Лекция 1
$O(2)$-модель и переход Березинского—Костерлица—Таулеса

В этих лекциях мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} n_i^2 = 1, \tag{1.1}$$

которые называются моделями $\boldsymbol{n}$-поля или $O(N)$-моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$-симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$-модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos\varphi, \qquad n_2 = \sin\varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu\varphi)^2, \tag{1.2}$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \tag{1.3}$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x)} e^{in\varphi(y)}\rangle \sim \left(-(x-y)^2\right)^{\frac{g}{4\pi}mn}, \qquad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

На самом деле это совсем не так, и результат существенно зависит от значения константы g. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{1.5}$$

в эвклидовом пространстве. Рассмотрим набор решений

$$\varphi_{\vec q\vec x}(x) = \sum_{a=1}^{n} q_a \operatorname{Im}\log(z - z_a) = \sum_{a=1}^{n} \frac{q_a}{2i}\log\frac{z - z_a}{\bar z - \bar z_a}, \qquad q_a \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0,$$
$$\bar z = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют особенности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a. В простейшем случае $n = 1$ в радиальных координатах $z - z_1 = re^{i\theta}$ решение имеет вид

$$\varphi_{q_1x_1}(x) = q_1\theta.$$

Мы видим, что это вихрь в точке 0, при обходе вокруг которого поле φ увеличивается на $2\pi q_1$.

Важно отметить, что решения (1.6) удовлетворяют уравнению (1.5) даже в точках $x = x_a$. Действительно,

$$\partial_\mu\partial^\mu \frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar z} = \partial_\mu\partial^\mu \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu\frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\log\frac{1}{r} = 0.$$

Более того, для любой гладкой и достаточно быстро спадающей функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int d^2x\,\varphi(x)\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar z} = \int d^2x\,(\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x))\log\frac{1}{r} = 0,$$

так как интеграл от логарифма в точке $x = 0$ сходится. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi_{\vec q\vec x} = 0. \tag{1.7}$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (1.6):

$$
\begin{aligned}
S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] &= \frac{2}{g}\int d^2x\,\partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}}\,\bar\partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}} \\
&= \frac{1}{2g}\int d^2x\sum_{a,b}\frac{q_aq_b}{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)} \\
&= \frac{1}{2g}\left(\sum_a q_a^2\int\frac{d^2x}{|z-z_a|^2}+\sum_{a<b}q_aq_b\int d^2x\,\frac{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)+(\bar z-\bar z_a)(z-z_b)}{|z-z_a|^2|z-z_b|^2}.\right)
\end{aligned}
$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших и на малых масштабах:

$$
\int\frac{d^2x}{|z-z_a|^2}\simeq 2\pi\int_{r_0}^{R}\frac{dr}{r}=2\pi\log\frac{R}{r_0},
$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Имеем

$$
\int d^2x\,\frac{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)+(\bar z-\bar z_a)(z-z_b)}{|z-z_a|^2|z-z_b|^2}=2\pi\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2} \tag{1.8}
$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$
\begin{aligned}
S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] &= \frac{1}{2g}\left(\pi\sum_a q_a^2\log\frac{R^2}{r_0^2}+2\pi\sum_{a<b}q_aq_b\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2g}\left(\sum_a q_a\right)^2\log R^2-\frac{\pi}{2g}\sum_a q_a^2\log r_0^2+\frac{1}{2g}\sum_{a<b}q_aq_b\,2\pi\log\frac{1}{|z_a-z_b|^2}.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Первый член стремится к бесконечности с ростом размера системы, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$
\sum_a q_a = 0. \tag{1.10}
$$

Второе слагаемое в (1.9) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например, рассмотрим ее как предел теории с действием

$$
S[\phi]=\int d^2x\,\left(|\partial_\mu\phi|^2-\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-\phi_0^2)^2\right),
$$

это слагаемое будет конечным и будет зависеть от структуры кора вихрей. Ниже мы увидим, что значение r_0 не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$
Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^{-2n}}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\\ q_1+\dots+q_n=0}}\int d^2x_1\cdots d^2x_n\int D\varphi\,e^{-S[\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}}]-(J,\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{1.11}
$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (1.9) не меняется при перестановках $z_a\leftrightarrow z_b$, $q_a\leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1,\dots,q_n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$
S[\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}}]=S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}]+S[\varphi]+\frac{1}{g}\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi_{\vec{q}\vec{x}}.
$$

Первый член дается выражением (1.9). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (1.7). Отсюда

$$Z[J]=Z_0[J]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\ldots,q_n\\ q_1+\cdots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2-2n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n\prod_{a<b}|z_a-z_b|^{2\frac{\pi}{g}q_aq_b}\,e^{-(J,\varphi_{\vec q\vec x})}, \tag{1.12}$$

$$Z_0[J]=\int D\varphi\,e^{-S[\varphi]-(J,\varphi)}. \tag{1.13}$$

Из отождествления (1.3) следует, что мы можем рассматривать только источники J вида

$$J_{\vec J\vec y}(x)=-i\sum_{j=1}^{k}J_j\delta(x-y_j),\qquad J_i\in\mathbb{Z}. \tag{1.14}$$

Тогда

$$\begin{aligned}Z[J_{\vec J\vec y}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\ldots,q_n\\ q_1+\cdots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum_a q_a^2+\frac{g}{4\pi}\sum_j J_j^2-2n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n\prod_{a<b}|z_a-z_b|^{\frac{2\pi}{g}q_aq_b}\\ \times\prod_{a,j}\left(\frac{w_j-z_a}{\bar w_j-\bar z_a}\right)^{q_aJ_j/2}\prod_{j<j'}|w_j-w_{j'}|^{\frac{g}{2\pi}J_jJ_{j'}},\end{aligned} \tag{1.15}$$

где $w_j=y_j^1+iy_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи g («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших g («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом Березинского—Костерлица—Таулеса (БКТ)*.

Конечно, мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода БКТ. Действительно, плазма не образуется, когда вихри удерживаются в конечном объеме, то есть интеграл инфракрасно сходятся при больших n. При этом следует исключить один двумерный интеграл — интеграл по «центру масс», поскольку он сводится к объему системы. Кроме того, в силу условия нейтральности

$$\sum_{a<b}q_aq_b=\frac12\sum_{a\ne b}q_aq_b=\frac12\left(\sum_a q_a\right)^2-\frac12\sum_a q_a^2=-\frac12\sum_a q_a^2\le-\frac{n}{2}.$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g}\left(-\frac{n}{2}\right)+2(n-1)<0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $g<g_{\text{BKT}}$, причем

$$g_{\text{BKT}}=\frac{\pi}{2}. \tag{1.16}$$

При $g>g_{\text{BKT}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0, так что фазовый переход имеет место при сколь угодно большой энергии вихря. Заметим, что условие (1.16) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2-2n}$ для системы простых вихрей $q_a=\pm1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0, корреляционная длина пропорциональна r_0, и, таким образом, даже у «идеальной» $O(2)$-модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (1.15) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \tag{1.17}$$

и потому $\log \frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \tag{1.18}$$

Обратим внимание, что здесь дельта-функция понимается как двумерная дельта-функция в эвклидовом пространстве $\delta(x) = \delta_E(x) = \delta(x^1)\delta(x^2)$. Двумерная дельта-функция в пространстве Минковского, отвечающая виковскому повороту, записывается как

$$\delta_M(x) \equiv \delta(x^1)\delta(x^0) = i\delta_E(x).$$

Таким образом, в пространстве Минковского уравнение (1.17) должно писаться как

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{4\pi} \log(-x^2) = i\delta_M(x) \tag{1.19}$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde{\phi}$ условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = \epsilon_{\mu\nu}\, \partial^\nu \phi, \qquad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1, \tag{1.20m}$$

в пространстве Минковского, или

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -i\epsilon_{\mu\nu}\, \partial^\nu \phi, \qquad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \tag{1.20e}$$

в эвклидовом пространстве, или

$$\partial \tilde{\phi} = \partial \phi, \qquad \bar{\partial} \tilde{\phi} = -\bar{\partial} \phi. \tag{1.21}$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на решениях уравнений движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_R(z)$ и $\phi_L(\bar{z})$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar{z}). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z)\phi_R(z')\rangle_0 = \log \frac{R}{z - z'}, \qquad \langle \phi_L(\bar{z})\phi_L(\bar{z}')\rangle_0 = \log \frac{R}{\bar{z} - \bar{z}'}, \qquad \langle \phi_R(z)\phi_L(\bar{z}')\rangle_0 = 0 \tag{1.23}$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, переопределив экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\phi_{R,L}}:, \qquad e^{i\alpha\phi} = r_0^{\alpha^2} :e^{i\alpha\phi}:, \qquad e^{i\alpha\tilde{\phi}} = r_0^{\alpha^2} :e^{i\alpha\tilde{\phi}}:. \tag{1.24}$$

Тогда экспоненциальные операторы $:e^{(\cdots)}:$ уже не безразмерные и имеют размерности $d = \alpha^2/2$ для киральных операторов и α^2 для экспонент от полей $\phi, \tilde{\phi}$. Эти размерности совпадают с *масштабными размерностями* операторов. По определению, мы говорим, что имеется набор операторов O_i с масштабными размерностями d_i, если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O_i(x) \to s^{d_i} O_i(sx)$$

во всех операторах одновременно.

Корреляционные функции операторных экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned}\langle :e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)}: \cdots :e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)}:\rangle_0 &= R^{-\frac12\left(\sum_a\alpha_a\right)^2}\prod_{a<b}(z_a-z_b)^{\alpha_a\alpha_b},\\ \langle :e^{i\alpha_1\phi_L(\bar z_1)}: \cdots :e^{i\alpha_n\phi_L(\bar z_n)}:\rangle_0 &= R^{-\frac12\left(\sum_a\alpha_a\right)^2}\prod_{a<b}(\bar z_a-\bar z_b)^{\alpha_a\alpha_b}.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\left\langle\prod_{j=1}^k e^{i\beta_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^n e^{i\alpha_a\phi(x_a)}\right\rangle_0\\ &= r_0^{\sum_a\alpha_a^2+\sum_j\beta_j^2}\prod_{a<b}|z_a-z_b|^{2\alpha_a\alpha_b}\prod_{j<j'}|w_j-w_{j'}|^{2\beta_j\beta_{j'}}\prod_{a,j}\left(\frac{w_j-z_a}{\bar w_j-\bar z_a}\right)^{\alpha_a\beta_j}\times\begin{cases}1, & \sum\alpha_a=\sum\beta_j=0;\\ 0 & \text{в пр. сл.}\end{cases}\end{aligned}\tag{1.26}$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (1.15) при

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \sqrt{\frac{\pi}{g}}\,q_a,\\ \beta_j &= \sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j,\end{aligned}\tag{1.27}$$

Отсюда получаем

$$Z[J_{\vec J\vec y}] = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{-2n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n\,\left\langle\prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\,q_a\phi(x_a)}\right\rangle_0.\tag{1.28}$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$g\leftrightarrow(2\pi)^2g^{-1},\qquad k\leftrightarrow n,\qquad q_a\leftrightarrow J_j,\qquad \phi(x)\leftrightarrow\tilde\phi(x).$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля ϕ и $\tilde\phi$. Поэтому мы можем отождествить

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\tilde\phi(x).\tag{1.29}$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q|>1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ штук вихрей заряда 1. Тогда производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Z[J_{\vec J\vec y}] &= \sum_{n=0}^\infty\frac{r_0^{-4n}}{(2n)!}\binom{2n}{n}\int d^2x_1\cdots d^2x_{2n}\,\left\langle\prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}\prod_{a=n+1}^{2n}e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}\right\rangle_0\\ &= \sum_{n=0}^\infty\frac{r_0^{-4n}}{(2n)!}\int d^2x_1\cdots d^2x_{2n}\,\left\langle\prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^{2n}\left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}+e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}\right)\right\rangle_0\\ &= \left\langle\prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\exp\left(2r_0^{-2}\int d^2x\,\cos\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x)\right)\right\rangle_0\\ &= \int D\phi\,e^{-S_{\rm SG}[\phi]}\prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)},\end{aligned}\tag{1.30}$$

где

$$S_{\rm SG}[\phi]=\int d^2x\left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi}-\mu:\cos\beta\phi:\right)\tag{1.31}$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \qquad \mu = 2 r_0^{\frac{\pi}{g}-2}. \tag{1.32}$$

Действие мы переписали через перенормированные экспоненты. В дальнейшем мы будем большей частью опускать значки $:\cdots:$ и понимать под экспонентами именно перенормированные экспоненты.

Более подробно мы изучим эту модель в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\text{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\text{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\text{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\text{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода БКТ.

Задачи

1. Возьмите интеграл (1.8)

2. Выведите формулу (1.17).

3. Покажите, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle = \log \frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R.

4. Выясните, при каких условиях операторы $\mathrm{e}^{i\alpha_1\varphi_R(z)+i\beta_1\varphi_L(\bar z)}$ и $\mathrm{e}^{i\alpha_2\varphi_R(z')+i\beta_2\varphi_L(\bar z')}$ взаимно-локальны, то есть обладают корреляционными функциями, однозначными при обходе x вокруг x'.

5*. Предположим, что поле $\phi(x)$ с действием $S_0[\phi]$ определено на окружности радиуса R ($\phi \sim \phi + 2\pi R$) и живет на пространственной окружности ($x^1 \sim x^1 + 2\pi$) с периодическими граничными условиями. Покажите, что теория эквивалентна теории поля $\tilde\phi(x)$, определенного на окружности радиуса $2/R$ (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности $2\pi R$ (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.

Семинар 1

Экспоненциальные операторы в теории свободного скалярного поля.

Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$. Для этого поля можно записать разложение

$$\varphi(z) = Q - iP\log z + \sum_{k\neq 0} \frac{a_k}{ik} z^{-k}, \tag{1.33}$$

где эрмитовы операторы P, Q и операторы рождения-уничтожения $a_k = a_{-k}^+$ удовлетворяют соотношениям

$$[P,Q] = -i, \qquad [a_k, a_l] = k\delta_{k+l,0}. \tag{1.34}$$

Если определить вакуум $|0\rangle$ как

$$P|0\rangle = a_k|0\rangle = 0 \quad (k>0), \tag{1.35}$$

то нетрудно проверить, что

$$\langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle = \langle Q^2\rangle + \langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle_* = \langle Q^2\rangle + \log\frac{1}{z'-z}. \tag{1.36}$$

Неопределенное выражение $\langle Q^2\rangle$ можно отождествить с инфракрасным членом $\log R$ в (1.23). Также легко видеть, что стандартное нормальное упорядочение, которое ставит P справа от Q и a_k $(k>0)$ справа от a_{-k}, отвечает условию

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = {:}\varphi(z_1)\varphi(z_2){:} + \langle\varphi(z_1)\varphi(z_2)\rangle_*.$$

Более общо, нормальное упорядочение может быть задано рекурсионным соотношением

$${:}\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n){:}\,\varphi(z) = {:}\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)\varphi(z){:} + \sum_{i=1}^{n} {:}\varphi(z_1)\overset{\widehat{i}}{\cdots}\varphi(z_n){:}\,\langle\varphi(z_i)\varphi(z)\rangle_* \tag{1.37}$$

с начальным условии

$${:}1{:} = 1. \tag{1.38}$$

Здесь индекс $\hat{i}$ над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i-тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned}&{:}\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_m){:}\,{:}\varphi(w_1)\cdots\varphi(w_n){:} =\\ &\quad= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le m\\ 1\le j_1,\ldots,j_k\le n}} {:}\varphi(z_1)\overset{\widehat{i_1}\ldots\widehat{i_k}}{\cdots}\varphi(z_m)\varphi(w_1)\overset{\widehat{j_1}\ldots\widehat{j_k}}{\cdots}\varphi(w_n){:}\prod_{l=1}^{k}\langle\varphi(z_{i_l})\varphi(w_{j_l})\rangle_*.\end{aligned} \tag{1.39}$$

Вернемся к операторным экспонентам $e^{i\alpha\varphi(z)}$. Операторные произведения формальных экспонент

$$e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}e^{i\alpha_2\varphi(z_2)} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)} \tag{1.40}$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}\cdots e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}\rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i\alpha_i^2}\prod_{i<j}\left(\frac{z_i-z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} \tag{1.41}$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Можно проверить, что

$$\langle\, {:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\cdots+i\alpha_n\varphi(z_n)}{:}\,\rangle = \langle e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)Q}\rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum\alpha_i)^2}. \tag{1.42}$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$${:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}{:}\,{:}e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}{:} = (z_1-z_2)^{\alpha_1\alpha_2}\,{:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}{:}. \tag{1.43}$$

Отсюда нетрудно найти корреляционные функции

$$\langle\, {:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}{:}\cdots{:}e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}{:}\,\rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum\alpha_i)^2}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}. \tag{1.44}$$

Сравнивая это с (1.41), мы видим, что

$$e^{i\alpha\varphi(z)} = r_0^{\alpha^2/2}\,{:}e^{i\alpha\varphi(z)}{:},$$

то есть нормальные экспоненты, зависящие от одного поля $\varphi(z)$, представляют собой не что иное как перенормированные версии полных операторных экспонент, определенные в (1.24). В следующих лекциях, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знак нормального произведения.

Выражение (1.44) явно содержит инфракрасную обрезку R, но имеет хороший предел при $R\to\infty$:

$$\langle\, {:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}{:}\cdots{:}e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}{:}\,\rangle = \begin{cases}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i\alpha_i=0;\\ 0, & \text{если } \sum_i\alpha_i\ne0.\end{cases} \tag{1.45}$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle\, {:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\cdots+i\alpha_n\varphi(z_n)}{:}\,\rangle = \begin{cases}1, & \text{если } \sum_i\alpha_i=0;\\ 0, & \text{если } \sum_i\alpha_i\ne0.\end{cases} \tag{1.46}$$