

## Лекция 5

### $O(N)$ -модель: интегрируемость и точная $S$ -матрица

Рассмотрим  $O(N)$ -модель с действием

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1))$$

и классическими уравнениями движения:

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса  $z, \bar{z}$  имеем для действия

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{2}{g} \int d^2x \left( \partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (5.1)$$

а для уравнений движения

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (5.2)$$

Действие (5.1) инвариантно относительно *псевдоконформных* преобразований

$$\mathbf{n}(z, \bar{z}) \rightarrow \mathbf{n}(f_1(z), f_2(\bar{z})), \quad \omega(z, \bar{z}) \rightarrow f_1'(z) f_2'(\bar{z}) \omega(f_1(z), f_2(\bar{z})). \quad (5.3)$$

Эти преобразования включают, в частности, трансляции

$$f_1(z) = z + c, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{c},$$

масштабное преобразование и преобразование Лоренца в виде

$$f_1(z) = \lambda z, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{\lambda} \bar{z},$$

и преобразование инверсии

$$f_1(z) = 1/z, \quad f_2(\bar{z}) = 1/\bar{z}.$$

В пространстве Минковского параметры с черточкой и без вещественны и независимы, тогда как в евклидовом пространстве они комплексные и комплексно-сопряженные друг другу.

При переходе к евклидову пространству трансляции, масштабное преобразование и инверсия образуют глобальную конформную группу, состоящую из конформных преобразований, взаимнооднозначных на сфере  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Локальные конформные преобразования, то есть преобразования, взаимнооднозначные только на каких-то областях, даются в этом случае произвольными аналитическими функциями  $f(z) \equiv f_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})}$ .

Ну а пока продолжим рассмотрение в пространстве Минковского. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{zz} = \frac{1}{g} (\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g} (\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g} (\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнениях движения компонента  $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}$  обращается в нуль, т. е.  $T_\mu^\mu = 0$ , что выражает масштабную инвариантность модели. Сохранение энергии-импульса записывается в виде

$$\bar{\partial} (\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial (\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (5.4)$$

В большинстве двумерных теорий энергия и импульс составляют единственные локальные интегралы движения, однако в случае  $O(N)$ -модели это не так. Во-первых, есть тривиальный интеграл движения в виде квадрата тензора энергии-импульса, следующий из конформной симметрии:

$$\bar{\partial} (\partial \mathbf{n})^4 = 0, \quad \partial (\bar{\partial} \mathbf{n})^4 = 0. \quad (5.5)$$

Во-вторых, нетрудно получить соотношения

$$4\bar{\partial} (\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial (\omega (\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial \omega (\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial (\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial} (\omega (\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial} \omega (\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5.6)$$

Сейчас мы покажем, что это уравнение означает существование дополнительного интеграла движения. Поскольку  $(\partial \mathbf{n})^2$  сохраняется, с помощью псевдоконформного преобразования  $z = f_1(z')$ , такого что

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

можно добиться того, чтобы в новых координатах было

$$(\partial \mathbf{n})^2 = 1.$$

Тогда (5.6) преобразуется к виду уравнения непрерывности

$$\bar{\partial}(\partial \partial \mathbf{n})^2 = \partial(2\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n}).$$

На самом деле (хотя это непросто показать) в модели имеется бесконечное число интегралов движения.

Мы знаем, что в квантовом случае (псевдо)конформная инвариантность модели нарушается, так как поле  $\omega$  приобретает ненулевое среднее значение. Поэтому рассуждения с конформными преобразованиями теряют силу. В квантовом случае в уравнениях, из которых следуют законы сохранения, должны возникать аномалии. Аномальные члены не должны нарушать масштабную инвариантность уравнений, в которые переходят законы сохранения. Поэтому, например, в правой части закона сохранения энергии-импульса допустим только один аномальный член, сводящийся к полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = -\beta \partial \omega. \quad (5.7)$$

Аналогично модифицируется соотношение (5.5). Правая часть уже не будет полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (5.8)$$

То же самое для (5.6):

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (5.9)$$

Из этих трех уравнений можно составить один закон сохранения:

$$\bar{\partial} \left( 4(\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (5.10)$$

Итак, имеется по крайней мере два интеграла движения спина 1 и 3:

$$I_1 = \int dz (\partial \mathbf{n})^2, \quad I_3 = \int dz \left( 4(\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right). \quad (5.11)$$

Эти интегралы удовлетворяют уравнению  $\bar{\partial} I_s = 0$ . Интегралы  $I_{-1}$ ,  $I_{-3}$ , удовлетворяющие уравнению  $\partial I_{-s} = 0$ , можно получить заменой  $z \leftrightarrow \bar{z}$ . При переходе к обычным координатам  $x, t$  и те, и другие величины остаются интегралами движения.

Можно показать, что эти интегралы коммутируют. Из существования четырех коммутативных интегралов движения можно заключить невозможность множественного рождения частиц в столкновениях двух частиц.

Пусть  $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$  — асимптотическое состояние из  $n$  частиц с быстройми  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Пользуясь тем, что  $p_z = -\frac{m}{2} e^\theta$ ,  $p_{\bar{z}} = \frac{m}{2} e^{-\theta}$ , нетрудно проверить, что

$$I_s |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = P_s(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n}) |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle,$$

где функция  $P_s$  однородна степени  $s$ :

$$P_s(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s P_s(x_1, \dots, x_n).$$

Если мы рассмотрим «далекое прошлое» или «далекое будущее», где частицы находятся достаточно далеко друг от друга, интегралы (5.11) будут отличны от нуля только вблизи частиц. Так что функция

$P_s$  распадется в одночастичные функции:  $P_s(x_1, \dots, x_n) = P_s(x_1) + \dots + P_s(x_n)$ . Очевидно,  $P_s(x) \sim x^s$ , поэтому

$$I_{\pm 1}|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n m e^{\pm \theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle,$$

$$I_{\pm 3}|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n m^3 e^{\pm 3\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Отсюда получаем четыре уравнения для рассеяния двух частиц в  $n$  частиц:

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Если зафиксировать быстроты частиц в конечном состоянии, будет четыре уравнения для двух неизвестных  $\theta_1$  and  $\theta_2$ . Эти уравнения могут иметь решения только при специальных значениях конечных быстрот  $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ . Но из аналитичности амплитуд следует, что амплитуды таких процессов должны быть тождественно равны нулю. Единственным исключением является случай  $n = 2$ , когда в амплитудах могут быть  $\delta$ -функции, отвечающие граничным значениям полюсов вне массовой поверхности.

Можно показать, что в модели имеется бесконечно много коммутирующих интегралов движения  $I_s$  с нечетными спинами  $s$ . В общем случае имеем

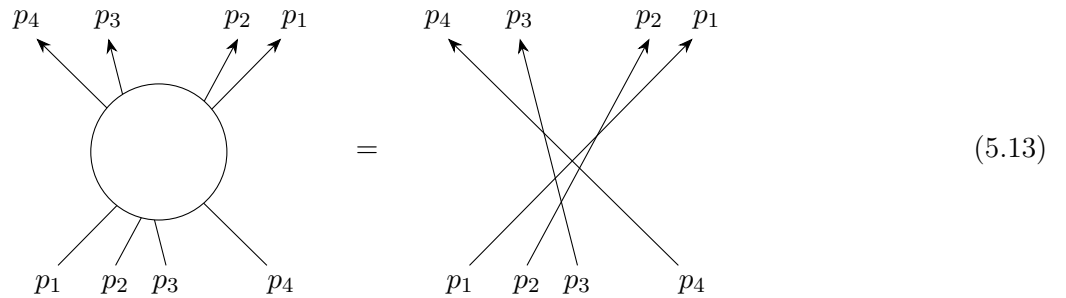
$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle. \quad (5.12)$$

Аналогично предыдущему заключаем, что модель допускает только рассеяния  $n$  частиц в  $n$ , причем частицы сохраняют импульсы и только меняют внутренние состояния.

Теперь сделаем важное

**Предположение факторизованного рассеяния.** Амплитуда рассеяния  $n$  частиц в  $n$  распадается в произведение всех попарных амплитуд рассеяния в любом порядке с суммированием по внутренним состояниям промежуточных частиц.

Графически это предположение можно изобразить так:



В принципе, гипотезу факторизованного рассеяния можно проверять в диаграммной технике порядок за порядком по  $1/N$ . А можно воспользоваться следующими качественными рассуждениями. Предположим, что имеется конечный радиус взаимодействия частиц  $R$ , за пределами которого виртуальные частицы почти не рождаются. Это значит, что если  $|x_i - x_j| \gg R$  ( $\forall i, j$ ), волновая функция почти не отличается от волновой функции  $n$  свободных частиц. Благодаря существованию  $I_{\pm 3}$  парное рассеяние частиц можно свести к прохождению частиц друг через друга с изменением внутренних состояний. Поэтому можно выбрать базис волновых функций без отраженных волн. Пусть  $\sigma, \tau$  — элементы группы перестановок  $S_n$  чисел  $1, \dots, n$ . Тогда система  $n$  бозонов будет описываться волновой функцией

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

при  $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (5.14)$

Зависимость коэффициентов  $A$  от импульсов мы опустили. Легко убедиться, что функция (5.14) симметрична по отношению к перестановкам пар  $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$ .

Мы пока не определили смысл параметров  $\beta_i$ . В принципе, мы можем этого и не делать. Но если мы хотим, чтобы  $\beta_i$  соответствовало, скажем, состоянию  $\alpha_i$  входящей частицы  $i$ , мы можем потребовать

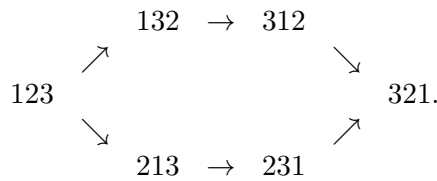
$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} [\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}. \quad (5.15)$$

Если при этом  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ , параметры  $\beta_i$  естественно описывают внутренние состояния падающих частиц. Хотя эта нормировка нарушает симметрию по импульсам (см. задачу 5), она будет нам удобна, поскольку обеспечивает аналитичность волновых функций как функций импульсов.

Перестановка двух частиц эквивалентна рассеянию этих частиц. Разумеется, рассеяние меняет настоящие состояния частиц  $\alpha_i$ , а не метки волновой функции  $\beta_i$ . Пусть  $s^i \in S_n$  — перестановка чисел  $i$  и  $i + 1$ , то есть  $s^i_i = i + 1$ ,  $s^i_{i+1} = i$ ,  $s^i_j = j$  ( $j \neq i, i + 1$ ). Тогда

$$A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_n} [\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}}^{\alpha_i \alpha_{i+1}}(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i+1}}) A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha'_i \alpha'_{i+1} \dots \alpha_n} [\tau]. \quad (5.16)$$

Переставим теперь три последовательные частицы, например,  $123 \rightarrow 321$ . Такой переход можно выполнить двумя способами:



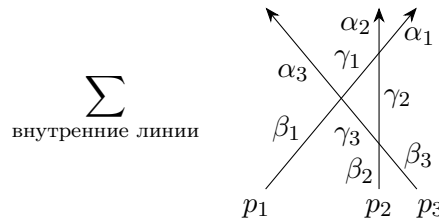
Первый способ приводит к соотношению

$$A_{\dots}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left( \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) \right) A_{\dots}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots]. \quad (5.17)$$

Проще это записать в матричном виде

$$A_{321 \dots} = S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) A_{123 \dots},$$

где индексы 1, 2, 3 указывают номер пространства, на которое действуют матрицы или в котором живут векторы. Еще удобней это изобразить графически



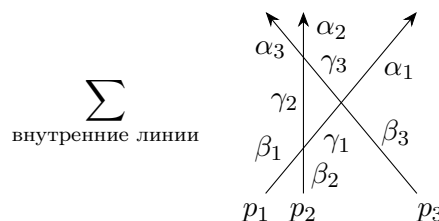
Второй способ приводит другому соотношению

$$A_{\dots}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left( \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2) \right) A_{\dots}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots], \quad (5.18)$$

или проще

$$A_{321 \dots} = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2) A_{123 \dots},$$

или графически



Условие того, что (5.17) и (5.18) приводят к одинаковому соотношению, называется *уравнением Янга—Бакстера* и записывается в виде

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2), \quad (5.19)$$

или более кратко

$$S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2), \quad (5.20)$$

или графически

$$\text{Diagram (5.21)} \quad (5.21)$$

Два графика на (5.21) отличаются положением одной из линий относительно пересечения двух других. На первом графике, например, вторая проходит слева от вершины, где пересекаются первая и третья частицы, а на втором — справа. Иными словами, уравнение Янга—Бакстера выражает условие того, что линии в (5.13) можно как угодно смещать, пронося через вершины. То есть неважно, в каком порядке мы будем рассматривать попарные рассеяния частиц; в любом случае мы получим один и тот же ответ.

Второе условие на  $S$ -матрицу более элементарно. Вернемся к соотношению (5.16). Понятно, что если мы дважды переставим два последовательных индекса в коэффициентах  $A$ , т. е. произведем преобразования

$$12 \rightarrow 21 \rightarrow 12,$$

мы должны получить тождественное преобразование. Отсюда следует *условие унитарности*<sup>1</sup>

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2} S_{\gamma_2 \gamma_1}^{\alpha_2 \alpha_1}(p_2, p_1) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2}, \quad (5.22)$$

или

$$S_{21}(p_2, p_1) S_{12}(p_1, p_2) = 1, \quad (5.23)$$

или

$$\text{Diagram (5.24)} \quad (5.24)$$

Последнее условие *перекрестной* или *кроссинг-инвариантности* верно только в релятивистской теории. Его естественно сразу записать графически:

$$\text{Diagram (5.25)} \quad (5.25)$$

Здесь импульсы  $p_1$  и  $p_2$  понимаются как пространственно-временные импульсы, черта над индексом внутреннего состояния частицы изображает античастицу. Формульно это записывается так

$$S_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) = \sum_{\alpha'_1 \beta'_1} C_{\beta_1 \beta'_1} S_{\beta_2 \alpha'_1}^{\alpha_2 \beta'_1}(p_2, -p_1) C_{\alpha'_1 \alpha_1}, \quad (5.26)$$

<sup>1</sup>Термин не вполне точный, поскольку это условие не означает положительности норм состояний. Это условие гарантирует только отсутствие других каналов рассеяния.

где  $C$  — матрица  $CPT$ -сопряжения.

Если выразить импульсы через быстроты, получим:

1. Уравнение Янга—Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.27)$$

2. Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1 \quad (5.28)$$

3. Кроссинг-симметрия

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1, \quad (5.29)$$

где тильда над цифрой 1 означает транспонирование по индексам, отвечающим этому пространству.

Условия *бутстрапа* (5.27–5.29) чрезвычайно ограничительны. Вместе с симметрией модели и условиями аналитичности они позволяют найти точное выражение для  $S$ -матрицы. Рассмотрим условия аналитичности.  $S$ -матрица является мероморфной функцией  $\theta$ . Физическому листу отвечает область

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (5.30)$$

причем точка  $\theta = i\pi$  отвечает точке ветвления  $s = (m_1 - m_2)^2$  по переменной

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta,$$

а точке  $\theta = 0$  отвечает точка  $s = (m_1 + m_2)^2$ . Линии  $\text{Im } \theta = \pi$  отвечает в плоскости  $s$  левый разрез  $(-\infty, (m_1 - m_2)^2]$ , а линии  $\text{Im } \theta = 0$  — правый разрез  $[(m_1 + m_2)^2, \infty)$ .

На мнимой оси  $S$ -матрица вещественна:

$$S(iu) \in \mathbb{R} \quad \text{при } u \in \mathbb{R}, \quad (5.31)$$

причем все полюсы  $S$ -матрицы на физическом листе находятся на мнимой оси. Части этих полюсов отвечают связанные состояния, однако чтобы установить, отвечает ли данный полюс связанному состоянию, обычно требуется дополнительное исследование.

Давайте решим [8] уравнение Янга—Бакстера для  $O(N)$ -симметричной ( $N \geq 3$ )  $S$ -матрицы  $N^2 \times N^2$  вида (4.17). Уравнение Янга—Бакстера для нее приобретает вид (Рис. 5.1)

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'), \quad (5.32)$$

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'), \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} NS_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_1(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') \\ + S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_3(\theta'). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Чтобы решить эту систему, введем обозначение  $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$ . Первое уравнение принимает вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно  $h(\theta) \sim \theta$  и

$$S_3(\theta) = -i \frac{\lambda}{\theta} S_2(\theta). \quad (5.35)$$

Пусть теперь  $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$ . Подставляя (5.35) в (5.33), получаем

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Это уравнение имеет решение

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Подставляя это в (5.34), получим

$$\kappa = \frac{N - 2}{2} \lambda.$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \\ = \\ \text{Diagram 3} \end{array} \quad (5.32) \\
& \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + \\ \text{Diagram 5} \\ = \\ \text{Diagram 6} \end{array} \quad (5.33) \\
& \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ + \\ \text{Diagram 8} \\ + \\ \text{Diagram 9} \\ + \\ \text{Diagram 10} \\ = \\ \text{Diagram 11} \end{array} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Рис. 5.1. Схематичное изображение уравнений (5.32)–(5.34). Соединению двух линий одного цвета в вершине соответствует символ Кронекера в  $S$ -матрице. На пересечениях линий одного цвета помечено, какие вклады в  $S$ -матрицу им соответствуют.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \\ = \\ \text{Diagram 3} \end{array} \quad (5.40) \\
& \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + \\ \text{Diagram 5} \\ = \\ 0 \end{array} \quad (5.41) \\
& \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ + \\ \text{Diagram 7} \\ + \\ \text{Diagram 8} \\ = \\ 0 \end{array} \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Рис. 5.2. Схематичное изображение уравнений (5.40)–(5.42).

Это значит, что

$$S_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i(N-2)\lambda/2 - \theta} S_2(\theta). \quad (5.36)$$

Это самое общее решение уравнения Янга–Бакстера, зависящее от произвольной функции  $S_2(\theta)$  и произвольного параметра  $\lambda$ . Воспользуемся теперь условиями кроссинг-инвариантности и унитарности, чтобы зафиксировать  $S_2$  и  $\lambda$ .

Условие кроссинг-симметрии имеет вид

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (5.37)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (5.38)$$

Подставляя сюда (5.35) и (5.36), получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (5.39)$$

Условие унитарности (Рис. 5.2)

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (5.40)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
& NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) \\
& + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0 \quad (5.42)
\end{aligned}$$

удовлетворяется, если

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (5.43)$$

Теперь нам надо решить совместно уравнения (5.37) и (5.43). Понятно, что решение этих уравнений неоднозначно. Решение переходит в решение, если домножить его на функцию

$$\frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \alpha}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \alpha}$$

с произвольным  $\alpha$ . Мы будем искать «минимальное» решение, то есть такое решение, которое будет иметь наименьшее количество нулей и полюсов на физическом листе.

Из (5.43) заключаем, что  $S_2(\theta)$  имеет простой нуль в точке  $\theta = 0$ . Из кроссинг-симметрии (5.37) немедленно заключаем, что простой нуль имеется также в точке  $\theta = i\pi$ . Из унитарности находим, что в точке  $\theta = -i\pi$  имеется полюс. Продолжая поочередно применять кроссинг-симметрию и унитарность, находим набор полюсов и нулей функции  $S_2(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.44)$$

Другой набор нулей и полюсов получается следующим образом. Из (5.43) следует, что  $S_2$  должна иметь полюс в одной из точек  $\theta = \mp i\lambda$ . Давайте обозначать решения с такими полюсами  $S_2^{(\pm)}(\theta)$ . Рассуждая как и раньше, получим для  $S_2^{(\pm)}(\theta)$

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = \mp i\lambda - i\pi - 2\pi in, \pm i\lambda + 2\pi i + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = \mp i\lambda - 2\pi in, \pm i\lambda + i\pi + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.45)$$

Собирая (5.44), (5.45), получим

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta)Q^{(\pm)}(i\pi - \theta), \quad Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma\left(\pm\frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)}. \quad (5.46)$$

Раскладывая  $S$ -матрицу (5.35), (5.36), (5.46) с учетом (5.39) по  $1/N$ , получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (5.47)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (5.48)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (5.49)$$

Это позволяет отождествить  $S^{(+)}(\theta)$  с  $S$ -матрицей  $O(N)$ -модели, а  $S^{(-)}(\theta)$  с  $S$ -матрицей  $N$ -компонентной модели Гросса–Невё. Заметим, что  $S_1^{(\pm)}(0) = S_2^{(\pm)}(0) = 0$ ,  $S_3^{(\pm)}(0) = \mp 1$ . Отсюда следует

$$S_{12}^{(\pm)}(0) = \mp P_{12}, \quad (5.50)$$

где  $P_{12} : a \times b \mapsto b \times a$  — оператор перестановки пространств 1 и 2. Это означает, что для частиц в  $O(N)$ -модели действует принцип Паули, хотя мы и считали частицы бозонами. Этот принцип Паули даже более сильный, чем в случае свободных фермионов: две частицы не могут иметь одинаковые импульсы.

На самом деле в двумерном пространстве-времени нельзя сказать, является ли частица бозоном или фермионом. Если говорить о спине, то мы знаем, что такое спин оператора, но не знаем, что такое спин состояния, так как в одномерном пространстве нет вращений. Кроме того, в одном пространственном измерении есть способ построения алгебры Клиффорда (фермионной алгебры) по алгебре Гайзенберга (бозонной алгебре) и наоборот [11]. Это преобразование уважает понятие частицы, но меняет характер взаимодействия. Именно, матрица рассеяния частиц как фермионов отличается от матрицы рассеяния тех же частиц как бозонов знаком.

## Задачи

1. Получите уравнение (5.6).



**2.** Напишите явно асимптотическое выражение для волновой функции (5.14) для двух и трех частиц ( $n = 2, 3$ ). Приняв условие (5.16) для  $n = 2$  за определение  $S$ -матрицы, убедитесь, что отсюда следует (5.16) для случая  $n = 3$ . Покажите, что произведение трех  $S$ -матриц  $S_{12}S_{13}S_{23}$  действительно имеет смысл трехчастичной  $S$ -матрицы.

**3.** Выведите (5.47–5.49).

**4.** Проверьте (5.50). Покажите, что из  $S(0) = -P$  следует принцип Паули для *взаимодействующих бозонов*: две частицы не могут иметь одинаковые импульсы.

**5\*.** Найдите, как преобразуется волновая функция, определенная уравнением (5.14), коэффициенты которой заданы условием (5.15), при перестановке пары соседних индексов:  $(\beta_i, p_i) \leftrightarrow (\beta_{i+1}, p_{i+1})$ .

## Семинар 5

Составляем и решаем уравнения Янга—Бакстера,  
унитарности и кроссинг-симметрии (в процессе лекции)