Лекция 10
Интегралы движения и матрицы рассеяния

Вернемся к формулам из лекции 5 для асимптотической волновой функции n частиц

$$\psi_{\beta_1 p_1,\dots,\beta_n p_n}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n)=\sum_{\tau\in S_n} A^{\alpha_{\sigma_1}\dots\alpha_{\sigma_n}}_{\beta_1\ \dots\beta_n}[\tau]e^{i\sum_{i=1}^n p_{\tau_i}x_{\sigma_i}}$$
$$\text{при}\quad x_{\sigma_1}<x_{\sigma_2}<\dots<x_{\sigma_n},\quad |x_i-x_j|\gg R. \tag{10.1}$$

Мы говорили, что внешние значки β_i можно определить условием

$$A^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_n}[\mathrm{id}]=\prod_{i=1}^n\delta^{\alpha_i}_{\beta_i}. \tag{10.2}$$

Эти условия выбраны так, чтобы значки β_i совпадали со значками внутренних состояний α_i частиц во входящем канале при условии $p_1>p_2>\dots>p_n$. В остальных случаях матричные элементы по этим векторам будут аналитическими продолжениями «правильных» матричных элементов. Эта аналитичность нам сегодня пригодится.

Эти формулы верны не только для $O(N)$-модели, но для любой системы бозонных частиц. Обратим внимание на то, как меняются волновые функции при перестановке индексов $\beta_i p_i\leftrightarrow\beta_j p_j$:

$$\psi_{\dots,\beta_i p_i,\beta_{i+1}p_{i+1},\dots}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n)=\sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}} S(p_i,p_{i+1})^{\beta'_i\beta'_{i+1}}_{\beta_i\beta_{i+1}}\psi_{\dots,\beta'_{i+1}p_{i+1},\beta'_i p_i,\dots}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n). \tag{10.3}$$

Поскольку вывод этой формулы составляет задачу 5 лекции 5, я не привожу здесь вывод полностью. Для ясности приведу вывод для волновой функции двух частиц. Если $x_1<x_2$, имеем

$$\begin{aligned}\psi_{\beta_1p_1,\beta_2p_2}(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2)&=\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}+S(p_1,p_2)^{\alpha_2\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}\\&=\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(p_1,p_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}\left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2}\delta^{\alpha_2}_{\beta'_1}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}+S^{-1}(p_1,p_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta'_1\beta'_2}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}\right)\\&=\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(p_1,p_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}\left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2}\delta^{\alpha_2}_{\beta'_1}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}+S(p_2,p_1)^{\alpha_2\alpha_1}_{\beta'_2\beta'_1}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}\right)\\&=\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(p_1,p_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}\psi_{\beta'_2p_2,\beta'_1p_1}(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2).\end{aligned}$$

Будем считать, что волновая функция $\psi_{\beta_1p_1,\dots,\beta_np_n}$ задает состояние $|p_1,\dots,p_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n}$ с точностью до вещественного симметричного по импульсам нормировочного множителя. Поскольку нас интересуют релятивистские теории, перейдем от импульсов к быстротам: $p_i=m_i\operatorname{ch}\theta_i$. Тогда

$$|\dots,\theta_i,\theta_{i+1},\dots\rangle_{\dots\beta_i\beta_{i+1}\dots}=\sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}}S(\theta_i-\theta_{i+1})^{\beta'_i\beta'_{i+1}}_{\beta_i\beta_{i+1}}|\dots,\theta_{i+1},\theta_i,\dots\rangle_{\dots\beta'_{i+1}\beta'_i\dots}. \tag{10.4}$$

Это равенство можно записать короче. Напомню, что мы считаем все частицы одной массы одной частицей. Пусть $V^{(\nu)}$ — пространство состояний частицы сорта ν, а векторы $e^\beta_{(\nu)}$ являются проекциями состояний β на пространство V_ν. Используя обозначение

$$|\nu_1\theta_1,\dots,\nu_N\theta_n\rangle=\sum_{\beta_1,\dots,\beta_n}|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n}e^{\beta_1}_{(\nu_1)}\otimes\dots\otimes e^{\beta_n}_{(\nu_n)}, \tag{10.5}$$

получаем

$$|\dots,\nu_i\theta_i,\nu_{i+1}\theta_{i+1},\dots\rangle=S^{(\nu_i,\nu_{i+1})}_{i,i+1}(\theta_i-\theta_{i+1})|\dots,\nu_{i+1}\theta_{i+1},\nu_i\theta_i,\dots\rangle. \tag{10.6}$$

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:[1]

$$\begin{aligned}
V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} &= |\theta,\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\ldots\beta_n},\\
V^\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} &= \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta-\theta_k)\\
&\quad\times\sum_{\substack{\beta'_1,\ldots,\beta'_{k-1}\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}}\delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k}\prod_{i=1}^{k-1}S(\theta_i-\theta_k)^{\beta'_i\alpha_i}_{\beta_i\alpha_{i+1}}|\theta_1,\ldots,\hat\theta_k,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\ldots\beta'_{k-1}\hat\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_n}.
\end{aligned}\tag{10.7}$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\beta_2}_{\beta'_1\beta'_2}V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)=0,\tag{10.8a}$$

$$V^+_{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_1-\theta_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^+_{\beta'_1}(\theta_1)=0,\tag{10.8b}$$

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_2-\theta_1)^{\beta'_2\beta_1}_{\beta_2\beta'_1}V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)=2\pi\delta^{\beta_1}_{\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2).\tag{10.8c}$$

Алгебра с такими соотношениями называется *алгеброй Фаддеева—Замолодчикова.* Обратим внимание, что, с учетом условия кроссинг-симметрии (5.29), эти уравнения могут быть записаны в одну строчку

$$\begin{aligned}
V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\beta_2}_{\beta'_1\beta'_2}V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)&=2\pi C^{\beta_1\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)\\
&\quad-2\pi\sum_{\beta'_1\beta'_2}C^{\beta'_1\beta'_2}S(-i\pi)^{\beta_2\beta_1}_{\beta'_2\beta'_1}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi),
\end{aligned}\tag{10.9}$$

если положить

$$V^+_\alpha(\theta)=\sum_\beta C_{\alpha\beta}V^\beta(\theta-i\pi).\tag{10.10}$$

Здесь $C_{\alpha\beta}$ — матрица CPT-преобразования, представляющая собой симметричную матрицу, для которой существует унитарная матрица U, такая что $UCU^t=1$. В уравнении (10.9) мы считаем, что переменные θ_i могут пробегать значения на двух (направленных, по соглашению, слева направо) прямых:

$$\theta_i\in\mathcal{C}_{\rightrightarrows}\equiv\mathbb{R}\cup(\mathbb{R}-i\pi).\tag{10.11}$$

Обратим внимание еще на один важный момент. Вообще говоря, матрица $S(i\pi)$ не обязана быть обратимой, так что матрица $S(-i\pi)$ может не существовать. Это случается, например, когда $S(0)=\pm P$ при размерности пространства внутренних состояний больше 1. Но произведение $S_{12}(-i\pi+\varepsilon)C_{12}$ имеет конечный предел при $\varepsilon\to0$. Например, для модели синус-Гордона и $O(N)$-моделей этот предел равен $-C_{12}$.

Пусть теперь $\hat I_s$ — локальный интеграл движения спина s, причем в выбранном базисе действие интегралов движения диагонализуется:

$$\hat I_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n}=I_s(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\beta_1\ldots\beta_n}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n},\qquad I_s(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\beta_1\ldots\beta_n}=\sum_{i=1}^n I_{s,\beta_i}e^{s\theta_i}.\tag{10.12}$$

Отсюда очевидно следуют коммутационные соотношения

$$[\hat I_s,V^+_\beta(\theta)]=I_{s,\beta}e^{s\theta}V^+_\beta(\theta),\qquad[\hat I_s,V^\beta(\theta)]=-I_{s,\beta}e^{s\theta}V^\beta(\theta).\tag{10.13}$$

[1]Здесь написаны формулы только для различных значений θ_i. Для совпадающих значений в случае «бозонной» статистики нужно добавить обычные множители (корни из чисел заполнения).

Согласие с условием кроссинг-симметрии в виде (10.10) накладывает на собственные значения ограничение

$$I_{s,\alpha}\delta^{\alpha}_{\alpha'} = (-1)^{s-1}\sum_{\beta} C^{\alpha\beta} I_{s,\beta} C_{\beta\alpha'}. \tag{10.14}$$

Отсюда немедленно следует

Теорема 10.1 *Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.*

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C=1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1}=(-1)^{s-1}I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1}=0$.

Пусть теперь в системе имеется частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C=\sigma^1$ (в этом блоке), такие что матричный элемент $1+\bar{1}\to\bar{1}+1$ не равен нулю. Тогда $I_{s,1}=(-1)^{s-1}I_{s,\bar{1}}$. Рассмотрим процесс рассеяния частицы с быстротой θ_1 и античастицы с быстротой θ_2. Тогда до и после рассеяния собственные значения интегралов движения должны быть одинаковы:

$$I_{s,1}e^{s\theta_1} + I_{s,\bar{1}}e^{s\theta_2} = I_{s,\bar{1}}e^{s\theta_1} + I_{s,1}e^{s\theta_2}.$$

Это значит, что $I_{s,1}=I_{s,\bar{1}}=(-1)^{s-1}I_{s,1}$. Отсюда заключаем, что $I_{2n,1}=0$.

Теперь мы видим причину, почему модель синус-Гордона имеет только интегралы движения нечетных спинов. Однако ограничения на спины интегралов движения могут иметь и другой характер: они могут быть связаны со связанными состояниями.

Посмотрим, как ведут себя интегралы движения на связанных состояниях. Вспомним формулу (8.45) и картинку к ней (8.44). Слиянию двух линий на картинке следует сопоставить слияние операторов V:

$$V^c(\theta) = \sum_{a,b}\Gamma^c_{ab}V^b(\theta - i\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}})V^a(\theta + i\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a}). \tag{10.15}$$

Суммирование по a и b ведется только по внутренним состояниям частиц a и b соответственно. Из коммутационных соотношений (10.13) получаем

$$I_{s,c} = I_{s,a}e^{is\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a}} + I_{s,b}e^{-is\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}}}. \tag{10.16}$$

Дополнительные ограничения возникают, когда при последовательном построении связанных состояний какое-то связанное состояние совпадает с одной из «элементарных» частиц, из которых оно построено.

Приведем пример. Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2=4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{10.17}$$

Мы хотим построить на основе этой S-матрицы модель, которая содержала бы эту частицу как элементарную. Разумеется, такая модель (если она возможна) будет редукцией модели синус-Гордона, так как ее пространство состояний будем меньше пространства состояний модели синус-Гордона. S-матрица (10.17) имеет полюс на физическом листе: $\theta=2\pi i/3$, однако знак вычета этого полюса по переменной $u=-i\theta$ отрицательный. В модели синус-Гордона это значило, что этот полюс не отвечает связанному состоянию. Но модель синус-Гордона — унитарная в том смысле, что все ее состояния имеют положительную норму, а редуцированная модель не обязана быть унитарной. Поэтому предположим, что этому полюсу отвечает частица. Назовем ее 2. Нетрудно проверить, что масса частицы 2 равна массе M_1 первого бризера:

$$M_2 = 2M_1\cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

а ее матрицы рассеяния с первым бризером и с собой совпадают с $S_{11}(\theta)$:

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Вообще говоря, это не значит, что она совпадает с первым бризером, но если это не так, возникает следующее состояние, которое имеет ту же массу и матрицу рассеяния и т.д. Давайте замкнем спектр частиц на одной частице и *постулируем*, что в нашей теории связанное состояние двух частиц 1 является частицей 1: $2 = 1$. Уравнение (10.16) в этом случае имеет вид:

$$I_{s,1} = 2I_{s,1}\cos\frac{\pi s}{3}.$$

Отсюда заключаем, что интегралы движения отвечают только таким спинам, что $\cos\frac{\pi s}{3} = \frac{1}{2}$, то есть $s = \pm 1 \pmod 6$. Все эти спины нечетные, так что никаких дополнительных ограничений мы не видим. Спектр спинов интегралов движения отвечает Φ_{12}-возмущениям минимальных конформных моделей. Возмущению какой именно модели отвечает эта теория рассеяния? Как правильно отвечать на этот вопрос, мы разберем в следующей лекции, а сейчас ограничимся эвристическим рассуждением.

Рассмотрим модель синус-Гордона. Как мы уже это делали на семинаре к лекции 2, разобьем действие следующим образом:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2}e^{-i\beta\phi}\right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2}\int d^2x\, e^{i\beta\phi}. \tag{10.18}$$

и будем изучать теорию возмущений по $\mathcal{S}_1$. На семинаре мы уже убедились, что первый член описывает некоторую (вообще говоря, неунитарную) конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Эта теория наверняка шире, чем минимальная конформная теория поля и каким-то образом содержит ее.[2] Сравнивая с (9.17), легко заключить, что $\alpha_+ = \beta/\sqrt{2}$, $\alpha_- = -\sqrt{2}/\beta$. Конформная размерность оператора возмущения $e^{-i\beta\phi}$ в этой конформной теории поля равна

$$\Delta_{\mathrm{p}} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(3\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2 = \Delta_{13}. \tag{10.19}$$

Гипотеза состоит в том, что некоторые редукции модели синус-Гордона описывают Φ_{13}-возмущения конформных моделей. Поэтому S-матрицы возмущенных минимальных моделей можно получить из S-матриц модели синус-Гордона в подходящем базисе.

Вернемся к модели с матрицей рассеяния (10.17). Эта модель представляет собой редукцию модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$, то есть, как мы ожидаем, Φ_{13}-возмущения минимальной конформной модели с центральным зарядом $c = 1 - 6(\sqrt{5/2} - \sqrt{2/5})^2 = -22/5$. Это — минимальная модель $M(2,5)$, иначе именуемая моделью Ли—Янга. Эта модель содержит всего два примарных поля с размерностями

$$\Delta_{11} = \Delta_{14} = 0, \qquad \Delta_{12} = \Delta_{13} = -1/5.$$

Таким образом, в этой модели Φ_{13}-возмущение совпадает с Φ_{12}-возмущением, что объясняет спектр спинов интегралов движения.

Попробуем продолжить серию моделей с частицами, которые даются бризерным сектором модели синус-Гордона. Массы бризеров, как мы помним, даются формулой

$$M_n = 2M_{\mathrm{kink}}\sin\frac{\pi p n}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, < 1/p, \qquad \beta^2 = 2\frac{p}{p+1}.$$

[2] Минимальные конформные теории поля получаются из них так называемой фельдеровской редукцией. Пространства состояний минимальных моделей находятся как когомологии некоторого сложно устроенного нильпотентного оператора.

Давайте продолжим спектр бризеров за предел $1/p$ и потребуем, чтобы спектр частиц после этого допускал замыкание на «правильные» бризеры. Это так, если $2/p$ — целое число. Тогда $M_n = M_{2/p-n}$. Тут возможны два случая. Если $2/p$ четно, это формально соответствует минимальной модели $M(1,1/p)$, обладающей сложными свойствами. Ее таблица Каца пуста, но в ней есть так называемые логарифмические операторы. В модели синус-Гордона они отвечают безотражательным точкам, когда амплитуда отражения антисолитона на солитоне $c(\theta) = 0$. Мы не будем рассматривать этот случай.

Изучим второй случай, отвечающий

$$\frac{2}{p} = 2N-1, \qquad N = 2,3,\ldots; \qquad M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin\frac{\pi n}{2N-1}}{\sin\frac{\pi}{2N-1}} \quad (n = 1,2,\ldots,2N-2). \tag{10.20}$$

Этот случай отвечает, как мы ожидаем, Φ_{13}-возмущению «ленточных» минимальных моделей $M(2, 2N+1)$, примарные операторы $\Phi_{1n} = \Phi_{1,2N+1-n}$ которых имеют размерности

$$\Delta_{1n} = -\frac{(n-1)(2N-n)}{2(2N+1)} \quad (n = 1,2,\ldots,2N). \tag{10.21}$$

Нетрудно показать, что

$$S_{n,2N-1-n'}(\theta) = S_{nn'}(\theta), \tag{10.22}$$

что согласуется с отождествлением частиц $n = (2N-1-n)$. Посмотрим, как это отождествление ограничивает набор интегралов движения. Как видно из спектра масс, n-тая частица представляет собой связанное состояние частиц $(n-1)$ и 1 с параметрами

$$\bar{u}^1_{n,n-1} = \frac{\pi}{2N-1}, \qquad \bar{u}^{n-1}_{1n} = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \tag{10.23}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} I_{s,n} = I_{s,n-1}e^{i\pi s/(2N-1)} + I_{s,1}e^{-i\pi s(n-1)/(2N-1)} &= I_{s,1}\sum_{k=1}^{n} e^{i\pi s(n+1-2k)/(2N-1)} \\ &= I_{s,1} \times \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{\pi s n}{2N-1}}{\sin\frac{\pi s}{2N-1}}, & s \neq 0 \pmod{2N-1}; \\ n(-1)^{s(n+1)/(2N-1)}, & s = 0 \pmod{2N-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Потребовав $I_{s,2N-2} = I_{s,1}$, получаем, что $s \neq 0 \pmod{2N-1}$ и $(-1)^{s-1} = 1$, то есть спины нечетны и не кратны $2N-1$. Это соответствует спектру Φ_{13}-возмущений «ленточных» моделей, описанному в прошлой лекции.

Хотя мы рассматривали очень частные модели, наши рассуждения вполне достаточны для доказательства следующей теоремы:

Теорема 10.2 *Если теория содержит нейтральную частицу обладающую Φ^n-свойством, то есть, если имеется цепочка последовательных $n-2$ слияний:*

$$1+1 \to 2,\ 1+2 \to 3,\ \ldots,\ (n-2)+1 \to 1,$$

причем каждая следующая частица 1 в цепочке отстоит от предыдущей на один и тот же угол u^2_{11} в одном и том же направлении,[3] *собственные значения интегралов движения спинов кратных n равны нулю на этой частице.*

Центральные заряды и конформные размерности в моделях, о которых мы до сих пор говорили, отрицательны, так что модели неунитарны. Попробуем изучить какую-нибудь унитарную модель. Рассмотрим конформную модель $M(3,4)$ $(c = 1/2)$, отвечающую скейлинговому пределу модели Изинга. В этой модели в симметричном секторе имеется три примарных оператора:

$$\Phi_{11} = \Phi_{23} = 1:\ \Delta_{11} = 0; \qquad \Phi_{21} = \Phi_{13} = \varepsilon:\ \Delta_{13} = \frac{1}{2}; \qquad \Phi_{22} = \Phi_{33} = \sigma:\ \Delta_{22} = \frac{1}{16}. \tag{10.24}$$

[3] Это значит, что все слияния связаны с одним и тем же полюсом в матрице $S_{11}(\theta)$, входящей в каждую матрицу $S_{k1}(\theta)$ с наименьшей мнимой частью.

Оператор ε принято называть энергетическим оператором, хотя, строго говоря, он отвечает плотности энтропии магнетика. В представлении свободными фермионами это оператор $\bar{\psi}\psi$, а коэффициент при нем есть масса фермиона, которая, как известно, пропорциональна $T-T_c$. Оператор σ пропорционален намагниченности и коэффициент при нем пропорционален внешнему магнитному полю. То есть, общее возмущение теории имеет (в эвклидовом пространстве) вид:[4]

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{M(3,4)} + \tau \int d^2x\, \varepsilon(x) - h \int d^2x\, \sigma(x), \qquad \tau \sim \frac{T-T_c}{T_c}, \qquad h \sim H_{\text{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. В то же время по-отдельности теории с $h=0$ (температурное возмущение) и $\tau=0$ (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.

С другой стороны мы знаем, что модель Изинга соответствует классической теории Ландау со свободной энергией

$$F[\sigma] = \int d^2x \left(\frac{g}{2}(\nabla\sigma)^2 - h\sigma + \frac{a\tau\sigma^2}{2} + \frac{b\sigma^4}{4!} + \cdots \right). \tag{10.25}$$

Теория Ландау является теорией среднего поля и теряет применимость в достаточно малой окрестности критической точки (флуктуационной области). Но свободную энергию (10.25) можно использовать ка «затравочное действие» для флуктуационной теории.

Рассмотрим сначала температурное возмущение. Теория Ландау здесь не очень полезна. Зато имеется точное и явное решение, сводящее теорию к свободному майорановским фермиону с эвклидовым действием $S[\psi] = \frac{1}{2}\int d^2x\, \bar{\psi}(i\hat{\partial}+m)\psi$. Соответственно, если описывать частицы бозонным полем σ, матрица рассеяния будет равна $S(\theta)=-1$. Интегралы движения выражаются явно через фермионное поле (см. задачу к предыдущей лекции).

Теперь рассмотрим возмущение магнитным полем [16]. Размерность константы связи h равна $2-1/8=15/8$. Так как в теории больше нет размерных постоянных, массы частиц пропорциональны $h^{8/15}$. Пусть m_1 — масса самой легкой частицы 1. Предположим, что это — нейтральная частица, связанная с флуктуациями параметра порядка. Вспомним, что спины интегралов движения модели равны

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \tag{10.26}$$

Обратим внимание, что в этом спектре отсутствуют спины кратные 3. Это может говорить о том, что частица обладает Φ^3-свойством в согласии с теорией Ландау. Действительно, при $\tau=0$ параметр порядка σ в свободной энергии Ландау имеет минимум в точке $\sigma=\sigma_0=(6h/b)^{1/3}$. Вблизи минимума свободную энергию можно разложить по $\varphi=\sigma-\sigma_0$:

$$F[\sigma_0+\varphi] = \text{const} + \int d^2x \left(\frac{g}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{b^{1/3}(6h)^{2/3}\varphi^2}{4} + h\varphi^3 + \frac{b\varphi^4}{4!} + \cdots \right).$$

Заметим, что критические индексы при $T=T_c$ в теории Ландау не слишком сильно отличаются от точных критических индексов (что не так при $T\neq T_c$).

Кроме того, в спектре отсутствуют спины кратные 5. Для того, чтобы выполнялось Φ^5-свойство необходимо, чтобы была еще одна частица 2, которая была бы связанным состоянием $1+1$, и при этом частица 1 была бы связанным состоянием $2+2$. Из (10.16) находим уравнения

$$I_{s,2} = 2I_{s,1}\cos s\bar{u}_{21}^1, \qquad I_{s,1} = 2I_{s,2}\cos s\bar{u}_{12}^2$$

для всех s из (10.26). Отсюда

$$4\cos s\bar{u}_{21}^1 \cos s\bar{u}_{12}^2 = 1.$$

При условии $2\cos\bar{u}_{21}^1 = m_2/m_1 > 1$ эта система уравнений имеет решение

$$\bar{u}_{21}^1 = \frac{\pi}{5}, \qquad \bar{u}_{12}^2 = \frac{2\pi}{5}. \tag{10.27}$$

[4]В пространстве Минковского только меняются знаки перед τ и h.

Отсюда находим
$$\frac{m_2}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \tag{10.28}$$
Теперь нам нужно найти S-матрицу $S_{11}(\theta)$, удовлетворяющую обычным условиям $S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi-\theta) = S_{11}^{-1}(-\theta)$ и условию
$$S_{11}\left(\theta+\frac{i\pi}{3}\right)S_{11}\left(\theta-\frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{10.29}$$
как и для модели Ли—Янга, но при этом также имеющую полюс при $-i\theta = \frac{2\pi}{5}$ с положительным вычетом. Из (10.29) немедленно следует, что S-матрица имеет полюсы при $-i\theta = \frac{\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$ от первого сомножителя, причем второй (возникающий в силу кроссинг-симметрии) полюс должен иметь отрицательный вычет, чтобы не было частиц меньшей массы. Возможные полюсы $-i\theta = \frac{11\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$ от второго сомножителя сокращаются нулями от первого сомножителя:
$$S_{11}\left(\frac{11\pi i}{15}+\frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}\left(i\pi+\frac{i\pi}{15}\right) = S_{11}\left(-\frac{i\pi}{15}\right) = S_{11}^{-1}\left(\frac{i\pi}{15}\right) = 0.$$
Нетрудно подобрать S_{11} в виде
$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{\theta+2\pi i/3}{2}\operatorname{th}\frac{\theta+2\pi i/5}{2}\operatorname{th}\frac{\theta+\pi i/15}{2}}{\operatorname{th}\frac{\theta-2\pi i/3}{2}\operatorname{th}\frac{\theta-2\pi i/5}{2}\operatorname{th}\frac{\theta-\pi i/15}{2}}. \tag{10.30}$$
Полюс в точке $-i\theta = \frac{\pi}{15}$ имеет положительный вычет, и, таким образом, в системе имеется еще одна частица 3:
$$\bar{u}_{31}^1 = \frac{\pi}{30}, \qquad \frac{m_3}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \tag{10.31}$$
Далее, амплитуда рассеяния
$$S_{12}(\theta) = S_{11}\left(\theta+\frac{i\pi}{5}\right)S_{11}\left(\theta-\frac{i\pi}{5}\right) \tag{10.32}$$
имеет полюсы в точках $-i\theta = \frac{4\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$. Первые три легко отождествляются с u_{12}^a, $a = 1, 2, 3$. Последний соответствует новой частице 4 массы
$$\frac{m_4}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 2.405. \tag{10.33}$$
Продолжая процедуру дальше, можно найти еще четыре частицы с массами
$$\begin{aligned} &\frac{m_5}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15} \simeq 2.956, && \frac{m_6}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{30} \simeq 3.218, \\ &\frac{m_7}{m_1} = 8\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 3.891, && \frac{m_8}{m_1} = 8\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15} \simeq 4.783. \end{aligned} \tag{10.34}$$
Частицы 5 и 6 появляются как связанные состояния $2+2$, частица 7 появляется в канале $3+3$, а частица 8 — в канале $4+4$.

Задачи

1. Проверьте, что соотношения (10.8) могут быть записаны в виде (10.9).

2. Покажите, что определение (10.15) согласуется с уравнением (8.45) для матрицы рассеяния связанных состояний.

3. Рассмотрите модель синус-Гордона в безотражательных точках $p = 1/N$. Покажите, что спектр разрешенных спинов интегралов движения состоит из всех нечетных значений s и значений $s = N \pmod{2N}$: $s \in (2\mathbb{Z}+1) \cup N(2\mathbb{Z}+1)$.

4. Рассмотрите теорию с парой частица—античастица $(1,\bar{1})$ массы m с матрицей рассеяния

$$S_{11}=\frac{\operatorname{sh}(\theta/2-i\pi g)}{\operatorname{sh}(\theta/2+i\pi g)},\qquad S_{1\bar{1}}(\theta)=S_{11}(i\pi-\theta). \tag{10.35}$$

Найдите спектр интегралов движения этой теории. Найдите отношения $I_{s,\bar{1}}/I_{s,1}$ для этих интегралов движения. Покажите, что матрица рассеяния (10.35) в первом порядке по теории возмущений совпадает с матрицей рассеяния теории с действием (в пространстве Минковского) *комплексной модели синус-Гордона*:

$$\mathcal{S}[\chi,\bar{\chi}]=\int\frac{d^2x}{4\pi}\left(\frac{\partial_\mu\chi\,\partial^\mu\bar{\chi}}{1+g\bar{\chi}\chi}-m^2\bar{\chi}\chi\right). \tag{10.36}$$

(На самом деле, после подходящей перенормировки массы и константы связи, выражение (10.35) дает точную S-матрицу этой теории.)

5*. Снова рассмотрим S-матрицу (10.35), но при значениях константы связи $-1<g<0$. В этом случае S-матрица имеет полюс при $-i\theta=\pi|g|$ с положительным вычетом. Найдите спектр связанных состояний, порожденных из частиц 1 и $\bar{1}$. При целых значениях величины $-g^{-1}=N\geq 2$ спектр частиц содержит пары частиц одинаковой массы и равного по модулю N заряда. Покажите, что при отождествлении частиц в этих парах теория рассеяния самосогласованна ($\mathbb{Z}_N$*-симметричная модель Изинга*). Найдите спектр спинов интегралов движения в этой теории.