

Лекция 12

Заряженные и вращающиеся черные дыры

В лекции 9 было описано решение Шварцшильда, содержащее две особенности пространства-времени. Эти особенности были пространственно-подобны и находились в бесконечном прошлом (белая дыра) и бесконечном будущем (черная дыра) соответственно. В этой лекции мы рассмотрим несколько решений, в которых особенность имеет другую структуру.

Первым делом рассмотрим решение Рейснера—Нордстрёма. Это решение можно получить как совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла в вакууме:¹¹

$$R_{\mu\nu} = 2G \left(-F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \quad (12.1)$$

Под вакуумом мы здесь понимаем отсутствие других полей, кроме электромагнитного и гравитационного. Будем искать решение для метрики в виде (9.7). В силу того, что для этого решения площадь любой сферы с центром в точке $r = 0$ равна $4\pi r^2$, из теоремы Гаусса мы немедленно получаем решение уравнений Максвелла

$$E_r \equiv F_{tr} = -F_{rt} = \frac{Q}{r^2}, \quad E_{\vartheta} = E_{\varphi} = 0, \quad H_i = 0. \quad (12.2)$$

Постоянная Q естественным образом отождествляется с зарядом центрального тела. Отсюда немедленно получаем для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_t^t = T_r^r = -T_{\vartheta}^{\vartheta} = -T_{\varphi}^{\varphi} = \frac{e^{2k+2h} Q^2}{8\pi r^4}. \quad (12.3)$$

Подставляя его в уравнения Эйнштейна с тензором Риччи из (9.10), находим

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad (12.4)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (12.5)$$

где

$$r_Q^2 = GQ^2 \quad (12.6)$$

Параметр r_g связан с массой гравитирующего тела той же формулой $r_g = 2GM$, что и в шварцшильдовском случае. Действительно, слагаемое с r_Q не меняет асимптотику решения на больших расстояниях.

Величина e^{2k} обращается в нуль в точках

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G(M \pm \sqrt{M^2 - G^{-1}Q^2}), \quad \text{если } Q^2 \leq GM^2. \quad (12.7)$$

В предельном случае шварцшильдовской метрики $Q = 0$ имеем $r_- = 0$, $r_+ = r_g$. Чтобы понять смысл радиусов r_{\pm} необходимо перейти к системе координат, аналогичной системе Эддингтона—Финкельштейна, не имеющей особенностей в этих точках. Как и в шварцшильдовском случае, найдем радиальные светоподобные геодезические:

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (12.8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

¹¹Здесь нам удобнее будет пользоваться системой Гаусса, отличающейся от системы Хевисайда, использованной в первой лекции заменой $F_{\mu\nu} \rightarrow (4\pi)^{-1/2} F$, $j^{\mu} \rightarrow (4\pi)^{1/2} j^{\mu}$.

где

$$\begin{aligned}
r^* &= r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| && \text{при } Q < G^{1/2} M; \\
r^* &= r + r_g \log \left| \frac{2r}{r_g} - 1 \right| - \frac{r_g r}{2r - r_g} && \text{при } Q = G^{1/2} M; \\
r^* &= r + \frac{r_g}{2} \log \frac{r^2 - r_g r + r_Q^2}{r_Q^2} - \frac{r_Q^2 - r_g^2/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{r - r_g/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} && \text{при } Q > G^{1/2} M.
\end{aligned} \tag{12.9}$$

Как и раньше, введем переменные

$$U = t - r^*, \quad V = t + r^*. \tag{12.10}$$

Отсюда легко получаем метрику в виде

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dV^2 - 2 dV dr - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \\
&= \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \left(1 - \frac{r_-}{r} \right) dV^2 - 2 dV dr - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).
\end{aligned} \tag{12.11}$$

Сингулярность осталась только на линии $r = 0$. Теперь рассмотрим три случая для разных соотношений массы и заряда.

При $Q < M$ корни $r = r_{\pm}$ вещественны. Соответствующие линии (при $\vartheta, \varphi = \text{const}$) в пространстве-времени представляют собой изотропные геодезические, пересекающиеся с изотропными геодезическими $V = \text{const}$ (Рис. 12.1). Все геодезические $V = \text{const}$ направлены к центру и достигают сингулярности. Геодезические же $U = \text{const}$ в трех областях значений r ведут себя по-разному. Во внешней области I : $r > r_+$ эти геодезические удаляются от центра и уходят на бесконечность. В области II : $r_- < r < r_+$ геодезические асимптотически стремятся к линии $r = r_+$ в прошлом и к линии $r = r_-$ в будущем. Частица, попавшая в эту область, не может выйти в область I . Таким образом, поверхность $r = r_+$ является *горизонтом событий*. С другой стороны, частица может, но не обязана попасть в область III : $r < r_-$. Может случиться так, что она может асимптотически приближаться к поверхности $r = r_-$. Это может произойти, например, в том случае, если частица обладает зарядом того же знака, что и источник гравитации. Что происходит в этом случае, мы увидим позже, когда полностью перейдем к координатам светового конуса. Если же частица попадает в область III , то она, тем не менее, не обязана упасть на сингулярность, поскольку в этой области изотропные геодезические $U = \text{const}$ начинаются на сингулярности и асимптотически приближаются к поверхности $r = r_-$. Но это значит, что линия сингулярности $r = 0$ является *временноподобной*, и может как поглощать частицы, так и излучать их, сочетая свойства как черной дыры, так и белой. В области III не существует *пространственноподобной* поверхности Коши. Любая поверхность Коши должна содержать временноподобный участок, окружающий сингулярность. Поверхность, ограничивающая область, данные в которой однозначно определяются данными на некоторой пространственноподобной частичной поверхности Коши называется *горизонтом Коши*. В данном случае горизонтом Коши является поверхность $r = r_-$.

Теперь перейдем к описанию в координатах светового конуса U, V . Имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(U, V)} \right) \left(1 - \frac{r_-}{r(U, V)} \right) dU dV - r^2(U, V) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \tag{12.12}$$

где функция $r(U, V)$ определяется как решение уравнения $V - U = 2r^*(r)$ относительно r . Легко видеть, что если мы выберем решение $r > r^*$, то координаты U, V покрывают область I . Тогда предел $V \rightarrow +\infty$, $U = \text{const}$ отвечает удаленной точке в будущем, $t, r \rightarrow +\infty$, предел $U \rightarrow -\infty$, $V = \text{const}$ — удаленной точке в прошлом, $-t, r \rightarrow +\infty$, предел $U \rightarrow +\infty$, $V = \text{const}$ — горизонту событий будущего \mathcal{H}^+ , $r = r_+$, а предел $V \rightarrow -\infty$, $U = \text{const}$ — горизонту событий прошлого \mathcal{H}^- , $r = r_+$, получаемому из \mathcal{H}^+ обращением времени $V \leftrightarrow -U$.

Выбирая другие решения уравнения $V - U = r^*$, мы можем покрыть области II и III , однако нам бы хотелось иметь координаты, которые можно было бы гладко продолжить из одной области

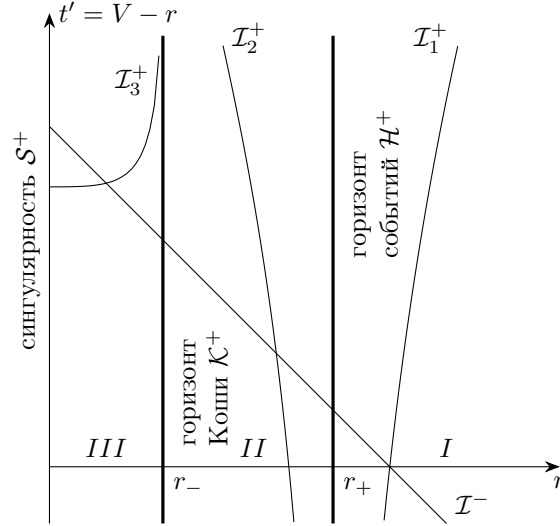


Рис. 12.1. Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при $Q < M$.

в другую. Этому служат координаты, аналогичные координатам Крускала:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_+^{-1} e^{-\alpha_+ U} = -\alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r-t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \\ v &= \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+ V} = \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r+t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \end{aligned} \quad (12.13)$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{r_+ - r_-}{2r_{\pm}^2}, \quad \beta_{\pm} = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{\pm 2}. \quad (12.14)$$

Я здесь специально убрал знаки модуля, ограничив решение на область $r > r_+$. В этих переменных это отвечает области $u < 0, v > 0$. В этих переменных уравнение $V - U = 2r^*$ на переменную r приобретает вид

$$uv = -\alpha_+^{-2} e^{2\alpha_+ r} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right) \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+}. \quad (12.15)$$

Для метрики имеем

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{1-\beta_+} e^{-2\alpha_+ r} du dv - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (12.16)$$

Теперь вы видите, что переменные u, v могут быть продолжены за пределы области $u > 0, v < 0$ на все вещественные значения. Если мы сделаем дополнительное преобразование

$$u = \alpha^{-1} \operatorname{tg} \bar{u}, \quad v = \alpha^{-1} \operatorname{tg} \bar{v},$$

мы отобразим плоскость \mathbb{R}^2 на квадрат, что удобнее для графического представления. На Рис. 12.2 эта плоскость изображена жирным квадратом в середине.

Координатная система u, v не продолжается в область $r < r_-$ ввиду особенности метрики (12.16) вида $(r/r_- - 1)^{1-\beta_+}$ на этой поверхности. В области II введем новые координаты $u^{(1)}, v^{(1)}$, которые будут продолжаться через эту поверхность:

$$u^{(1)} = \alpha_-^{-1} (\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = \alpha_-^{-1} (\alpha_+ v)^{-\beta_-}. \quad (12.17)$$

Метрика в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_+}\right)^{1-\beta_-} e^{-2\alpha_- r} du^{(1)} dv^{(1)} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (12.18)$$

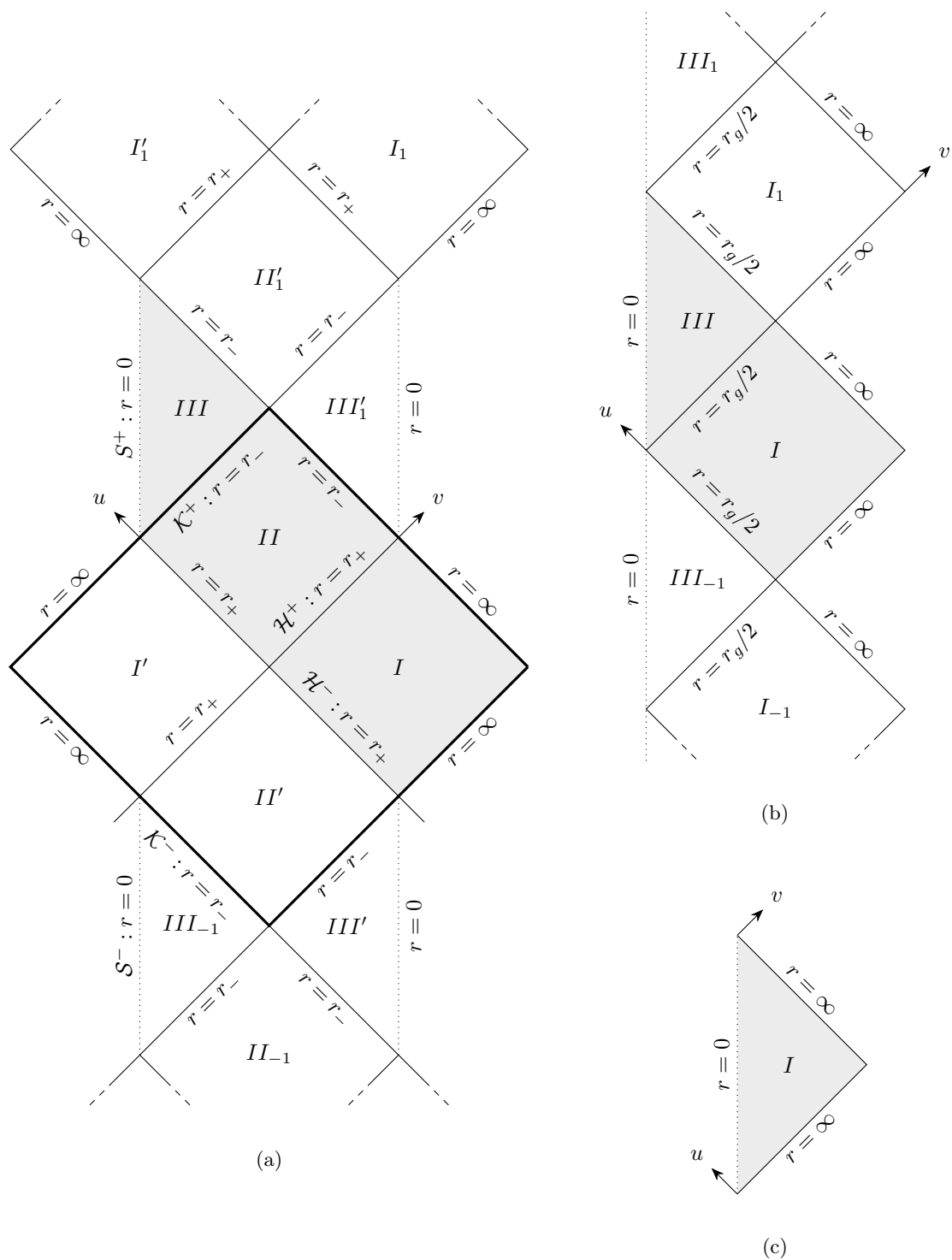


Рис. 12.2. Диаграмма Пенроуза для метрики Рейснера—Нордстрема. (а) Случай $Q < G^{1/2}M$. Жирным обведен квадрат, представляющий плоскость переменных u, v , определенных координатами V, r с метрикой (12.11). (б) Случай $Q = G^{1/2}M$. Область II исчезает. Горизонт событий и горизонт Коши совпадают. (с) Случай $Q > G^{1/2}M$. Голая сингулярность: горизонта событий и горизонта Коши нет.

Она гладко продолжается в область отрицательных значений $u^{(1)}, v^{(1)}$, то есть на области III , III'_1 , II'_1 . В областях III , III_1 они продолжаются вплоть до сингулярности $u^{(1)}v^{(1)} = 1$. В области II'_1 мы делаем замену

$$u^{(2)} = -\alpha_+^{-1}(-\alpha_-u)^{-\beta_+}, \quad v^{(2)} = -\alpha_+^{-1}(-\alpha_-v)^{-\beta_+}. \quad (12.19)$$

Эти координаты, очевидно, продолжаются на области I_1 , I'_1 , II_1 . Далее повторяем операцию по индукции для всех областей в абсолютном будущем (вверх по рисунку). Аналогично строим координаты в областях в абсолютном прошлом (вниз по рисунку).

Важное отличие черной дыры Рейснера—Нордстрема состоит в том, что частица вовсе не обязательно должна упасть на сингулярность. Частица, попавшая под горизонт событий, может пройти через область III или III_1 , затем через белую дыру II'_1 и попасть в другой «открытый» мир I_1 или I'_1 . При этом, пересекая горизонт Коши области III находящийся на ней наблюдатель может получить всю информацию о всем будущем «зеркального» мира I' , а пересекая горизонт Коши области III_1 — всю информацию о будущем мира I , из которого он проник за горизонт событий. Мы видим, что судьба такого наблюдателя намного более оптимистична, чем в шварцшильдовском случае.

С помощью такой черной дыры мы можем построить кротовую нору, ведущую в наше собственное прошлое, если отождествим, например область II'_1 с областью II_1 :

В вырожденном случае $Q = G^{1/2}M$ область II пропадает, горизонт событий и горизонт Коши совпадают, а переменные u, v продолжают непосредственно в области III и III_{-1} . Далее, легко построить координаты, которые продолжают в $I_{\pm 1}$, затем в $III_{\pm 1}$ и т.д.

Случай $Q > G^{1/2}M$ — самый простой. Пространство-время покрывается одной картой и не ни содержит горизонтов событий ни горизонтов Коши, но содержит особенность $r = 0$. Такую особенность называют *голой сингулярностью*. Это пространство «плохо» тем, что в нем вообще нет пространственноподобных поверхностей Коши. Многим ученым такая ситуация не нравится, и они предполагают, что во Вселенной действует *принцип космической цензуры*: в природе не может быть голых сингулярностей. По отношению к метрике Рейснера—Нордстрема валидность этого принципа может быть связана с тем, что кулоновское отталкивание не позволит создать голую сингулярность этого типа, но этот факт не доказан. В общем случае, тем более, доказательство отсутствует. Боюсь, что принцип космической цензуры является чисто эстетическим принципом и вряд ли имеет отношение к природе вещей.

Рассмотрим теперь (без всяких доказательств) «максимальное» обобщение метрики Шварцшильда — метрику Кёрра—Ньюмена. Эта метрика отвечает вращающейся заряженной черной дыре. В случае нулевого заряда она называется метрикой Керра. В координатах Бойера—Линдквиста, обобщающих координаты Шварцшильда, метрика Керра—Ньюмена имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2, \quad (12.20)$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$

Параметр a связан с моментом импульса J :

$$J = aM. \quad (12.21)$$

Тензор электромагнитного поля удобнее записать в виде формы

$$F = \frac{Q}{\rho^4} ((r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)(dt - a \sin \vartheta d\varphi) \wedge dr - ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)), \quad (12.22)$$

где, как обычно, $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$.

Метрика имеет особенность в корнях полинома $\Delta(r)$,

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - GQ^2 - a^2}. \quad (12.23)$$

Чтобы понять смысл этих корней, перейдем к координатам Керра V, r, ϑ, ϕ , аналогичным координатам Эддингтона—Финкельштейна:

$$dV = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (12.24)$$

В этих координатах кривая $V, \vartheta, \phi = \text{const}$ является изотропной геодезической. Метрика в них имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta - a \sin^2 \vartheta}{\rho^2} dV^2 - 2 dV dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dV d\phi. \quad (12.25)$$

Кривая $r, \vartheta, \phi = \text{const}$ является изотропной геодезической на поверхности, где

$$\Delta - a \sin^2 \vartheta = 0, \quad (12.26)$$

то есть

$$r_{e,\pm}(\vartheta) = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (12.27)$$

При этом $r_{e,+} \geq r_+$. В полюсах $\vartheta = 0, \pi$ радиальная часть метрики (12.25) имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} dV^2 - 2 dV dr,$$

так что ясно, что при $r = r_+ = r_{e,+}(0)$ находится горизонт событий, а при $r = r_- = r_{e,-}(0)$ — горизонт Коши. Давайте разберемся, что происходит на произвольных широтах. Для этого перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dV - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dV)^2 - 2(dV - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (12.28)$$

Изучим пересечение светового конуса с трехмерным пространственно-временным цилиндром $r = \text{const}$ (точнее, с касательным пространством к нему). Так как при $dr = 0$ третий член пропадает, все три члена отрицательны и световой конус, начинающийся в некоторой точке, пересекается с поверхностью единственно в этой точке. Можно показать, что половина конуса, соответствующая $dV > 0$, направлена внутрь поверхности. Таким образом, если поместить на поверхность $r = \text{const}$ легкие частицы, то площадь поверхности будет со временем уменьшаться. В этом случае мы говорим, что пространственная поверхность $r = \text{const}$, $r_- < r < r_+$ является *ловушечной поверхностью*.

При $\Delta > 0$ световой конус пересекает поверхность по двум двумерным поверхностям

$$d\vartheta = \pm \rho^{-4} (\Delta (dV^2 - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \sin^2 \vartheta ((r^2 + a^2) d\phi - a dV)^2).$$

Это значит, что всегда есть часть конуса $V > 0$, которая направлена наружу. Если же $\Delta = 0$, эти две поверхности смыкаются и вырождаются в одну линию

$$d\vartheta = 0, \quad \frac{d\phi}{dV} = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Таким образом, световой конус касается гиперповерхности $r = \text{const}$ и частицы, вошедшие под эту поверхность, не могут уже пересечь ее снова.

Сравнивая с ситуацией в решении Рейснера—Нордстрема, мы видим, что поверхность $r = r_+$ является горизонтом событий, а $r = r_-$ — горизонтом Коши *при всех значениях угла ϑ* . Поверхность же $r = r_{e,+}(\vartheta)$ играет роль горизонта событий только для радиальных движений. Эта поверхность охватывает горизонт событий и касается его в полюсах. Она называется *пределом статичности* и ограничивает область (*эргосферу*), внутри которой частицы не могут оставаться стационарными по отношению к бесконечно-удаленной системе координат. Черная дыра «увлекает» их и заставляет вращаться вместе с собой. Однако частица, попавшая в эргосферу, может из нее вырваться во внешнюю область.

Наличие эргосферы отличает вращающуюся черную дыру от невращающейся. Другое отличие состоит в том, что сингулярность представляет собой не точку, а *окружность*. Если вычислить компоненты тензора Римана, от них имеют особенности при $r = 0$ и $\vartheta = \pi/2$. При всех других значениях ϑ особенности нет. Чтобы понять смысл особенности, следует перейти к координатам:

$$X^0 = V - r, \quad X^1 + iX^2 = (r + ia)e^{i\phi} \sin \vartheta, \quad X^3 = r \cos \vartheta. \quad (12.29)$$

Обратно, r является решением уравнения

$$r^4 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - a^2)r^2 - a^2(X^3)^2 = 0. \quad (12.30)$$

Метрика в этих координатах принимает вид *метрики Керра–Шильда*

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu - 2H(k_\mu dX^\mu)^2, \quad (12.31)$$

где H и k_μ ($g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$) — некоторые функции координат. Для решения Керра–Ньюмена они принимают вид

$$H = \frac{r_g r - r_Q^2}{2\rho^2}, \quad k_\mu dX^\mu = dV - a \sin^2 \vartheta d\phi. \quad (12.32)$$

Разумеется, их нетрудно выразить через координаты X^μ , но это нам не понадобится. Для нас важно, что в этих координатах поверхности $r = \text{const}$ при данном V представляют собой софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения с фокальной окружностью $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$, $X^3 = 0$ (Рис. 12.3) При $r \rightarrow 0$ эллипсоид вырождается в диск радиуса a , причем сингулярность расположена на краю диска — фокальной окружности эллипсоидов. Так как на диске особенность отсутствует, чтобы избежать нарушения гладкости метрики, следует продолжить ее в область $r < 0$. Но при отрицательных r имеем $\Delta > 0$, так что в этой области нет горизонтов событий и горизонтов Коши.¹²

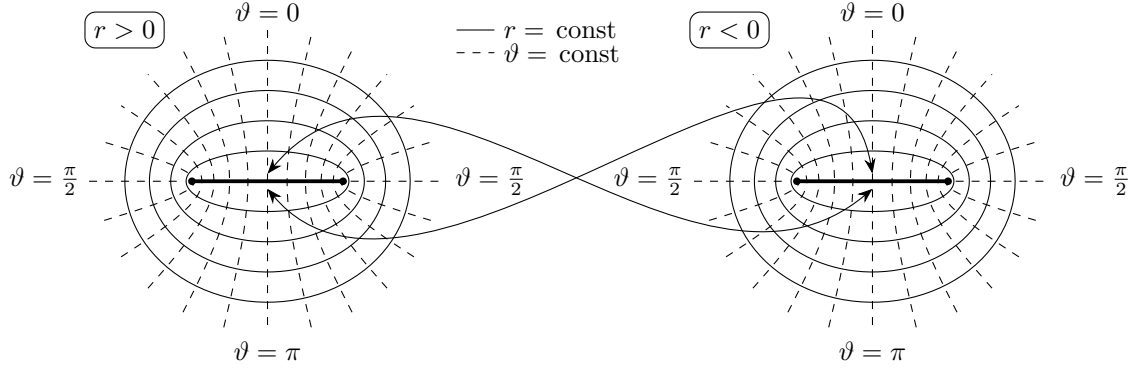


Рис. 12.3. Окрестность сингулярности в черной дыре Керра–Ньюмена. При уменьшении параметра r эллипсоид вырождается в диск (жирная линия посередине). При этом край диска (жирные точки) представляет собой пространственно-временную сингулярность, а внутренность диска — разрез. Двусторонние стрелки показывают, какие берега разреза областей $r > 0$ и $r < 0$ должны быть склеены.

Что касается диаграммы Пенроуза для пространства Керра–Ньюмена, то она почти не отличается от диаграммы для пространства Рейснера–Нордстрема, изображенной на Рис. 12.2. Единственно отличие состоит в том, что области типа III превращаются из «треугольников» в «квадраты» за счет области $r < 0$. На Рис. 12.4 представлена диаграмма Пенроуза в экваториальной плоскости. (Вне экваториальной плоскости мы вообще не увидели бы сингулярности.)

Мы рассмотрели случай черной дыры $r_g^2/4 > r_Q^2 + a^2$. Обобщение на вырожденный случай $r_g^2/4 = r_Q^2 + a^2$ и случай голой сингулярности $r_g^2/4 < r_Q^2 + a^2$ не составляет труда. Надо сказать, что точно решается также задача о движении частицы в поле решения Керра–Ньюмена — переменные в соответствующем уравнении Гамильтона–Якоби разделяются.

Мы обнаружили сингулярности, изучая точные решения уравнений Эйнштейна в пустоте. Возникает вопрос, насколько универсально такое поведение. При каких условиях возникает особенность, и насколько ее возникновение неизбежно. На этот счет есть несколько теорем, которые формулируются настолько локально, насколько возможно. Введем важное понятие. Рассмотрим *замкнутое* компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит две ортогональные ему

¹²Можно заметить, что наблюдатель в области $r < 0$ будет наблюдать голоую сингулярность *отрицательной массы*. Действительно, замена $r \rightarrow -r$ эквивалентна замене $r_g \rightarrow -r_g$.

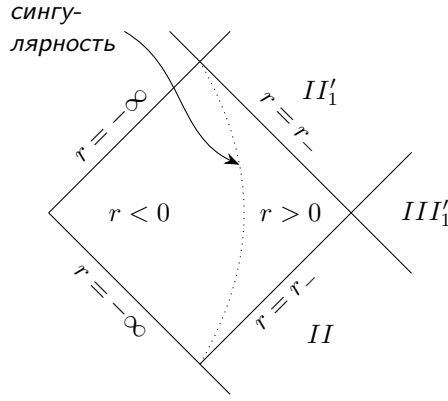


Рис. 12.4. Область III конформной диаграммы пространства Керра–Ньюмена в экваториальной плоскости.

изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки x многообразия \mathcal{T} два пучка изотропных геодезических \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . Введем на них аффинный параметр τ так, чтобы $\tau = 0$ на \mathcal{T} . Мы можем измерить площади $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ пучков в зависимости от аффинного параметра. Тогда, если

$$\left. \frac{dA_i}{d\tau} \right|_{\tau=0} < 0 \quad (i = 1, 2)$$

для каждой точки \mathcal{T} , то \mathcal{T} называется *ловушечной поверхностью*.

Простейшая теорема об особенностях звучит так. Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем \mathbb{R}), если

1. в каждой точке пространства-времени x для любого изотропного вектора $k \in TM_x$ выполняется неравенство $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$;
2. в пространстве-времени существует некомпактная глобальная поверхность Коши;
3. в пространстве-времени существует ловушечная поверхность.

Условия этой теоремы очень ограничительны. Из рассмотренных нами точных решений ее условиям удовлетворяет только решение Шварцшильда. Тем не менее, эта теорема дает некоторое представление о том, как могут выглядеть условия существования особенностей пространства-времени.

Задачи

1. Решив уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса (12.3), получите метрику Рейснера–Нордстрема (12.5).
2. Найдите векторный потенциал для поля (12.2) и разделите переменные в уравнении Гамильтона–Якоби для *заряженной* частицы в метрике Рейснера–Нордстрема.
3. Изучите решение Керра–Ньюмена на больших расстояниях $r \gg r_g, r_Q$ и покажите, что оно отвечает объекту массы M , заряда Q и момента импульса $J = aM$. Покажите, что магнитный дипольный момент этого объекта равен $\mu = Qa$.¹³
4. Покажите, что векторное поле $J_z = -\partial_\varphi$ является векторным полем Киллинга для метрики Керра–Ньюмена.
5. Рассмотрите метрику в форме Керра–Шильда (12.31) с произвольной функцией $H(X)$ и векторным полем $k(X)$, таким что $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$. Покажите, что $k^\mu = k^\mu$ и $\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$, а также получите явный вид обратной метрики $g^{\mu\nu}$.

¹³Используйте тот факт, что неподвижная частица с магнитным моментом μ в пространстве-времени Минковского создает магнитное поле $\mathbf{H} = \frac{3(\mu\mathbf{n})\mathbf{n} - \mu}{r^3}$.

Семинар 12

Падение пылевидной материи на черную дыру. Продолжение