Лекция 8

Излучение гравитационных волн

Мы убедились в том, что гравитационные волны являются свободными решениями уравнений гравитационного поля. Теперь нас будут интересовать гравитационные волны как вынужденные решения. Мы рассмотрим частицу, совершающую движение с небольшой скоростью в конечном объеме и найдем «вынужденное» решения уравнения (6.12). Мы увидим, что создаваемое частицей на больших расстояниях гравитационное поле описывается гравитационными волнами. Мы будем решать эту задачу в размерности $d = 4$ по двум причинам. Во-первых, потому что эта задача физически осмысленна и интересна. Во-вторых, потому что интересующее нас *запаздывающее* решение особенно просто в четырехмерном случае: оно зависит только от значения тензора энергии-импульса в момент времени, упреждающий момент наблюдения на промежуток времени, за который волна проходит от источника до точки наблюдения.

Итак, решение уравнения (6.12) называется запаздывающим, если оно удовлетворяет следующему условию. Возьмем две функции $T_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$ и $T'_{\mu\nu}$, такие, что $T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$ для всех $\boldsymbol{r}$ при $t < t_0$, тогда соответствующие запаздывающие решения $\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$ и $\psi'_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$ тоже совпадают при $t < t_0$. Более того, если $T_{\mu\nu}$ и $T'_{\mu\nu}$ различаются в какой-то маленькой области пространства-времени то и решения различаются только внутри светового конуса будущего (включая сам световой конус) этой области. Можно сказать по-другому: решение (8.5) причинно-зависимо от тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$.

В случае произвольной размерности решение можно записать в виде

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) = -16\pi G \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{d-1}x' \, G^R(t - t', |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) T_{\mu\nu}(t', \boldsymbol{r}'), \tag{8.1}$$

где *запаздывающая функция Грина* $G^R(t, \boldsymbol{r})$ представляет собой решение уравнения

$$\Box \, G^R(t, \boldsymbol{r}) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{r}) \tag{8.2}$$

с начальным условием

$$G^R(t, \boldsymbol{r}) = 0 \text{ при } t < r. \tag{8.3}$$

Особенность четырехмерного пространства-времени состоит в том, что запаздывающая функция Грина оператора Даламбера дельта-функциональна и имеет носитель на световом конусе:

$$G^R(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r} \times \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

В результате запаздывающее решение упрощается

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) = -4G \int d^3x' \, \frac{T_{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{8.5}$$

Важный факт состоит в том, что если материя сосредоточена в конечной области (то есть тензор энергии-импульса отличен от нуля в конечной области) пространства, то вне этой области решение неотличимо от гравитационной волны. Более того, достаточно далеко от гравитирующей материи гравитационная волна неотличима в небольшой области пространства неотличима от плоской волны. То есть мы можем говорить об излучении гравитационных волн материей.

С уравнением (6.12) связана одна тонкость, на которую мы пока не обращали внимания. Если мы поднимем индекс μ и продифференцируем уравнение по x^μ, мы получим условие

$$T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \tag{8.6}$$

что есть уравнение сохранения энергии-импульса. Оно отличается от точного условия ковариантного сохранения $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ членами второго и более высоких порядков. Но излучение гравитационных волн должно приводить к тому, что материя теряет энергию. Как мы выяснили на прошлой лекции, энергия гравитационной волны является величиной второго порядка малости, а закон сохранения (8.6) верен лишь в первом порядке, в котором мы и будем его использовать.

Замечание. В некоторых задачах поле вблизи источника может быть не мало, в то время как нас интересует волна на больших расстояниях, в области слабого поля. В этом случае рассуждения этой лекции применимы, если мы заменим компоненты тензора энергии-импульса на величины

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{8\pi}\left(\tilde{R}^{\mu}_{\nu} - \frac{\delta^{\mu}_{\nu}}{2}\tilde{R}\right), \tag{8.7}$$

где $\tilde{R}^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - R^{(1)}{}^{\bar{\mu}}_{\nu}$. Здесь $R^{(1)}_{\mu\nu}$ — линеаризованный тензор Риччи, определенный в (6.4). Нетрудно проверить, что, в силу свойств $R^{(1)}_{\mu\nu}$, символ $\tilde{T}_{\bar{\mu}\nu}$ симметричен и формально выполняется закон сохранения $\tilde{T}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0$. Разумеется, в этом случае задача не решается так прямо, но прием, выражающий ответ через одну компоненту $\tilde{T}_{\bar{0}0}$ во многих случаях работает.

Мы рассмотрим простейший случай нерелятивистской материи, сосредоточенной в течение всего времени вблизи начала координат $\boldsymbol{r} = 0$. Применим сначала условие того, что мы наблюдаем гравитационное поле $\psi_{\mu\nu}(X) = \psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{R})$ на большом расстоянии R от источника: $R \gg r_{\text{мат}}$, где $r_{\text{мат}}$ — характерный размер области, где находится материя. За пределами этой области мы будем считать $T_{\mu\nu} = 0$. При этом условии решение упрощается, поскольку знаменатель $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}'| \simeq R$ можно считать постоянным. Для запаздывания это будет слишком грубым приближением, поэтому положим там $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}'| \simeq r - \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'$, где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{R}/R$. Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, \boldsymbol{n})}{R}, \qquad M_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{n}) = \int d^3x\, T_{\mu\nu}(t + \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}). \tag{8.8}$$

(Для упрощения обозначений мы убрали штрихи у $\boldsymbol{r}'$.) Величины $M_{\mu\nu}$ не образуют тензора даже по отношению к преобразованиям Лоренца. Чтобы легче было изучать их свойства, положим $X^2 = X^3 = 0$, $X^1 = R > 0$. Единичный вектор $\boldsymbol{n}$ будем опускать. Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) = \int d^3x\, T_{\mu\nu}(t + x^1, \boldsymbol{r}). \tag{8.9}$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (8.6). С учетом запаздывания имеем

$$\begin{aligned} T_{0i,0}(t + x^1, \boldsymbol{r}) &= T_{li,l}(t + x^1, \boldsymbol{r}) = \partial_l T_{li}(t + x^1, \boldsymbol{r}) - \dot{T}_{1i}(t + x^1, \boldsymbol{r}), \\ T_{00,0}(t + x^1, \boldsymbol{r}) &= T_{l0,l}(t + x^1, \boldsymbol{r}) = \partial_l T_{l0}(t + x^1, \boldsymbol{r}) - \dot{T}_{10}(t + x^1, \boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{8.10}$$

В правой части частная производная берется по переменной x^l от всего выражения, включая первый аргумент тензора энергии-импульса. Отсюда немедленно получаем, что величины

$$M_{-\nu}(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t) \tag{8.11}$$

сохраняются. В самом деле,

$$\dot{M}_{-\nu} = \int d^3x\, (T_{0\nu,0}(t + x^1, \boldsymbol{r}) + T_{1\nu,0}(t + x^1, \boldsymbol{r})) = \int d^3x\, \partial_l T_{l\nu}(t + x^1, \boldsymbol{r}) = 0, \tag{8.12}$$

так как последний интеграл сводится к интегралу по удаленной границе, где по условию тензор энергии-импульса обращается в нуль. Легко видеть, что $M_{-\nu}$ есть не что иное как 4-импульс P_ν. Следовательно,

$$M_{-0} = \int d^3x\, \rho(t, \boldsymbol{r}) = M, \qquad M_{-i} = 0, \tag{8.13}$$

где M — полная масса гравитирующих тел. Второе равенство следует из того, что скорость центра масс системы равна нулю. Из (8.13) немедленно следует, что

$$\psi_{0\nu}(R\partial_1) + \psi_{1\nu}(R\partial_1) = -\frac{4GM}{R}\eta_{0\nu}. \tag{8.14}$$

Этот результат соответствует условию (7.7), которое должно выполняться в гравитационной волне в принятой нами калибровке (6.10). Нас может смутить ненулевая правая часть при $\nu = 0$, которую нельзя устранить калибровкой. Однако этот вклад отвечает постоянному во времени продольному полю, создаваемому массой. Это поле следует вычесть из $\psi_{\mu\nu}$, чтобы получить чистое поле гравитационной волны.

Теперь нам нужно найти пространственные поперечные компоненты $M_{ab}(t)$ которые дадут нам физический, не устранимый калибровочным преобразованием, вклад в потенциалы $\psi_{\mu\nu}$. Чтобы сделать это, снова воспользуемся условиями (8.10).

Обозначим $T_{-\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}$. Умножив первое уравнение в (8.10) на x^k, получим

$$\partial_0 \int d^3x\, T_{-i}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^k = \int d^3x\, (\partial_l T_{li}(t+x^1,\boldsymbol{r}))x^k = \int d^3x\, \partial_l (T_{li}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^k) - M_{ik}.$$

Первый член в правой части представляет собой интеграл по удаленной границе, где $T_{li}=0$, и мы его опустим. Симметризуя по индексам i,k, получаем

$$M_{ik} = -\frac{1}{2}\,\partial_0 \int d^3x\, (T_{-i}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^k + T_{-k}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i). \tag{8.15}$$

Теперь умножим второе уравнение (8.10) на $x^i x^k$ и проинтегрируем по всему пространству

$$\partial_0 \int d^3x\, T_{-0}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i x^k = \int d^3x\, \partial_l (T_{-l}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i x^k) - \int d^3x\, (T_{-i}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^k + T_{-k}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i).$$

Опять первый интеграл обращается в нуль, а второй интеграл совпадает интегралом в правой части (8.15). Отсюда получаем

$$M_{ik}(t) = \frac{1}{2}\,\partial_0^2 \int d^3x\, T_{-0}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i x^k. \tag{8.16}$$

В прошлой лекции мы выяснили, что малой (порядка $h_{\mu\nu}$) заменой координат можно сделать гравитационную волну поперечной $h_{1i}=0$ и бесследовой ($\psi_{\bar{a}}^{\bar{a}} = h_{\bar{a}}^{\bar{a}} = 0$). Но нам даже нет необходимости делать такую замену координат. Мы уже видели, что компоненты $h_{23}=\psi_{23}$ и $h_{22}-h_{33}=\psi_{22}-\psi_{33}$ являются калибровочно-инвариантными по отношению к преобразованиям, не нарушающим калибровку (6.10). Мы получаем

$$h_+(t,\boldsymbol{R}) = -4G\frac{M_+(t-R,\boldsymbol{n})}{R}, \qquad h_\times(t,\boldsymbol{R}) = -4G\frac{M_\times(t-R,\boldsymbol{n})}{R}, \tag{8.17}$$

где, если выбрать координаты так, чтобы было $\boldsymbol{n}=\partial_1$, имеем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \frac{1}{4}\,\partial_0^2 \int d^3x\, T_{-0}(t+x^1,\boldsymbol{r})((x^2)^2-(x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \frac{1}{2}\,\partial_0^2 \int d^3x\, T_{-0}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^2x^3. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Разумеется, ортогональные координаты x^2, x^3 при этом выбираются произвольно.

Теперь используем предположение о нерелятивистском характере движения гравитирующих тел. Это условие предполагает, что размеры системы настолько малы, что за то время, пока свет пересечет всю систему, положения частиц существенно не изменятся: $vr_{\text{мат}} \ll l$, $ar_{\text{мат}} \ll v$, где v, a — характерная скорость и ускорение частиц, l — характерное расстояние между телами. В этом предположении мы можем опустить x^1 в аргументе $t+x^1$ в (8.18) и заменить там T_{-0} на T_{00}, поскольку $|T_{00}| \gg |T_{10}|$. Казалось бы, мы могли бы сделать это в самом начале, в (8.8). На самом деле это не так. Дело в том, что тогда бы мы явно нарушили условие калибровки (6.10). Эти приближения мы можем сделать только в окончательных выражениях для калибровочно-инвариантных величин.

Итак, в нерелятивистском случае имеем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \frac{1}{4}\,\partial_0^2 \int d^3x\, \rho(t,\boldsymbol{r})((x^2)^2-(x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \frac{1}{2}\,\partial_0^2 \int d^3x\, \rho(t,\boldsymbol{r})x^2x^3. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Удобно выразить их через *квадрупольный момент* плотности энергии

$$D_{ik}(t) = \int d^3x\, \rho(\boldsymbol{r})(3x^i x^k - r^2\delta_{ik}). \tag{8.20}$$

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю: $\sum_{i=1}^3 D_{ii} = 0$. Имеем

$$h_+(t, R\partial_1) = -\frac{G}{3R}(\ddot{D}_{22}(t-R) - \ddot{D}_{33}(t-R)), \qquad h_\times(t, R\partial_1) = -\frac{2G}{3R}\ddot{D}_{23}(t-R). \tag{8.21}$$

Теперь найдем плотность потока энергии в волне. Эта плотность равна компоненте t^{01} псевдотензора энергии-импульса. На большом расстоянии от источника мы можем воспользоваться формулой для плоской волны (7.37). Подставляя туда (8.21), находим

$$t^{01}(t+R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2(t)\right). \tag{8.22}$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить поток энергии $dI(t, \boldsymbol{n})$ в элемент телесного угла $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и, в конечном счете, потери энергии $-d\mathcal{E}/dt$ системой. Для элемента телесного угла в направлении x^1 имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t+R, R\partial_3)R^2\, do = \frac{G}{36\pi}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2(t)\right) do. \tag{8.23}$$

Мы специально «откатили» dI на R назад во времени, поскольку она должна характеризовать потери энергии системы именно в момент времени t и не зависеть от точки наблюдения.

Обратим внимание, что формула (8.23) имеет вид суммы по двум поляризациям гравитационной волны. Перепишем ее в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^2 (\dddot{D}_{ik} e_{ik}^{(s)})^2\, do, \tag{8.24}$$

где два трехмерных тензора поляризации имеют вид

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.25}$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям бесследовости, симметричности, поперечности и ортонормированности

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \qquad e_{ik}^{(s)} = e_{ki}^{(s)}, \qquad e_{ik}^{(s)} n_k = 0, \qquad e_{ik}^{(s)} e_{ik}^{(s')} = \delta^{ss'}. \tag{8.26}$$

Нетрудно показать, что формула (8.24) верна для *любой* пары тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Теперь мы можем повернуть систему координат любым способом и написать

$$dI(t, \boldsymbol{n}) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^2 (\dddot{D}_{ik} e_{ik}^{(s)})^2\, do = \frac{G}{72\pi}\dddot{D}_{ik}\dddot{D}_{lm} E_{iklm}(\boldsymbol{n})\, do, \qquad E_{iklm}(\boldsymbol{n}) = \sum_{s=1}^2 e_{ik}^{(s)} e_{lm}^{(s)}. \tag{8.27}$$

для произвольного $\boldsymbol{n}$. Нам осталось найти явно тензор $E_{iklm}(\boldsymbol{n})$. Для этого воспользуемся его свойствами:

$$E_{iilm} = 0, \qquad E_{iklm} = E_{kilm} = E_{lmik}, \qquad E_{iklm} n_i = 0,$$
$$E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}.$$

Из второго свойства запишем E_{iklm} в виде

$$\begin{aligned} E_{iklm} &= E_1 n_i n_k n_l n_m + E_2(n_i n_k \delta_{lm} + n_l n_m \delta_{ik}) \\ &\quad + E_3(n_i n_l \delta_{km} + n_k n_l \delta_{im} + n_i n_m \delta_{kl} + n_k n_m \delta_{il}) + E_4 \delta_{ik}\delta_{lm} + E_5(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}). \end{aligned} \tag{8.28}$$

Коэффициенты $E_1, \ldots, E_5$ находим из остальных условий:

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}. \tag{8.29}$$

Подставляя (8.28), (8.29) в (8.27), получаем

$$dI(\boldsymbol{n}) = \frac{G}{36\pi} \left(\frac{1}{4} (\dddot{D}_{ik} n_i n_k)^2 + \frac{1}{2} \dddot{D}_{ik}^2 - \dddot{D}_{ik} \dddot{D}_{il} n_k n_l \right) do. \tag{8.30}$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45} \dddot{D}_{ik}^2. \tag{8.31}$$

Эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для тесных двойных звездных систем. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором было первым подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии.

Задачи

1. Используя результат (8.5) (или (8.4)), найдите запаздывающие решения неоднородного уравнения Клейна—Гордона

$$\Box \psi = T(x)$$

в случаях $d = 3$ и $d = 2$.

2. Покажите, что потенциалы (8.8) удовлетворяют калибровочному условию (6.10).

3. Покажите, что $M_{-\nu} = P_\nu$.

4. Покажите, что для любой пары 3-тензоров $e_{ik}^{(1)}, e_{ik}^{(2)}$, удовлетворяющих условиям (8.26), верна формула (8.24).

5. Выведите (8.29).

6. Проинтегрируйте (8.30) по углам и получите (8.31).

7. Две частицы массами m_1 и m_2 вращаются друг вокруг друга с нерелятивистскими скоростями друг вокруг друга по круговой орбите радиуса r. Найдите потери энергии системой на гравитационное излучение и приближенную зависимость $r(t)$ в предположении, что взаимодействие частиц можно считать ньютоновским.

Семинар 8

Взаимодействие гравитационных волн с материей. Примеры

Мы рассмотрим несколько случаев излучения и поглощение гравитационных волн «равномерно распределенной» материей:

1) взаимодействие гравитационных волн с однородной упругой или вязкой средой;

2) генерация гравитационной волны электромагнитной в поперечном магнитном поле.