_\mu \, dx'^\mu \in T^* M_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент формы

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu.$$

Частные производные здесь понимаются в смысле $\partial'_\mu x^\nu = (f^{-1})^\nu{}_{,\mu}(f^\bullet(x^\bullet))|_{x^\bullet = x_0^\bullet}$. Наконец, напишите закон преобразования компонент произвольного тензора $a \in T^m_n M_{x_0}$.

2. Выведите закон преобразования символов Кристоффеля (2.15).

3. Выведите (2.18) и покажите, что тензор $f^{\mu\nu}$ определяет площадь этого параллелограмма.

4. Получите (2.19) из (2.24). Покажите, что риманов тензор кривизны действительно является тензором.

5. Проверьте эквивалентность определений в (2.26).

6. Получите символы Кристоффеля для связности Леви—Чивиты (2.27).

Семинар 2

Связность, метрика, кривизна — примеры

Геометрические понятия, рассмотренные на лекции, будут рассмотрены на конкретных примерах.

1. Связность и метрика в аффинном пространстве в криволинейных координатах.

2. Индуцированная метрика, согласованная с ней связность и кривизна в подпространствах.

3. Пространства постоянной кривизны.