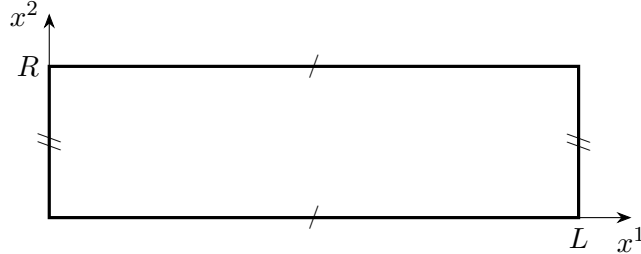


## Лекция 11

### Термодинамический анзац Бете: основы метода

На прошлой лекции мы пытались найти связь между точными  $S$ -матрицами и возмущениями конформных теорий, исходя из интегралов движения, а также эвристических соображений. Сегодня мы обсудим метод, позволяющий точно и явно связать данные о рассеянии с параметрами конформной модели — *термодинамический анзац Бете (ТБА)*.<sup>1</sup> Рассмотрим релятивистскую систему в прямоугольной области эвклидова пространства размером  $L \times R$ , замкнутой в тор  $T_{L,R}$  (отождествляемые линии помечены одинаковыми засечками):



Мы можем рассматривать систему двумя способами. Если мы будем считать  $x^1$  пространственной координатой, а  $x^2$  — мнимым временем, величина  $R^{-1}$  будет температурой системы, живущей в ящике длины  $L$  (« $L$ -картина»). Если мы поменяем местами смысл координат, величина  $L^{-1}$  будет температурой, а  $R$  — размером ящика (« $R$ -картина»).

Пусть  $\xi$  — корреляционная длина системы. Если мы выберем

$$R \ll \xi \ll L, \quad (11.1)$$

то в  $L$ -картине мы будем иметь большую систему при высокой температуре. Пусть  $N$  — общее число частиц. Если теперь

$$L \gg \xi N, \quad (11.2)$$

систему можно рассматривать как разреженную и изучать термодинамику частиц исходя из матрицы рассеяния. В  $R$ -картине, наоборот, температура стремится к нулю, но зато размеры системы настолько малы, что мы можем пользоваться конформной теорией поля (и первыми поправками к ней) для ее исследования. Сравнивая выражения для статистической суммы, вычисленные обоими способами,

$$Z(L, R) = \text{tr}_{\mathcal{H}_L} e^{-RH_L} = \text{tr}_{\mathcal{H}_R} e^{-LH_R}, \quad (11.3)$$

мы можем связать ультрафиолетовое поведение системы с инфракрасным.

Начнем с  $R$ -картины. Поскольку  $L$  очень велико, наибольший вклад в статсумму в этой картине дает основное состояние, поэтому

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (11.4)$$

где  $\mathcal{E}_0(R)$  — энергия основного состояния гамильтониана  $H_R$ .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_1^1(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\bar{3}\bar{3}} - T_{\bar{3}\bar{3}} + 2T_{\bar{3}\bar{3}}),$$

если мы примем  $\bar{z} = x^2 + ix^1$ . Для эвклидова<sup>2</sup> тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}.$$

<sup>1</sup>Не следует путать метод термодинамического анзаца Бете с анзацем Бете при конечных температурах. Хотя первый и использует методы последнего, он к нему не сводится.

<sup>2</sup>В эвклидовом пространстве и в пространстве Минковского совпадают компоненты  $T_\nu^\mu$ , а компоненты  $T_{\mu\nu}$  могут отличаться. В частности, в координатах  $z, \bar{z}$  эти компоненты отличаются знаком.

Тогда

$$\begin{aligned} H_R &= H_R^{(0)} + H_R^p = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \\ &= \frac{2\pi}{R} \left( \mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12} \right) + (1 - \Delta_p) \lambda \int_0^R dx^2 \Phi_p(x). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Полагая  $\lambda = 0$  получаем

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R}, \quad c_{\text{eff}} = c - 12(\Delta_{\min} + \bar{\Delta}_{\min}). \quad (11.6)$$

Размерности  $\Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min}$  являются конформными размерностями в двух киральностях примарного оператора  $\Phi_{\min}$  с наименьшей масштабной размерностью ( $d = \Delta + \bar{\Delta}$ ), согласующегося с условием периодичности по  $R$ . В теориях с невырожденным вакуумом инвариантных относительно пространственной инверсии эти размерности совпадают:  $\Delta_{\min} = \bar{\Delta}_{\min}$ . В унитарных теориях с тривиальными условиями периодичности они равны нулю и  $c_{\text{eff}} = c$ . Величину  $c_{\text{eff}}$  называют *эффективным центральным зарядом*. Именно эффективный центральный заряд мы будем находить в  $L$ -картине. Вычислению термодинамических средних в  $L$ -картине соответствуют мацубаровские граничные условия по  $x^2$  (периодические для бозонных полей и антипериодические для фермионных полей). С такими условиями заведомо согласован единичный оператор, так что имеем

$$\Delta_{\min} + \bar{\Delta}_{\min} \leq 0, \quad c_{\text{eff}} \geq c.$$

Теперь разберемся, как записывается энергия основного состояния в возмущенной теории. Имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_{\infty} R = \frac{\langle H_R e^{-S_p} \rangle_0}{\langle e^{-S_p} \rangle_0} - \varepsilon_{\infty} R, \quad S_p = \lambda \int d^2x \Phi_p$$

Слагаемое, содержащее  $\varepsilon_{\infty} = \langle T_1^1 \rangle_{R=\infty}$ , связано с тем, что в теории поля при вычислении среднего от гамильтониана мы вычитаем вакуумные осцилляции на бесконечной прямой так, чтобы  $\mathcal{E}(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .<sup>3</sup> По теории возмущений величину  $\varepsilon_{\infty}$  вычислить нельзя, но мы увидим, как она извлекается из  $L$ -картины. Среднее с индексом 0 понимается как среднее по состоянию с наименьшей конформной размерностью в конформной теории поля:

$$\langle X \rangle_0 = \langle \Phi_{\min} | X | \Phi_{\min} \rangle. \quad (11.7)$$

Для вычисления  $\mathcal{E}_0(R)$  в возмущенной теории удобнее начать прямо с (11.4):

$$\mathcal{E}_0(R) = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \left\langle e^{-L\mathcal{E}_0^{(0)}(R) - S_p} \right\rangle_0 - \varepsilon_{\infty} R = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_{\infty} R - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_p^n \rangle_0.$$

Вычисление логарифма эквивалентно замене средних  $\langle S_p^n \rangle_0$  на соответствующие связные части  $\langle S_p^n \rangle_{0,c}$  и выпадению первого слагаемого ( $\langle 1 \rangle_{0,c} = 0$ ). Деление на  $L$  сокращает интеграл по  $x^1$  в одном из множителей. Отсюда получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_{\infty} R + \lambda \int dx^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \langle \Phi_p S_p^{n-1} \rangle_{0,c}.$$

Перемасштабируем, заменив  $x \rightarrow Rx$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(R) &= -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_{\infty} R + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!} R^{2n(1-\Delta_p)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \\ \mathbb{M}_n(l) &= \int_{T_{l,1}} d^2x_1 \cdots d^2x_{n-1} \langle \Phi_p(x) \Phi_p(x_1) \cdots \Phi_p(x_{n-1}) \rangle_{0,c} \end{aligned} \quad (11.8)$$

<sup>3</sup>Если связать теорию с гравитацией, величина  $8\pi G \varepsilon_{\infty}$  будет иметь смысл космологической постоянной.

Интегралы  $\mathbb{M}_n$  приведены к безразмерному виду масштабированием с  $T_{L,R}$  на  $T_{L/R,1}$ . В силу трансляционной инвариантности они не зависят от точки  $x$ . В пределе  $l = L/R \rightarrow \infty$  интегралы превращаются в интегралы по цилиндру. Конформным преобразованием их можно привести к интегралам по плоскости:

$$\mathbb{M}_n(\infty) = (2\pi)^{2-2n(1-\Delta_p)} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x_1 \cdots d^2x_{n-1} \langle \Phi_p(1,1) \Phi_p(x_1) \cdots \Phi_p(x_{n-1}) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^{n-1} |z_i|^{2\Delta_p-2} \quad (11.9)$$

Если  $\Delta_{\min}$  или  $\bar{\Delta}_{\min}$  равно нулю (а это всегда так, когда теория унитарна), имеем  $\langle \Phi_p \rangle_{0,c} = 0$ . Это значит, что  $\mathbb{M}_0 = 0$  и разложение начинается с  $n = 2$ . В противном случае разложение начинается с  $n = 1$ . Отсюда заключаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + O(R^\alpha), \quad \alpha = \begin{cases} 1 - 2\Delta_p, & \text{если } \Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0; \\ 3 - 4\Delta_p, & \text{если } \Delta_{\min} = 0 \text{ или } \bar{\Delta}_{\min} = 0. \end{cases} \quad (11.10)$$

Теперь обратимся к  $L$ -картине. Чтобы понять основной принцип, разберем сначала случай одной нейтральной частицы массы  $m$  с матрицей рассеяния  $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$ ,  $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$ . Как мы уже говорили, будем предполагать, что термодинамика частиц при достаточно больших значениях  $L$  полностью определяется асимптотической волновой функцией. Напишем уравнения Бете, которые следуют из периодичности этой волновой функции:

$$e^{imL \text{sh } \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N S(\theta_i - \theta_j) = (-1)^F, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11.11)$$

Где  $F = 0$  в случае бозонов и  $F = 1$  в случае фермионов. Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \text{sh } \theta_i + \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \quad (11.12)$$

причем  $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{N-1+F}{2}$  в случае  $S(0) = -1$  и  $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{F}{2}$  в случае  $S(0) = 1$ . Для каждого решения уравнений Бете  $\{\theta_i\}$  зададим функцию  $\theta(n)$  уравнением

$$mL \text{sh } \theta(n) + \sum_{j=1}^N \phi(\theta(n) - \theta_j) = 2\pi n. \quad (11.13)$$

Очевидно  $\theta(n_i) = \theta_i$ , а при всех значениях  $n \notin \{n_i\}$  значения  $\theta(n)$  будут интерпретироваться как «незаполненные состояния». По умолчанию мы будем предполагать, что значения  $n_i$  расположены по возрастанию:  $n_{i+1} \geq n_i$ , причем равные значения отвечают кратным корням уравнений Бете, если таковые имеются. Мы будем также предполагать, что решения уравнений Бете удовлетворяют условию  $\theta_{i+1} \geq \theta_i$  ( $\forall i$ ) и, более того,  $\theta(n+1) \geq \theta(n)$  ( $\forall n$ ). Это верно в случае растущей функции  $\phi(\theta)$ , но и в случае убывающей функции может быть верно при разумных условиях.

При больших  $L$  разности  $\theta(n+1) - \theta(n)$  малы, и можно ввести спектральную плотность состояний  $\rho(\theta)$  и спектральную плотность частиц  $\rho^\bullet(\theta)$ :

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi k}{L(\theta_{i+k} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}, \quad (11.14)$$

где  $k$  не меньше кратности вырождения корня  $\theta_i$ . Очевидно, интеграл от  $\rho^\bullet$  равен плотности частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (11.15)$$

а интеграл с весом  $m \text{ch } \theta$  дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) \text{ch } \theta. \quad (11.16)$$

Все интегралы по  $\theta$  мы будем понимать по всей прямой  $\mathbb{R}$ , если не оговорено иное.

Возьмем разность двух уравнений (11.13) при двух последовательных значениях  $n$  и поделим на  $L(\theta(n+1) - \theta(n))$ . Заменяв сумму на интеграл, получим

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta'). \quad (11.17)$$

Это уравнение позволяет для каждой заданной функции  $\rho^\bullet(\theta)$  найти соответствующую плотность состояний  $\rho(\theta)$ . Но при конечных температурах необходимо просуммировать все возможные наборы  $\{n_i\}$  с гиббсовскими весами. Трудность состоит в нетривиальной мере функционального интегрирования по  $\rho^\bullet$  в непрерывном пределе. Поэтому вместо прямого суммирования будем искать минимум свободной энергии. Положим

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet], \quad (11.18)$$

Чтобы найти энтропию, воспользуемся обычным трюком из теории растворов. У нас есть две ситуации:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с  $S(0) = 1$  или бозонами с  $S(0) = -1$ , каждое значение  $n_i$  может быть заполнено только один раз.
- «Бозонный» случай. Если частицы являются бозонами с  $S(0) = 1$  или фермионами с  $S(0) = -1$ , каждое значение  $n_i$  может заполняться неограниченным числом частиц.

Разобьем вещественную прямую на небольшие интервалы  $\Delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1}]$ . Полную энтропию  $S$  будем понимать как сумму вкладов  $\Delta S_k$  от значений  $\theta \in \Delta_k$ . Энтропия  $\Delta S_k$  понимается как число «микроскопических» состояний, которыми реализуется «макроскопическое» состояние, которое задается числом частиц  $N_k^\bullet$  на числе состояний  $N_k$  в этом интервале.

В «фермионном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из  $N_k$  по  $N_k^\bullet$  (раскладываем  $N_k^\bullet$  частиц по  $N_k$  ящикам, куда помещается одна частица), так что

$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

В «бозонном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из  $N_k + N_k^\bullet - 1$  по  $N_k^\bullet$ . Действительно, возьмем  $N_k + N_k^\bullet - 1$  ящиков, расставленных в ряд, и положим в них  $N_k^\bullet$  частиц по одной в ящик. Останется  $N_k - 1$  пустых мест. Возьмем  $i$ -тое слева пустое место. Сосчитаем число  $l_i$  частиц лежащих слева от него в ряд до следующего пустого места. Будем считать это числом заполнения  $i$ -го состояния. Числом заполнения  $N_k$ -го состояния будем считать количество частиц, лежащих между самым правым пустым местом и правым краем. Это дает взаимно-однозначное соответствие между микроскопическими конфигурациями и раскладкой частиц по ящикам. Итак, имеем

$$\Delta S_k = \log \frac{(N_k + N_k^\bullet - 1)!}{N_k^\bullet!(N_k - 1)!} \simeq (N_k + N_k^\bullet) \log(N_k + N_k^\bullet) - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - N_k \log N_k.$$

Устремляя размеры интервалов к нулю и заменяя  $N_k$  на  $L\rho(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$  и  $N_k^\bullet$  на  $L\rho^\bullet(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$ , получаем

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (11.19)$$

в «фермионном» случае и

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \rho^\bullet) - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - \rho \log \rho) \quad (11.20)$$

Давайте введем знаковый множитель

$$\sigma = (-1)^F S(0) = \begin{cases} 1 & \text{в «бозонном» случае;} \\ -1 & \text{в «фермионном» случае.} \end{cases} \quad (11.21)$$

Тогда энтропию можно записать в виде

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\sigma\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma\rho^\bullet) - \sigma\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet). \quad (11.22)$$

Теперь нужно найти минимум функционала  $F[\rho, \rho^\bullet]$  с учетом условия (11.17):

$$0 = \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = mR \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma\rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}.$$

Мы учли, что

$$\frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta).$$

Давайте для последнего логарифма в условии минимума введем специальное обозначение:

$$\epsilon(\theta) = \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \quad (11.23)$$

По-другому это можно записать так

$$\frac{\rho^\bullet(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{1}{e^{\epsilon(\theta)} - \sigma}. \quad (11.24)$$

В левой части стоит функция заполнения, и она выражается через  $\epsilon(\theta)$  так же, как в случае свободных частиц она выражается через  $\beta E(\theta)$ . Величину  $\epsilon(\theta)$  называют *псевдоэнергией*. В терминах псевдоэнергии полученные уравнения записываются в виде нелинейного интегрального уравнения, называемого уравнением *уравнения Янга–Янга* [17]:

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')} \right) = mR \operatorname{ch} \theta. \quad (11.25)$$

Покажем, что все остальные величины можно выразить через решение  $\epsilon(\theta, mR)$  этого уравнения.

Прежде всего, с помощью (11.25) и (11.17) можно исключить  $\rho$  и  $\rho^\bullet$  в выражении для свободной энергии, которая, как мы знаем из (11.4), пропорциональна энергии основного состояния в  $R$ -картине  $\mathcal{E}_0(R)$ :

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (11.26)$$

Удобно ввести скейлинговую функцию  $f(r)$  соотношением

$$f(mR) = R\mathcal{E}_0(R) = \sigma mR \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (11.27)$$

Эта функция не зависит от размерных параметров. В силу (11.6) через нее легко выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \quad (11.28)$$

Дифференцируя уравнение (11.25) по  $R$  и сравнивая результат с (11.17), получаем

$$\rho(\theta) = \frac{\partial \epsilon(\theta, mR)}{\partial R}. \quad (11.29)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)} \right). \quad (11.30)$$

Итак, у нас есть система нелинейных уравнений. В следующий раз мы изучим, как решать эти уравнения.

Довольно несложно обобщить результат на случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Пусть имеется набор частиц  $a = 1, \dots, r$  с массами  $m_a$  и матрицами рассеяния  $S_{ab}(\theta) =$

$Z_a^{\delta_{ab}} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ ,  $Z_a = \pm 1$ ,  $\phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(-\theta)$ . Мы будем принимать  $\sigma_a = (-1)^{F_a} Z_a$ , то есть  $\sigma_a = 1$  для «бозонных» частиц и  $\sigma_a = -1$  для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{j=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (11.31)$$

Совершенно аналогично вводим плотности состояний  $\rho_a(\theta)$  и частиц  $\rho_a^\bullet(\theta)$ , причем

$$N_a = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho_a^\bullet(\theta), \quad E[\rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \sum_{a=1}^r \rho_a^\bullet(\theta) m_a \operatorname{ch} \theta. \quad (11.32)$$

В термодинамическом пределе имеем

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (11.33)$$

В остальном выводе достаточно просто заменить

$$\rho \rightarrow \rho_a, \quad \rho^\bullet \rightarrow \rho_a^\bullet, \quad \epsilon \rightarrow \epsilon_a, \quad \sigma \rightarrow \sigma_a, \quad \phi(\theta - \theta') \rightarrow \phi_{ab}(\theta - \theta'), \quad \int \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow \sum_a \int \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Здесь есть одна тонкость. Предположим, что среди частиц есть пары частица—античастица ( $a, \bar{a}$ ). Тогда имеются сохраняющиеся заряды  $Q_a$ , собственные значения которых равны  $N_a - N_{\bar{a}}$ , и мы должны искать минимум с учетом сохранения этих зарядов. Чтобы учесть это, легче использовать большой канонический ансамбль и приписать каждому сорту частиц химический потенциал  $\mu_a$ . Надо искать минимум большого термодинамического потенциала

$$\Omega[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet] - \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (11.34)$$

При этом надо полагать  $\mu_a = 0$  для нейтральных частиц и  $\mu_{\bar{a}} = -\mu_a$  для пар частица—античастица. Уравнение Янга—Янга принимает вид

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')}) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (11.35)$$

Далее, большой потенциал имеет тот же вид, что и свободная энергия в случае с нулевыми химпотенциалами:

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)}). \quad (11.36)$$

Из-за присутствия в правой части (11.35) химических потенциалов плотность состояний вычисляется по несколько другой формуле:

$$\rho_a(\theta) = \frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m}, \quad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)}). \quad (11.37)$$

где  $m$  — общий множитель всех масс. Это значит, что мы записываем массы в виде  $m_a = \kappa_a m$ , где  $\kappa_a$  — безразмерные константы. Энергия  $\mathcal{E}_0(R)$  выражается через свободную энергию

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L}, \quad F = \Omega + \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (11.38)$$

В симметричном случае  $N_a = N_{\bar{a}}$  ( $\forall a$ ) все химические потенциалы равны нулю,  $\mu_a = 0$ , и ответы не отличаются от случая нейтральных частиц. Однако в некоторых задачах интересен и несимметричный случай.

## Задачи

1. Покажите, что в модели свободного безмассового майорановского фермиона с граничными условиями Неве–Шварца ( $\psi(x^1, x^2 + R) = -\psi(x^1, x^2)$ ) эффективный центральный заряд равен  $c_{\text{eff}}^{NS} = \frac{1}{2}$ , а в модели с граничными условиями Рамона ( $\psi(x^1, x^2 + R) = \psi(x^1, x^2)$ ) он равен  $c_{\text{eff}}^R = -1$ .
2. Аналогично найдите эффективный заряд для свободного безмассового нейтрального бозона с периодическими и антипериодическими граничными условиями.
3. Выведите (11.26), (11.29) и (11.30).
4. Найдите свободную энергию и число частиц в системе из одной частицы в пределе низких температур  $mR \gg 1$  до членов порядка  $e^{-2mR}$ . Получите явные формулы в элементарных функциях в порядке  $e^{-mR}$ .
- 5\*. Безмассовые теории можно описать как системы частиц со спектром  $p^0 = p^1 = \frac{m}{2}e^\theta$  (правые частицы) или  $p^0 = -p^1 = \frac{m}{2}e^{-\theta}$  (левые частицы). Рассмотрим теорию, которая содержит одну правую частицу  $r$  и одну левую частицу  $l$  с одинаковым параметром  $m$ , причем между ними имеется три скалярные матрицы рассеяния  $S_{rr}(\theta)$ ,  $S_{ll}(\theta)$  и  $S_{rl}(\theta)$ . Какие условия накладывают на эти матрицы условия унитарности и кроссинг-симметрии? При каких условиях такая теория масштабно-инвариантна, а при каких — нет? Напишите уравнения термодинамического анзаца Бете и формулы для свободной энергии и чисел частиц в этой теории.

## Семинар 11

### Уравнение Янга—Янга для модели Либа—Линихера

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

Мы покажем, что уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\epsilon(p) + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \log(1 + e^{-\epsilon(p')}) = R \left( \frac{p^2}{2m} - \mu \right).$$

При этом большой термодинамический потенциал равен

$$\Omega = -\frac{L}{R} \int \frac{dp}{2\pi} \log(1 + e^{-\epsilon(p)}).$$

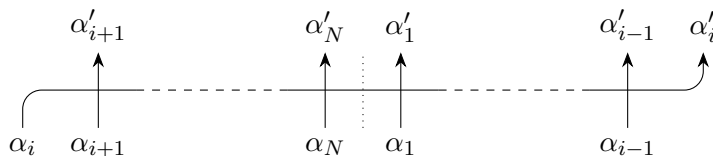
### Дополнение к лекции 11

#### Иерархический анзац Бете

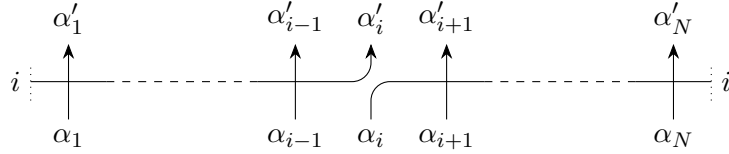
Вопрос такой: а что делать, если матрица рассеяния частиц недиагональна? Рассмотрим модель с  $S$ -матрицей  $S(\theta)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2}$ . Для простоты будем считать, что имеется одна частица с несколькими внутренними состояниями, например солитон модели синус-Гордона. Условие периодичности для волновой функции имеет вид

$$e^{imL \text{sh} \theta_i} S_{i,i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) \cdots S_{i1}(\theta_i - \theta_1) S_{i,N}(\theta_i - \theta_N) \cdots S_{i,i+1}(\theta_i - \theta_{i+1}) |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle = |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle.$$

Графически произведение  $S$ -матриц в этом выражении можно изобразить так:



Переставляя часть справа от пунктирной линии влево, получим



Теперь вспомним, что в большом количестве задач матрица рассеяния в нуле сводится к матрице перестановки:  $S(0) = \pm P$ . Тогда средний узел можно заменить (с точностью до знака) на матрицу рассеяния:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \alpha'_1 \\ \uparrow \\ \theta_i \text{---} 0 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \alpha'_{i-1} \\ \uparrow \\ \alpha_{i-1} \end{array} \begin{array}{c} \alpha'_i \\ \uparrow \\ \alpha_i \end{array} \begin{array}{c} \alpha'_{i+1} \\ \uparrow \\ \alpha_{i+1} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \alpha'_N \\ \uparrow \\ 0 \end{array} = \\
 & = \text{tr}_{V_0} S_{0N}(\theta_i - \theta_N) \cdots S_{02}(\theta_i - \theta_2) S_{01}(\theta_i - \theta_1) = T(\theta_i).
 \end{aligned}$$

Мы видим, что произведение матриц рассеяния вкладывается в семейство коммутирующих трансфер-матриц

$$T(\theta) = \text{tr}_{V_0} L_{1\dots N}(\theta), \quad L_{1\dots N}(\theta) = S_{0N}(\theta - \theta_N) \cdots S_{02}(\theta - \theta_2) S_{01}(\theta - \theta_1), \quad (11.39)$$

где  $V_0$  играет роль вспомогательного пространства,  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$  — квантового пространства. Нам нужно найти такие векторы

$$|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \sum_{\{\beta_i\}} A_I^{\beta_1 \dots \beta_N} |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle_{\beta_1 \dots \beta_N}, \quad I = 1, \dots, (\dim V)^N, \quad (11.40)$$

которые бы диагонализировывали трансфер-матрицы  $T(\theta)$ :

$$T(\theta)|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \Lambda_I(\theta; \theta_1, \dots, \theta_N)|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle, \quad (11.41)$$

а затем решить уравнения

$$e^{imL \text{sh } \theta_i} \Lambda_I(\theta_i; \theta_1, \dots, \theta_N) = \pm 1. \quad (11.42)$$

Эта система уравнений представляет собой *первичную* систему уравнений Бете.

Диагонализация трансфер-матриц выполняется методом алгебраического анзаца Бете. Рассмотрим самый простой пример — модель синус-Гордона. В этом случае для системы солитонов имеем  $S(0) = -P$  (в случае фермионов  $S(0) = P$ , но мы можем получить ту же  $-1$  накладывая на фермионы граничное условие Невё—Шварца).

Оператор  $L(\theta)$  представляет собой матрицу  $2 \times 2$  во вспомогательном пространстве:

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \quad T(\theta) = A(\theta) + D(\theta). \quad (11.43)$$

Оператор  $C(\theta)$  увеличивает топологическое число состояния на единицу, а  $B(\theta)$  — уменьшает. Введем реперное состояние  $|\Omega; \vec{\theta}\rangle$ , состоящее только из солитонов с топологическим числом  $+1$ :

$$C(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = 0. \quad (11.44)$$

Операторы  $A, D$  действуют на этом состоянии просто

$$A(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle, \quad D(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle.$$

Заметим, что правая часть второго тождества обращается в нуль при  $\theta = \theta_i$ . Поэтому собственное значение

$$\Lambda_\Omega(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)$$



имеет в важных для нас точках вид произведения

$$\Lambda_{\Omega}(\theta_i; \vec{\theta}) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j). \quad (11.45)$$

Теперь построим состояния Бете

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_n; \vec{\theta}\rangle = B(\frac{i\pi}{2} + \lambda_1) \cdots B(\frac{i\pi}{2} + \lambda_n) |\Omega; \vec{\theta}\rangle \quad (11.46)$$

с топологическим числом  $N - 2n$ . Слагаемые  $\frac{i\pi}{2}$  добавлены, чтобы собственные значения оператора «импульса» в спиновом пространстве  $p(\lambda)$ ,

$$e^{ip(\lambda)} = \frac{b(\frac{i\pi}{2} + \lambda)}{a(\frac{i\pi}{2} + \lambda)} = -e^{i\Phi_{1/2}(\lambda)}, \quad \Phi_x(\lambda) = -i \log \frac{\text{sh} \frac{\lambda + i\pi x}{p}}{\text{sh} \frac{\lambda - i\pi x}{p}},$$

были вещественны при вещественных  $\lambda_i$ . Состояния (11.46) являются собственными при выполнении *вторичной* системы уравнений Бете. Пусть  $u_k = \frac{i\pi}{2} + \lambda_k$ . Тогда

$$\prod_{i=1}^N \frac{b(u_k - \theta_i)}{a(u_k - \theta_i)} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{a(u_l - u_k) b(u_k - u_l)}{b(u_l - u_k) a(u_k - u_l)} \quad (11.47)$$

или

$$\prod_{i=1}^N \frac{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} + \lambda_k - \theta_i}{p}}{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} - \lambda_k + \theta_i}{p}} = \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh} \frac{\lambda_k - \lambda_l + i\pi}{p}}{\text{sh} \frac{\lambda_k - \lambda_l - i\pi}{p}}. \quad (11.48)$$

При этом собственные значения

$$\Lambda_{\vec{\lambda}}(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) \prod_{k=1}^n \frac{a(u_k - \theta)}{b(u_k - \theta)} + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i) \prod_{k=1}^n \frac{a(\theta - u_k)}{b(\theta) - u_k} \quad (11.49)$$

в интересующих нас точках тоже сводятся к первому слагаемому:

$$\Lambda_{\vec{\lambda}}(\theta_i; \vec{\theta}) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j) \prod_{k=1}^n \frac{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} - \lambda_k + \theta_i}{p}}{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} + \lambda_k - \theta_i}{p}}. \quad (11.50)$$

Факторизованный вид собственных значений позволяет логарифмировать первичные уравнения Бете и получить систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} mL \text{sh} \theta_i - \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) - \sum_{k=1}^n \Phi_{1/2}(\theta_i - \lambda_k) &= 2\pi n_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \Phi_{1/2}(\lambda_k - \theta_i) - \sum_{l=1}^n \Phi_1(\lambda_k - \lambda_l) &= 2\pi \nu_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Здесь  $\phi(\theta) = -i \log a(\theta)$ , а числа  $n_i, \nu_k$  являются целыми или полуцелыми в зависимости от четности чисел  $N$  и  $n$ . Система, конечно, сложная, но допускает столь же подробное исследование в термодинамическом пределе, как и обычная система уравнений Бете.