Лекция 4
$O(N)$-модель: $1/N$-разложение

Снова рассмотрим общую $O(N)$-модель в пространстве Минковского:

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1. \tag{4.1}$$

В этой лекции мы обсудим предел больших N и специфическую теорию возмущений, с ним связанную [8] (см. также [9, 10]).

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\boldsymbol{n},\omega] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,((\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - \omega(\boldsymbol{n}^2 - 1)), \tag{4.2}$$

где вектор $\boldsymbol{n}$ теперь пробегает любые значения в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega\, D\boldsymbol{n}\, e^{iS[\boldsymbol{n},\omega] + ig^{-1/2}\int d^2x\, \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}}. \tag{4.3}$$

Интеграл по $\boldsymbol{n}$ — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\boldsymbol{n},\omega] + ig^{-1/2}\int d^2x\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega)\delta_{ij}\frac{n_j}{g^{1/2}}\right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}}\right) + i\int d^2x\,\frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega\,(\det(\partial_\mu^2+\omega))^{-N/2}\exp\left(i\int d^2x\,\frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2}\int d^2x\,d^2x'\,J_i(x)G(x,x'|\omega)J_i(x')\right),$$

где $G(x,x'|\omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x,x'|\omega) = \delta(x - x'). \tag{4.4}$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega\,\exp\left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2}\int d^2x\,d^2x'\,J_i(x)G(x,x'|\omega)J_i(x')\right), \tag{4.5}$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(\partial_\mu^2+\omega) + \int d^2x\,\frac{\omega}{2g}. \tag{4.6}$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N\to\infty$. Предположим, что точке перевала отвечает постоянное решение:

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\log(\partial_\mu^2+\omega_0) &= V\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\log(\omega_0 - k^2 - i0)\\
&= iV\int_E\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\log(\omega_0+k^2)\\
&\frac{iV}{2\pi}\int_0^\Lambda dk\,k\log(\omega_0+k^2) = \frac{iV}{4\pi}\int_{\omega_0}^{\omega_0+\Lambda^2}du\,\log u = \frac{iV}{4\pi}\left[u\log\frac{u}{e}\right]_{\omega_0}^{\omega_0+\Lambda^2}\\
&= \frac{iV}{4\pi}\left((\omega_0+\Lambda^2)\log\frac{\omega_0+\Lambda^2}{e} - \omega_0\log\frac{\omega_0}{e}\right) = \frac{iV}{4\pi}\left(\omega_0\log\frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2\log\frac{\omega_0+\Lambda^2}{e}\right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под знаком логарифма мы пренебрегли ω_0 в выражении $\Lambda^2 + \omega_0$ в первом слагаемом. Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V\left(-\frac{N}{8\pi}\log\frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g}\right).$$

Отсюда получаем

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{Ng}\right). \tag{4.8}$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \to \infty$ следует устремить к нулю g таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d\log\Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi}g^2. \tag{4.9}$$

Важно, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2}\rho(x). \tag{4.10}$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2}\rho(x)$:

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log\left(1 + (2/N)^{1/2}\rho(\partial_\mu^2 + m^2)^{-1}\right) + \frac{1}{(2N)^{1/2}g}\operatorname{tr}\rho \\
&= \text{const} + i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(1 + i(2/N)^{1/2}\rho G_0) + \frac{1}{(2N)^{1/2}g}\operatorname{tr}\rho \\
&= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2}g}\operatorname{tr}\rho - \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}\operatorname{tr}\rho G_0\right) - i\frac{N}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n(2/N)^{n/2}}{n}\operatorname{tr}(\rho G_0)^n.
\end{aligned}$$

Здесь $G_0 = -i(\partial_\mu^2 + m^2)^{-1}$ — оператор с ядром $G_0(x,x') = G(x,x'|m^2)$.

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что $\omega = m^2$ является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\rho &= \int d^2x\,\rho(x), \\
\operatorname{tr}\rho G_0 &= \int d^2x\,\rho(x)G_0(x,x) = G_0(0,0)\int d^2x\,\rho(x) = G_0(0,0)\operatorname{tr}\rho \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{i}{k^2 - m^2 + i0}\operatorname{tr}\rho = \frac{1}{4\pi}\log\frac{\Lambda^2}{m^2}\operatorname{tr}\rho = (gN)^{-1}\operatorname{tr}\rho.
\end{aligned}$$

Мы видим, что скобка в самом деле обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ($n = 2$), можно убедиться, что точка $\omega = m^2$ является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i\frac{N}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n(2/N)^{n/2}}{n}\int d^{2n}x\,\rho(x_1)G_0(x_1,x_2)\ldots\rho(x_n)G_0(x_n,x_1). \tag{4.11}$$

Разложение начинается с квадратичного члена вида

$$\frac{i}{2}\int d^2x_1\,d^2x_2\,\rho(x_1)G_0(x_1,x_2)\rho(x_2)G_0(x_2,x_1).$$

Поэтому пропагатор $D(x_1,x_2)$ поля $\rho(x)$ есть ядро оператора, обратного к оператору с ядром

$$D^{-1}(x_1,x_2)=G_0(x_1,x_2)G_0(x_2,x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель $(2/N)^{1/2}$ перед ρ. Он позволил избавиться от коэффициента $2/N$ в пропагаторе $D(x_1,x_2)$.

Переходя к импульсному представлению, получим

$$D(k)=\quad \overset{k}{\text{- - - - - - - - - - -}} \quad =L^{-1}(k^2)=-\left(\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(q^2-m^2+i0)((q+k)^2-m^2+i0)}\right)^{-1}. \tag{4.12}$$

Мы уже вычисляли эту величину на прошлой лекции:

$$D(k)=4\pi i m^2\,\frac{\operatorname{sh}\theta}{\theta},\qquad k^2=-4m^2\operatorname{sh}^2\frac{\theta}{2}. \tag{4.13}$$

Кроме того, оператор $G(x,x'|\omega)$, входящий в (4.5), тоже следует разложить по $\rho(x)$:

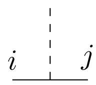
$$G[\omega]=\frac{1}{G_0^{-1}+i(2/N)^{1/2}\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\tfrac{2}{N}\right)^{n/2}G_0(\rho G_0)^n$$

$$G(x_1,x_2|\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\frac{2}{N}\right)^{n/2}\int d^{2n}y\,G_0(x_1,y_1)\rho(y_1)G_0(y_1,y_2)\ldots\rho(y_n)G_0(y_n,x_2).$$

Изобразим $G_0(x_1,x_2)$ сплошной линией:

$$G_0(p)_{ij}=\quad i\ \overset{p}{\overline{\hspace{4em}}}\ j\quad =G_0(p)\delta_{ij}=\frac{i\delta_{ij}}{p^2-m^2+i0}. \tag{4.14}$$

Если еще ввести вершину



$$=-i\left(\frac{2}{N}\right)^{1/2}\delta_{ij}, \tag{4.15}$$

можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1. Диаграмма состоит из пунктирных линий (4.12), сплошных линий (4.14) и вершин (4.15).

2. Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам $\varphi_i=g^{-1/2}n_i$.

3. Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи g. Порядок диаграммы по $1/N$ равен $\frac{1}{2}V-L$, где V — число вершин, а L — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи g, массой m и параметром обрезания Λ можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle\sum_{i=1}^{N}\varphi_i^2(x)\right\rangle=\frac{1}{g}.$$

Например в порядке $1/N$ можно получить:

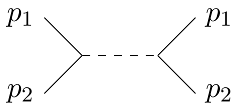
$$m^2=\Lambda^2\exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right),\qquad \frac{1}{g'}=\frac{1}{g}+\frac{\Lambda^2}{4\pi m^2\log(\Lambda^2/m^2)}. \tag{4.16}$$

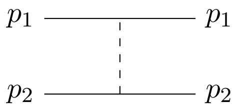
Добавка к обратной константе связи представляет собой вклад специфической для сигма-модели квадратичной расходимости. Расходимость становится логарифмической, если мы добавляем в действие (4.2) член вида $\int d^2x\,\omega^2$, «размывающий» дельта-функцию в функциональном интеграле.

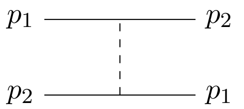
Давайте теперь попробуем вычислить S-матрицу $O(N)$-модели. Условие совместимости с $O(N)$-симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \tag{4.17}$$

В порядке $1/N$ матричные элементы даются следующими диаграммами:

$4m^2 \operatorname{sh}\theta\, S_1(\theta) =$  ,

$4m^2 \operatorname{sh}\theta\, (S_2(\theta) - 1) =$  ,

$4m^2 \operatorname{sh}\theta\, S_3(\theta) =$  .

Используя (4.13), получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh}\theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Задачи

1. Модель Гросса—Невё для N-компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ-матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \, \left(\frac{i}{2}\bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8}(\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до N; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$).
Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \, \left(\frac{1}{2}\bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x))\psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp\left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

2. Постройте диаграммную технику для $1/N$-разложения в модели Гросса—Невё. Найдите S-матрицу в древесном приближении.

3. Найдите расходящуюся часть массового оператора в порядке $1/N$ для $O(N)$-модели. Покажите, что постоянный вклад квадратично расходится по Λ, а вклад, пропорциональный $p^2 - m^2$ имеет дважды логарифмическую расходимость.

4. Рассмотрите модель с ослабленным условием на $\boldsymbol{n}^2$:

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x \, \left((\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - \frac{2\mu^2}{g}(\boldsymbol{n}^2 - 1)^2 \right), \tag{4.19}$$

где μ — постоянная размерности массы. Покажите, что в пределе $\mu \to \infty$ модель переходит в сигма-модель (4.1). Найдите массу возбуждений в модели (4.19) в главном порядке. Покажите, что S-матрица в древесном приближении также совпадает с матрицей рассеяния сигма-модели (4.18).

5*. Выведите формулу (4.16).

Семинар 4

Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Вернемся к возмущенной конформной теории с действием (2.36). В исходной конформной теории поля мы имеем операторные разложения для тензора энергии-импульса и примарных операторов. Продолжим их на регулярные члены:

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + {}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times} + O(z'-z), \tag{4.20}$$

$$T(z')\Phi_\Delta(z,\bar z) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(z,\bar z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(z)}{z'-z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta(z,\bar z) + (z'-z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta(z,\bar z) + \cdots. \tag{4.21}$$

Операторы $\mathcal{L}_k$ представляют собой образующие алгебры Вирасоро, действующий на пространстве локальных операторов:

$$\mathcal{L}_k\mathcal{O}(z,\bar z) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n+1}T(w)\mathcal{O}(z,\bar z),$$

где интеграл берется по маленькой окружности вокруг точки z. Не будем забывать также, что $\mathcal{L}_{-1} = \partial$ при действии на любой локальный оператор.

Выражение (4.20) определяет новый оператор ${}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times}$, который мы будем понимать как регуляризованный квадрат компоненты тензора энергии-импульса. В конформной теории он представляет собой сохраняющийся ток: $\bar\partial\,{}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times} = 0$. Более того, соответствующий интеграл движения коммутирует с операторами энергии и импульса. Попробуем найти условие, при котором этот оператор является компонентой сохраняющегося тока в возмущенной теории [7]. Для этого возьмем интеграл

$$\int d^2x'\,\bar\partial\,{}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times}\,\Phi_\Delta(z',\bar z') = \lim_{\delta\to0}\int d^2x'\,\partial_{\bar z}\left(T(z+\delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta}\right)\Phi_\Delta(z',\bar z')$$

Будем понимать под $T(z+\delta)$ оператор $T(z+\delta,\bar z)$. Корректность такого определения можно обосновать переходом к пространству Минковского и обратно. Нам это будет важно, чтобы избавиться от необходимости разложений по $\bar\delta$. Пользуясь (2.38), находим

$$\begin{aligned}
&\int d^2x'\,\bar\partial\,{}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times}\,\Phi_\Delta(z',\bar z')\\
&\quad= \pi(1-\Delta)\lim_{\delta\to0}\left(\partial\Phi_\Delta(z+\delta,\bar z)\,T(z) + T(z+\delta)\,\partial\Phi_\Delta(z,\bar z) - \frac{2\partial\Phi_\Delta(z,\bar z)}{\delta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\Delta(z,\bar z)}{\delta}\right)\\
&\qquad= \pi(1-\Delta)\lim_{\delta\to0}\Big(\partial\big(\Phi_\Delta(z+\delta,\bar z)T(z)\big) + \partial\big(T(z+\delta)\Phi_\Delta(z,\bar z)\big)\\
&\qquad\qquad - \Phi_\Delta(z+\delta,\bar z)\,\partial T(z) - \partial T(z+\delta)\,\Phi_\Delta(z,\bar z) - \frac{2\partial\Phi_\Delta(z,\bar z)}{\delta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\Delta(z,\bar z)}{\delta}\Big)
\end{aligned}$$

Далее, нужно применить (4.21) к оставшимся произведениям и разложить слагаемые по степеням δ. Результат оказывается регулярным и равным

$$\int d^2x'\,\bar\partial\,{}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times}\,\Phi_\Delta(z',\bar z') = \pi(1-\Delta)\left(-2\mathcal{L}_{-3} + 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{\Delta-3}{6}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi(z,\bar z). \tag{4.22}$$

Второе и третье слагаемое в правой части имеют вид полной производной по z. Но первое слагаемое не имеет нужного вида. Поэтому для произвольного возмущения оператор ${}^{\times}_{\times}T^2(z)^{\times}_{\times}$ не является компонентой сохраняющегося тока.

В каких случаях первое слагаемое могло бы стать полной производной? Это может быть в случае, когда имеется линейное соотношение между $\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta$ и $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta$, $\mathcal{L}_{-1}^3\Phi_\Delta$, то есть при наличии нуль-вектора на уровне три. Это имеет место при специальных значениях Δ:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta+2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_\Delta = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}.$$

В случае $c < 1$ конформная размерность Δ_{31} больше единицы и возмущение оператором Φ_{31} иррелевантно. Единственным релевантным возмущением остается возмущение оператором $\Phi_{13} = \Phi_{\Delta_{13}}$. Отметим, что для разбиения действия модели синус-Гордона (3.35) оператор возмущения $\mathrm{e}^{i\beta\phi}$ как раз имеет размерность $\Delta_{13} = \beta^2 - 1$. Таким образом, эта конструкция дает высший интеграл движения для модели синус-Гордона.