

## Лекция 11

### Движение в относительно слабом гравитационном поле и экспериментальная проверка ОТО

На этой лекции мы разберем два примера, соответствующих двум первым экспериментальным проверкам ОТО. Это вековое смещение перигелия орбиты частицы и отклонение света в поле гравитирующих тел.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто еще 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье, который обработал результаты 40-летних наблюдений Парижской обсерватории, учел влияние других планет, и обнаружил, что смещение перигелия отличается от предсказываемого ньютоновской теорией примерно на  $38''$  за столетие. Позднее, в 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ( $43''$  за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса. Предпринимались многочисленные попытки объяснить эти аномалии. Было высказано предположение, что внутри орбиты Меркурия имеются орбиты какого-то еще тела («Вулкан») или нескольких тел («Вулканоиды»). Однако поиски таких тел не принесли результата. К концу XIX века возможность существования таких тел достаточной массы, чтобы сказаться на орбите Меркурия, была исключена. Так же была исключена возможность существования достаточно массивных газовых или пылевых облаков. Было предложено несколько модификаций ньютоновской гравитации, как с потенциальным, так и с непотенциальным (зависящим от скорости) взаимодействием. Однако такие теории при значениях параметров, которые могли бы объяснить аномалию, противоречили известным фактам о движении планет и Луны. В результате, аномалия не нашла удовлетворительного объяснения до создания общей теории относительности. Правильное значение смещения было вычислено Эйнштейном на основе ОТО в конце 1915 года, причем ответ не содержал никаких подгоночных параметров.

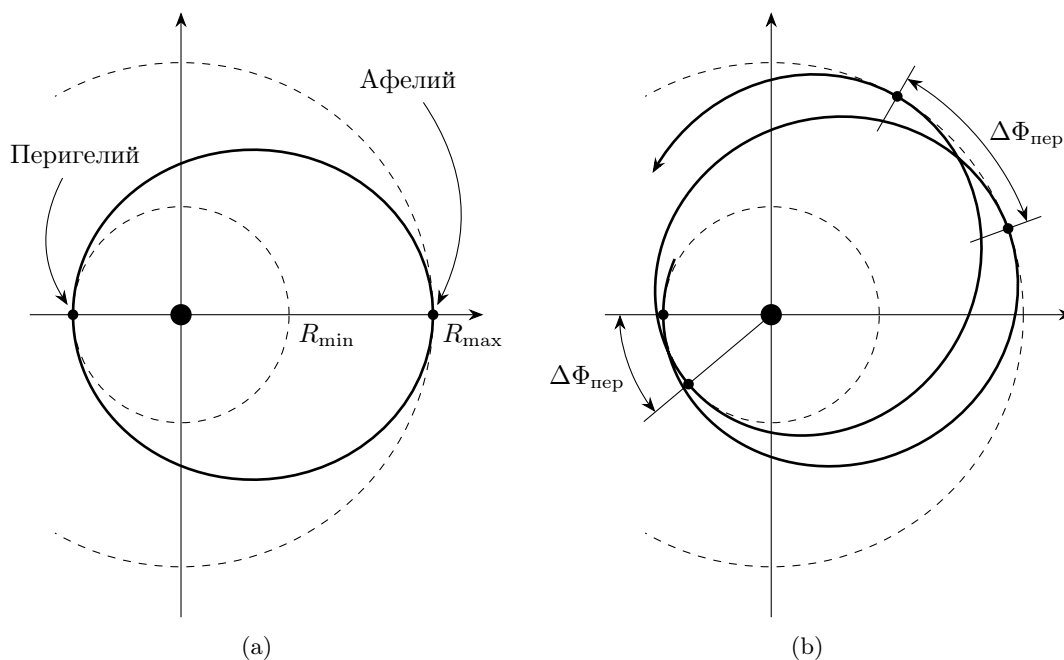


Рис. 11.1. Орбитальное движение частицы в гравитационном поле: (а) ньютоновское поле; (б) с учетом общерелятивистских поправок.

Отклонение луча света гравитационным полем (*гравитационное линзирование*) было предсказано Эйнштейном в 1916 году и открыто двумя британскими экспедициями под руководством Артура Эддингтона в 1919 году.

Начнем с изучения орбиты нерелятивистской в слабом гравитационном поле. Прежде всего, надо правильно разложить подкоренное выражение  $F(E, J, r)$  в действии (10.4). Для этого оценим «нерелятивистскую» энергию  $E' = E - m < 0$ , момент импульса  $J$  и потенциальную энергию

$-GmM/r = -mr_g/2r$  для орбитального движения через характерную скорость  $v \ll 1$  частицы:

$$|E'| \sim mv^2, \quad |J| \sim mvr \Rightarrow \frac{J^2}{r^2} \sim m^2v^2, \quad m\frac{r_g}{r} \sim E' \Rightarrow \frac{r_g}{r} \sim v^2.$$

Разложим выражение  $F(m + E', J, r)$  вплоть до членов порядка  $v^4 \sim E'^2/m^2$ :

$$F(E, J, r) = \left(2mE' + \frac{m^2r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}\right) + \left(E'^2 + \frac{J^2r_g}{r^3}\right) + O\left(\frac{E'^3}{m^3}\right). \quad (11.1)$$

Первая скобка

$$F^{(0)}(m + E', J, r) = 2mE' + \frac{m^2r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2} \quad (11.2)$$

имеет порядок  $v^2$  и отвечает, очевидно, действию для закона Ньютона:

$$S_r^{(0)}(E', J, r) = \sqrt{2m} \int dr \sqrt{E' - \frac{J^2}{2mr^2} + G\frac{Mm}{r}}. \quad (11.3)$$

Вторая скобка имеет порядок  $v^4$  и дает поправки. Важно, что не все поправки вносят вклад в смещение перигелия. Чтобы это увидеть, давайте поймем, как изменяются пределы интегрирования под действием поправок. Ньютоновские пределы интегрирования являются решениями квадратного уравнения

$$E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} = 0.$$

Слагаемое  $E'^2$  во второй скобке в (11.1) можно поглотить, объединив со слагаемым  $2mE'$ . Это слегка изменит параметры орбиты, но это изменение будет одинаковым в (10.7) и (10.6), поэтому это не скажется на угле смещения перигелия. Оказывается, можно с интересующей нас точностью поглотить и член  $J^2r_g/r^3$ . Для этого сделаем замену  $r = \tilde{r} - r_g/2$ . Тогда имеем

$$F(E, J, r) = F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r}),$$

где  $\tilde{r} = r - \frac{r_g}{2}, \quad \tilde{E}' = E' \left(1 + \frac{E'}{2m}\right), \quad \tilde{J}^2 = J^2 - \frac{m^2r_g^2}{2}. \quad (11.4)$

Мы видим, что предельные значения  $\tilde{R}_{\min}, \tilde{R}_{\max}$  для переменной  $\tilde{r}$  совпадают с  $R_{\min}, R_{\max}$  в ньютоновском пределе, вычисленных для энергии  $\tilde{E}'$  и момента  $\tilde{J}'$ . При этом согласно формуле (10.13) и известному факту, что смещение перигелия в ньютоновской теории равно нулю, имеем

$$2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}} = 2\pi.$$

Поэтому

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}} \left(\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2}\right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} = \frac{\tilde{J}}{(\tilde{r} - r_g/2)^2} \left(1 + \frac{m^2r_g^2}{4\tilde{J}^2}\right) - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \simeq \frac{r_g}{\tilde{r}^3} + \frac{m^2r_g^2}{4\tilde{J}^2\tilde{r}^2}.$$

Это величина порядка малости  $r_g/r \sim v^2$ , так что в правой части этого равенства и под корнем мы можем заменить  $\tilde{E}', \tilde{J}$  на  $E', J$ . Имеем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|E'| + \frac{m^2r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{m^2r_g}{4J^2}\right)$$

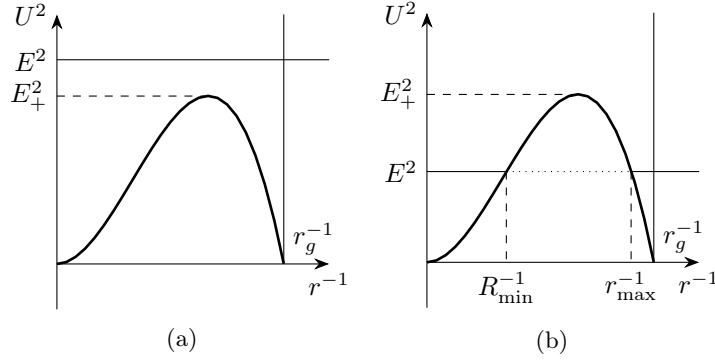


Рис. 11.2. Случай нулевой массы: (a)  $E > E_+$ ; (b)  $E < E_+$ .

$$= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|E'| + m^2r_g\xi - J^2\xi^2}} \left( \xi + \frac{m^2r_g}{4J^2} \right). \quad (11.5)$$

Последний интеграл уже легко взять. Заменяя  $\xi \rightarrow \xi + \frac{m^2r_g}{2J^2}$  получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2r_g \int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \left( \xi + \frac{3m^2r_g}{4J^2} \right), \quad A = \frac{\sqrt{m^4r_g^2 - 8m|E'|}}{2|J|}.$$

Первый член в скобках дает нулевой вклад, а для второго имеем

$$\int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \pi.$$

Мы получаем формулу Эйнштейна для смещения перигелия:

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = \frac{3\pi m^2 r_g^2}{2J^2} = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{J^2}. \quad (11.6)$$

Разумеется равенство (11.4) также означает, что эксцентриситет орбиты и скорость частиц в разных точках в зависимости от, например, расстояния от центра до перигелия и сидерического периода несколько отличаются от кеплеровских значений, но эти отклонения очень малы, и их трудно обнаружить в Солнечной системе. Смещение перигелия же сравнительно легко измерить.

Теперь перейдем к задаче об отклонении луча света гравитационным полем. Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы. Для такой частицы случай 2b — единственный реализующийся случай при любом ненулевом моменте. При этом  $E_- = 0$ , а высота барьера  $E_+ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{J}{r_g}$  пропорциональна моменту импульса (см. рис. 11.2).

На большом расстоянии от гравитирующих тел частица движется по прямой, так что момент импульса  $J$  выражается через *прицельный параметр*  $\rho$ , то есть расстояние от луча до параллельной ему оси, проходящей через начало координат:

$$J = |\mathbf{p}|\rho = E\rho. \quad (11.7)$$

Тогда имеем

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (11.8)$$

Полный угол, заметаемый лучом равен

$$\Phi = 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}, \quad (11.9)$$

где  $R_{\min}$  — решение уравнения

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = 0.$$

В случае плоского пространства  $r_g = 0$  этот угол равен

$$\Phi_0 = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \pi.$$

Нас будет интересовать отклонение луча от прямой  $\theta = \Phi - \pi$ . Если  $r_g$  мало, то, как и в случае орбитального движения, нам нужно найти поправку к  $R_{\min}$ . Той же заменой  $r = \tilde{r} - r_g/2$  получаем

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - \pi = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} \\ &= 2r_g \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned}$$

Интеграл по  $\xi$  легко берется и равен единице. Отсюда получаем

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}. \quad (11.10)$$

Полезно отметить, что уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0 \quad (11.11)$$

формально совпадает с *уравнением эйконала* в геометрической оптике

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0, \quad (11.12)$$

где *эйконал*  $\psi(x)$  есть фаза электромагнитной волны в луче. Частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  выражаются через эйконал как

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \Leftrightarrow k_\mu = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}. \quad (11.13)$$

Таким образом, энергия частицы и частота луча, а также импульс частицы и волновой вектор пропорциональны. Физическая причина этой пропорциональности становится ясна в квантовой теории поля.

Рассмотрим теперь задачу о *рассеянии* света или потока безмассовых частиц сферически-симметричным гравитационным полем. Для этого введем систему координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль потока падающих частиц, а оси  $x, y$  перпендикулярны ему. В этой системе координат угол отклонения  $\theta$  частиц, которые прошли через поле и уходят на бесконечность, представляет собой полярный угол в паре  $(\theta, \phi)$ . В задаче рассеяния нас будет интересовать *сечение рассеяния*, то есть величина площади  $d\sigma$  в плоскости, перпендикулярной потоку падающих частиц, и расположенной далеко от гравитирующего тела, с которой частицы будут отклоняться на угол в интервале  $[\theta, \theta + d\theta]$ . Очевидно,

$$d\theta = \frac{2r_g}{\rho^2} d\rho = \frac{r_g}{\rho^3} d(\rho^2) = \frac{r_g}{\pi \rho^3} d\sigma.$$

Выразим теперь  $d\sigma$  через величину соответствующего телесного угла  $do = 2\pi \sin \theta d\theta \simeq 2\pi \theta d\theta$  (мы учли, что мы рассматриваем только малые углы отклонения). Также из (11.10) выражаем  $\rho$  через  $\theta$ . Окончательно, получаем для сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{4r_g^2}{\theta^4} do, \quad \theta \ll 1. \quad (11.14)$$

Эта величина характеризует вероятность для безмассовой частицы, падающей на источник гравитационного поля из бесконечности, отклониться в заданный телесный угол  $do = \sin \theta d\theta d\phi$  вблизи направления  $(\theta, \phi)$ . В этом примере такая вероятность не зависит от энергии падающих частиц (или частоты падающего света), в следствие того, что такая зависимость выпадает из (11.8). В других задачах рассеяния такая зависимость, вообще говоря, есть.

## Задачи

1. Выведите выражение (11.3) для радиальной части действия из уравнения Гамильтона—Якоби для нерелятивистской частицы:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{r}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0, \quad H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}), \quad (11.15)$$

где  $U(\mathbf{r}) = -GMm/r$  — нерелятивистская потенциальная энергия.

2. Найдите сечение  $\sigma_{\text{погл}} = \pi \rho_{\text{max}}^2$  падения безмассовой частицы в черную дыру. Здесь  $\rho_{\text{max}}$  — максимальный прицельный параметр, при котором частица достигает горизонта событий.

3. Найдите сечение падения нерелятивистской ( $E' = E - m \ll m$ ) частицы на черную дыру как функцию  $E'$ .

## Семинар 11

### Падение пыли на черную дыру

Мы рассмотрим процесс падения тонкой поллой пылевидной сферы на черную дыру. Нам важно будет понять, как меняется при этом метрика.