

Лекция 3

Двухчастичные S -матрицы: теория возмущений

Предположим, что две частицы с массами m_1 и m_2 (и, возможно, с какими-то внутренними состояниями) в двумерном пространстве-времени рассеиваются друг на друге в себя. В двумерном пространстве-времени удобно пользоваться быстройми θ_i :

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i. \quad (3.1)$$

Для начальных быстройми положим $\theta_1 > \theta_2$. Пусть θ'_i — быстрая i -й частицы после рассеяния. Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения. Одно из них $\theta'_i = \theta_i$ представляет собой прохождение частиц друг сквозь друга. Другое решение представляет собой отскок и находится так. Пусть θ_0 является быстройми центра масс:

$$m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0.$$

Тогда второе решение имеет вид $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$. В случае одинаковых масс $m_1 = m_2$ это решение имеет тривиальный вид $\theta'_1 = \theta_2$, $\theta'_2 = \theta_1$ и, по сути, не отличается от первого решения. В случае $m_1 \neq m_2$ мы будем рассматривать только первое решение, поскольку в интегрируемых случаях реализуется именно оно.

Сначала рассмотрим случай $m_1 \neq m_2$. Матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.2)$$

где $p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i$, $p'_i = m_i \operatorname{sh} \theta'_i$ — пространственные компоненты импульса. Мы рассматриваем S -матрицу как оператор, действующий в произведении пространств двух частиц: $S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$. Чтобы найти связь со стандартной в диаграммной технике амплитудой \mathcal{M} , нужно привести дельта-функцию к виду $\delta(P' - P)$, где P, P' — конечный и начальный суммарный 2-импульс системы. Действительно, по определению

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_i 2\varepsilon_i \prod_j 2\varepsilon'_j}}. \quad (3.3)$$

Здесь $\hat{1}$ обозначает единичный оператор в пространстве состояний (включая дельта-функции по пространственным импульсам). Имеем

$$\delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) = \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) = \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P).$$

Отсюда немедленно находим

$$S(\theta_1 - \theta_2) = 1 + \frac{\mathcal{M}(\theta_1, \theta_2; \theta_1, \theta_2)}{4m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (3.4)$$

Здесь единица в первом слагаемом означает уже единичный оператор в пространстве внутренних состояний частиц.

В случае $m_1 = m_2$ разница заключается только в том, что выражение (3.2) имеет два слагаемых:

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2) + (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_2) \delta(p'_2 - p_1) P S(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.5)$$

где $P : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$ — оператор перестановки (мы считаем частицы одинаковой массы тождественными). Соотношение (3.4) сохраняет силу.

Рассмотрим теперь конкретные модели. Начнем с модели Тирринга. С помощью вспомогательного векторного поля A^μ действие модели Тирринга можно записать в виде:

$$S^{\text{МТ}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \left(\bar{\psi} (i\hat{\partial} - \hat{A} - m) \psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right). \quad (3.6)$$

Диаграммная техника в этом представлении совпадает с диаграммной техникой квантовой электродинамики с той разницей, что пунктирной линии отвечает пропагатор $\langle A_\mu(x')A_\nu(x) \rangle = i\pi g g_{\mu\nu} \delta(x' - x)$. В импульсном пространстве для внутренних линий и вершины имеем:

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \\ \hline \hat{p} - m + i0 \end{array}, \quad \mu \text{-----} \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned} p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\ -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\ p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\ -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.} \end{aligned}$$

Кроме того, каждая фермионная петля дает множитель (-1) , каждая пара внешних антифермионных линий дает (-1) , и каждая перестановка двух букв u от стандартного порядка (справа налево для входящих частиц и слева направо — для выходящих) дает (-1) . Эти знаки мы будем выписывать явно.

Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0. \quad (3.7)$$

Решение легко написать через быстроту θ :

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ i e^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta - i\pi} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} i e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Нам понадобятся произведения, отвечающие четырехфермионному взаимодействию:

$$\begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p'_1 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p'_2 \end{array} = -i\pi g (\bar{u}_{p'_1} \gamma^\mu u_{p_1}) (\bar{u}_{p'_2} \gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим фермион и антифермион как одну частицу с двумерным пространством внутренних состояний $V = \mathbb{C}^2 = \operatorname{span}(e_+, e_-)$. Базисный вектор e_+ отвечает фермиону, а e_- — антифермиону. Двухчастичная S -матрица в пространстве $V \otimes V$ имеет шесть ненулевых матричных элементов. В базисе $e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_-, e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_-$ она имеет вид

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} ++ & +- & -+ & -- \\ a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix} \begin{array}{l} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array} \quad (3.10)$$

или

$$S(\theta)_{++}^{++} = S(\theta)_{--}^{--} = a(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{+-} = S(\theta)_{-+}^{-+} = b(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{-+} = S(\theta)_{-+}^{+-} = c(\theta). \quad (3.11)$$

Отметим, что эти амплитуды должны удовлетворять условию перекрестной симметрии:

$$a(\theta) = b(i\pi - \theta), \quad c(\theta) = c(i\pi - \theta). \quad (3.12)$$

Найдем эти матричные элементы в первом порядке по константе связи g . Для вклада в первый матричный элемент $a(\theta)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{++}^{(1)++} &= \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \end{array} \\ &= -4\pi i g m^2 (\operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) - 1) = -8\pi i g m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Формула кажется несколько громоздкой, но она может быть записана просто через быстроты. Рассмотрим вторую диаграмму, для которой $p = p_1 - p_2$. Пусть $\theta = \theta_1 - \theta_2$, так что

$$p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.15)$$

Выражение (3.14) принимает простой вид

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2 \operatorname{sh} \theta}. \quad (3.16)$$

Отсюда находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi i m^2 \beta^2)^2}{8\pi i m^2} \left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\operatorname{sh} \theta} \right) = 2\pi i m^2 \beta^4 \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right).$$

Следовательно,¹

$$S_{11}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\phi}^{\phi\phi} = 1 + \frac{i\pi\beta^2}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi\beta^4}{2\operatorname{sh} \theta} \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right) + O(\beta^6). \quad (3.17)$$

Отметим, что в этом приближении матрица рассеяния $S_\phi(\theta)$ удовлетворяет двум соотношениям

$$S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta), \quad S_{11}(\theta) S_{11}(-\theta) = 1. \quad (3.18)$$

Первое соотношение является просто соотношением перекрестной симметрии и следует из перекрестной симметрии диаграмм. А вот второе имеет важный смысл: оно означает, что в данном порядке теории возмущений нет других каналов рассеяния двух частиц. Во втором порядке мы могли бы ожидать рассеяния двух частиц в четыре, но соответствующие диаграммы в сумме дают нулевой вклад. На самом деле это верно в любом порядке теории возмущений: в модели синус-Гордона нет множественного рождения частиц.

Теперь вычислим рассеяние частицы ϕ на солитоне. Для этого разложим действие синус-Гордона вблизи солитонного решения. Положим

$$\phi_{x_0,v}^\pm(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.19)$$

и рассмотрим действие $S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm + \phi]$ в квадратичном приближении по ϕ . Линейные члены по ϕ сократятся в силу того, что $\phi_{x_0,v}^\pm$ есть решение уравнения движения, и мы получим

$$\delta S[\phi] \equiv S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm + \phi] - S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \cos \beta \phi_{x_0,v}^\pm \right). \quad (3.20)$$

Без ограничения общности положим $x_0 = 0$ и $v = 0$. Все остальные случаи можно получить сдвигом и преобразованием Лоренца. Тогда имеем

$$\delta S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 m x^1} \right) \right). \quad (3.21)$$

Классическое уравнение движения

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 m x^1} \right) \right) \phi(x) = 0 \quad (3.22)$$

линейно и может рассматриваться как квантовое уравнение на оператор $\phi(x)$. Тогда этот оператор раскладывается по модам

$$\phi(t,x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right), \quad (3.23)$$

¹Значок 11 станет яснее позже. Дело в том, что ϕ является первой частицей в серии так называемых бризеров — связанных состояний солитона и антисолитона.

где $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\text{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0 \quad (3.24)$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Давайте найдем решения уравнения (3.22). Во-первых, имеется связанное состояние с нулевой энергией:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\text{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0. \quad (3.25)$$

Эта мода связана с возможностью перемещать солитон вдоль оси x :

$$\phi_{0,0}^+(x) + \epsilon f_0(x) = \phi_{-\beta\epsilon/2m,0}^+(x).$$

С квантовомеханической точки зрения эту моду можно интерпретировать как результат «оживления» солитона, превращения его из заданного руками решения в частицу, обладающую собственной динамикой. Иными словами, операторы a_0, a_0^+ дают нам одну из солитонных степеней свободы.

Больше связанных состояний уравнение (3.22) не имеет. Остальные состояния можно нумеровать импульсами p , в связи с чем соответствующие функции мы будем обозначать f_p . Они имеют вид

$$f_p(x) = N_p e^{ipx} \left(1 + \frac{im}{p} \text{th} mx \right). \quad (3.26)$$

Чтобы их правильно нормировать, нужно найти плотность состояний. Поместим систему в большой ящик длины L с солитоном посередине и наложим циклическое граничное условие:²

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \text{th} \frac{mL}{2}}{p - im \text{th} \frac{mL}{2}} = 1. \quad (3.27)$$

Так как нас интересует случай $L \rightarrow \infty$, имеем

$$e^{ipL} \frac{p + im}{p - im} = 1. \quad (3.28)$$

Логарифмируя это условие, получаем

$$pL = 2\pi n + 2 \arctg \frac{p}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

Полуцелые числа n и будут нумеровать состояния. Давайте возьмем два соседних значения импульса отвечающих числам n и $n + 1$. Имеем

$$(p_{n+1} - p_n)L = 2\pi + 2 \arctg \frac{p_{n+1}}{m} - 2 \arctg \frac{p_n}{m}.$$

Так как $p_{n+1} - p_n \sim \frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$, в правой части мы можем просто взять производную:

$$(p_{n+1} - p_n) \left(L - \frac{2m}{(m^2 + p_n^2)} \right) = 2\pi.$$

Отсюда следует выражение для плотности состояний:

$$\rho(p) = \frac{2\pi}{L} \frac{dn}{dp} = \frac{2\pi}{L(p_{n+1} - p_n)} = 1 - \frac{2m}{L(m^2 + p^2)}. \quad (3.30)$$

²При этом мы, конечно, должны отождествить ϕ и $\phi + 2\pi/\beta$ в классическом решении. В пределе $L \rightarrow \infty$ ответ принципиально не будет зависеть от типа граничных условий, но с циклическими граничными условиями его получить проще.

В пределе $L \rightarrow \infty$ второе слагаемое исчезает и $\rho(p) \rightarrow 1$, как и для бозона в свободном пространстве. Отсюда немедленно следует, что в непрерывном спектре

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{dp}{2\pi}, \quad \delta_{n'n} \rightarrow 2\pi\delta(p' - p), \quad N_p = \frac{p}{\varepsilon_p}. \quad (3.31)$$

Тем не менее, мы запомним выражение (3.30), потому что оно имеет смысл, когда бозон движется в газе из солитонов и антисолитонов. В этом случае величина $1/L \ll m$ имеет смысл средней плотности солитонов и антисолитонов.

Итак, окончательно мы можем написать

$$\phi(t, x) = \sqrt{4\pi}(a_0 + a_0^+)f_0(x) + \sqrt{4\pi} \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\varepsilon_p}} (e^{-i\varepsilon_p t} f_p(x)a_p + e^{i\varepsilon_p t} f_p^*(x)a_p^+). \quad (3.32)$$

Еще раз посмотрим на функцию $f_p(x)$. На больших расстояниях от солитона она имеет вид

$$f_p(x) = e^{ipx} \times \begin{cases} 1 + im/p, & x \rightarrow +\infty; \\ 1 - im/p, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.33)$$

Это значит, что поле ϕ проходит через солитон *без отражения*. Отношение асимптотик

$$S_{1\pm}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\pm}^{\phi\pm} = \frac{p + im}{p - im} = \frac{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{4}\right)}{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{4}\right)} \quad (3.34)$$

представляет собой матрицу рассеяния частицы ϕ на солитоне или антисолитоне в нулевом приближении.

Задачи

1. Выведите (3.8), (3.9).
2. Выведите (3.14), (3.16).
3. Найдите полную энергию солитонного решения (3.19). Выразите ответ через массу m частицы ϕ и параметр β .
4. Покажите, что функции $f_p(x)$ из (3.26) с $N_p = p/\varepsilon_p$ являются правильно нормированными решениями уравнения (3.24).
- 5*. Найдите простейшее точное решение уравнений (3.18) в тригонометрических функциях, зависящее от β^2 , которое имело бы своим пределом (3.17). Покажите, что решение имеет полюс на физическом листе $0 \leq \text{Im } \theta \leq \pi$. Найдите массу связанного состояния, отвечающего этому полюсу.

Семинар 3

Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Второй подход заключается в том, чтобы изменить само разбиение действия модели синус-Гордона на действие конформной теории и возмущения. Альтернативное разбиение имеет вид

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}. \quad (3.35)$$

Такое разбиение кажется нефизическим, поскольку функционал действия S'_0 не является вещественным, однако формально ничто не мешает определить соответствующий функциональный интеграл. И хотя этот интеграл описывает теорию со взаимодействием, эта теория является конформной и тензор энергии-импульса может быть подкручен так, чтобы $T'^\mu{}_\mu = 0$.

Для тензора энергии-импульса теории S'_0 на классическом уровне (в эвклидовом пространстве) имеем

$$T'^\mu{}_\nu = L\delta^\mu{}_\nu - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f_\nu^{\mu\lambda} = T^\mu{}_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu{}_\nu + \partial_\lambda f_\nu^{\mu\lambda}.$$

Применяя уравнение движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi},$$

получаем

$$T'{}^\mu{}_\nu = T_\nu^\mu + \frac{i}{4\pi\beta} \delta_\nu^\mu \nabla^2 \phi + \partial_\lambda f_\nu^{\mu\lambda}.$$

Полагая

$$f_\nu^{\mu\lambda} = -\frac{i\alpha_0}{2\pi} (\delta_\nu^\mu \partial^\lambda \phi - \delta_\nu^\lambda \partial^\mu \phi) \quad (3.36)$$

с $\alpha_0 = \beta^{-1}$, получаем $T'{}^\mu{}_\mu = 0$. Отсюда легко получить

$$T'(x) = -\frac{1}{2} \partial\phi^2 + i\alpha_0 \partial^2 \phi, \quad \bar{T}'(x) = -\frac{1}{2} \bar{\partial}\phi^2 + i\alpha_0 \bar{\partial}^2 \phi. \quad (3.37)$$

В квантовом случае постоянная α_0 получает поправку. Чтобы ее найти, вычислим конформные размерности полей $e^{i\alpha\phi}$:

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 2\alpha_0).$$

Подберем α_0 таким образом, чтобы $\Delta_{-\beta} = 1$, то есть размерность потенциального члена в S'_0 равнялась единице. Это имеет место при

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}. \quad (3.38)$$

Тогда

$$\left[L'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = \left[\bar{L}'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = 0,$$

и, следовательно, в невозмущенной теории S'_0 бесследовый тензор энергии-импульса сохраняется: $\bar{\partial}T' = \partial\bar{T}' = 0$.

Поскольку $\Delta_\beta = \beta^2 - 1$ в возмущенном случае мы имеем

$$\Theta'(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu e^{i\beta\phi}. \quad (3.39)$$

Это выражение точное, потому что левая часть (2.42) для этого возмущения $(z' - z)^{-1} |z' - z|^{2k+k(k+1)\beta^2}$ имеет нужный порядок малости. «Откручивая» тензор энергии-импульса назад, то есть добавляя $-\partial_\lambda f_\nu^{\mu\lambda}$, мы убеждаемся, что поправка $O(\mu^2)$ в (2.43) равна нулю.