

## Лекция 6

### Бозоны и фермионы с контактным взаимодействием

В этой лекции мы рассмотрим две простые точно решаемые нерелятивистские модели, которые хорошо демонстрируют устройство анзаца Бете. Эти модели являются простейшими примерами так называемых моделей Янга—Годена с четырехчастичным взаимодействием.

Пусть  $\varphi(t, x)$ ,  $\varphi^+(t, x)$  — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0. \quad (6.1)$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left( \frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right). \quad (6.2)$$

Приглядевшись, мы видим, что это гамильтониан нелинейного уравнения Шрёдингера. Действительно, уравнение Гайзенберга для оператора  $\varphi$  имеет вид

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \varphi - c \varphi^+ \varphi^2. \quad (6.3)$$

Чтобы найти классический предел, нужно сделать замену  $\varphi \rightarrow \hbar^{-1/2} \varphi$ ,  $c \rightarrow \hbar c$  и устремить  $\hbar$  к нулю. В этом пределе коммутатор стремится к нулю, а скобка  $\frac{1}{\hbar}[\cdot, \cdot]$  переходит в скобку Пуассона. Уравнение (6.3) не меняет вид, но приобретает смысл классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Заметим, что два оператора

$$Q = \int dx \varphi^+ \varphi, \quad P = -i \int dx \varphi^+ \partial_x \varphi \quad (6.4)$$

коммутируют с гамильтонианом. Легко видеть, что эти операторы представляют собой оператор числа частиц и оператор импульса. Можно ввести вакуум  $|0\rangle$  с нулевыми энергией и импульсом, определяемый соотношениями

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0. \quad (6.5)$$

Состояния вида

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle, \quad (6.6)$$

образуют собственное подпространство  $\mathcal{H}_N$  оператора  $Q$ . Определим оператор  $\hat{H}_N$  на симметрических функциях  $N$  переменных по формуле

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle. \quad (6.7)$$

Этот оператор представляет собой первично-квантованный гамильтониан и имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(x_i - x_j). \quad (6.8)$$

Мы видим, что на собственном подпространстве  $\mathcal{H}_N$  гамильтониан (6.2) действует как гамильтониан (6.8) системы бозонов с дельтаобразным потенциалом взаимодействия. Такую систему называют системой Либа—Линихера. Покажем, что система Либа—Линихера допускает точное решение.

Начнем со случая  $N = 1$ . Он тривиален. Член со взаимодействием отсутствует и решение стационарной задачи представляет собой плоскую волну:

$$\chi(x) = e^{ipx}, \quad E = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.9)$$

Перейдем теперь к случаю  $N = 2$ . При  $x_1 \neq x_2$  член взаимодействия равен нулю, поэтому решение должно представлять собой суперпозицию плоских волн. В силу симметрии волновой функции и сохранения энергии и импульса базисные решения имеют вид

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (6.10)$$

Энергия такой системы, очевидно, равна

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m},$$

а взаимодействие в гамильтониане определяет только сшивку волновых функций при  $x_1 = x_2$ . Заметим, что эта функция непрерывна при  $x_1 = x_2$ , но, вообще говоря, не дифференцируема в этой точке: производная испытывает скачок. Давайте его найдем. Перейдем к координатам центра масс  $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  и относительного положения частиц  $x = x_1 - x_2$ . Гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{4m}\partial_X^2 - \frac{1}{m}\partial_x^2 + c\delta(x),$$

а волновая функция равна

$$\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right) = e^{i(p_1+p_2)X} \times \begin{cases} A_{12}e^{ipx/2} + A_{21}e^{-ipx/2}, & \text{при } x < 0; \\ A_{21}e^{ipx/2} + A_{12}e^{-ipx/2}, & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad p = p_1 - p_2. \quad (6.11)$$

Проинтегрируем уравнение Шрёдингера  $\hat{H}_2\chi = E\chi$  по переменной  $x$  по маленькому интервалу  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Интеграл от правой части стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . По той же причине стремится к нулю член с  $\partial_X^2\chi$ . Поэтому имеем

$$0 = -\frac{1}{m}\partial_x\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=-0}^{x=+0} + c\chi(X, X) = \frac{1}{2m}(\partial_{x_2}\chi(x_1, x_2) - \partial_{x_1}\chi(x_1, x_2))\Bigg|_{x_1=x_2-0}^{x_1=x_2+0} + c\chi(x_2, x_2).$$

Подставляя волновую функцию в виде (6.11), находим отношение коэффициентов:

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = S(p_1 - p_2), \quad S(p) \equiv -e^{i\Phi(p)} = \frac{p - imc}{p + imc}. \quad (6.12)$$

Функция  $S(p)$  является матрицей рассеяния двух частиц. В дальнейшем нам понадобится величина  $\Phi(p)$ , отличающаяся на константу  $\pi$  от фазы рассеяния. Ее удобно будет доопределить условием нечетности

$$\Phi(-p) = -\Phi(p). \quad (6.13)$$

При  $c > 0$  функция  $\Phi(p)$  монотонно возрастает, причем  $\Phi(p) \rightarrow \pm\pi$  при  $p \rightarrow \pm\infty$ . При  $c < 0$  убывает в тех же пределах.

Рассмотрим теперь общие волновые функции для  $N$  частиц. Легко видеть, что эти функции должны быть линейными комбинациями плоских волн при всех различных  $x_i$ , а их производные должны иметь разрывы при  $x_i = x_j$ :

$$\frac{1}{2m}(\partial_{x_j}\chi(x_i, x_j) - \partial_{x_i}\chi(x_i, x_j))\Bigg|_{x_i=x_j-0}^{x_i=x_j+0} + c\chi(x_j, x_j) = 0 \quad (i \neq j). \quad (6.14)$$

Будем искать волновые функции в виде

$$\chi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} A_\tau \exp\left(i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}\right), \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (6.15)$$

Эти функции очевидным образом симметричны, а условия (6.14) эквивалентны уравнениям на коэффициенты

$$\frac{A_{\dots j i \dots}}{A_{\dots i j \dots}} = S(p_i - p_j). \quad (6.16)$$

Наложим на систему периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (6.17)$$

Если, например,  $x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_1 + L$ , члены в левой и правой частях должны попарно совпасть для перестановок  $\tau$ , отличающихся в разных частях циклической перестановкой  $(12 \dots N) \rightarrow (2 \dots N1)$ . Отсюда получаем систему *уравнений Бете*

$$e^{ip_i L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(p_i - p_j) = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.18)$$

Любому решению уравнений Бете отвечает некоторая волновая функция. Можно показать (см. задачу к предыдущей лекции), что если два импульса совпадают  $p_i = p_j$  ( $i \neq j$ ), то волновая функция обращается в нуль. Но все решения с различными импульсами ( $p_i \neq p_j$  для любых  $i \neq j$ ) ненулевые и, более того, отвечают линейно независимым состояниям. Полный импульс и полная энергия бетевского состояния равны

$$P = \sum_{i=1}^N p_i, \quad E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \quad (6.19)$$

причем полный импульс просто квантуется:

$$e^{iPL} = \prod_{i \neq j} S(p_j - p_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2\pi\nu}{L} \quad (\nu \in \mathbb{Z}). \quad (6.20)$$

Более того, величины

$$I_n = \sum_{i=1}^N p_i^n \quad (6.21)$$

представляют собой собственные значения некоторых коммутирующих интегралов движения

$$\mathcal{I}_n = (-i)^n \int dx (\varphi^+ \partial_x^n \varphi + \dots), \quad [\mathcal{I}_n, H] = 0, \quad [\mathcal{I}_m, \mathcal{I}_n] = 0.$$

Точки означают члены более высокого порядка по  $\varphi, \varphi^+$ . Собственно, сохранение этих интегралов движения и обеспечивает отсутствие отраженных волн в состоянии (6.15) и, соответственно, точную интегрируемость задачи.

Прологарифмируем уравнения Бете (6.18):

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}, \quad (6.22)$$

где  $\Phi(p)$  определена выше в (6.12), (6.13). Числа  $n_i$  все полуцелые или все целые в зависимости от четности числа частиц  $N$ . Это следует из множителя  $(-1)^{N-1}$ , содержащегося в произведении в (6.18). Можно показать, что каждому набору попарно различных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^N$  отвечает единственное решение  $\{p_i\}_{i=1}^N$  уравнений Бете. Заметим, что это кардинально отличает ситуацию  $c \neq 0$  от ситуации  $c = 0$ , в которой числа  $n_i$  всегда целые и, главное, могут совпадать. Всюду ниже мы будем полагать  $c > 0$ , то есть рассматривать систему с отталкиванием.

Зафиксируем какое-то решение уравнений Бете набором целых чисел  $\{n_i\}$ . Рассмотрим уравнение

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n, \quad (6.23)$$

связывающее два числа  $p$  и  $n$ . В силу монотонного роста функции  $\Phi(p)$  величина  $n$  монотонно растет с  $p$ . Поэтому эта связь взаимно-однозначна. Мы будем обозначать  $p(n)$  единственное решение этого

уравнения при данном  $n$ . Очевидно, что  $p(n_i) = p_i$ . Мы будем говорить о числах  $n_i$  как о «заполненных состояниях», а о числах  $n \neq n_i$  для всех  $i$  как о «вакантных состояниях».

Итак, мы нашли вид волновых функций в модели Либа—Линихера, матрицу рассеяния частиц и уравнения, определяющие спектр системы в конечном объеме. Мы хотим найти основное состояние системы  $N$  частиц. Вообще говоря, эта задача сводится к (численному) решению системы нелинейных уравнений (6.22) и подбору значений  $n_i$ , отвечающих наименьшей энергии. Задача значительно упрощается в термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$ ,  $N/L = \text{const}$ .

Чтобы понять структуру основного состояния, удобно начать анализ не со слабого взаимодействия, а с сильного  $c \rightarrow +\infty$ . В этом пределе  $\Phi(p) = 0$  и уравнения Бете принимают вид  $p_i L = 2\pi n_i$ . Все импульсы независимы, но не равны друг другу, так что основному состоянию отвечает случай  $|p| \leq p_{\max}$ . Числа  $n_i$  плотно заполняют интервал от  $-\frac{N-1}{2}$  до  $\frac{N-1}{2}$ . Отсюда имеем  $p_{\max} = \frac{\pi(N-1)}{L}$ . Энергия такой системы равна

$$E = \frac{\pi^2}{2mL^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{N-1-2k}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2 N(N-1)(2N-1)}{48mL^2} \simeq \frac{\pi^2 N^3}{24mL^2}.$$

Теперь будем уменьшать постоянную  $c$ . При этом максимальный импульс  $p_{\max}$  будет уменьшаться, в то время как максимальное значение  $\frac{N-1}{2}$  чисел  $|n_i|$  не изменится. Будет уменьшаться и энергия системы. В конце концов, при  $c = 0$  функция  $\Phi(p)$  станет ступенчатой, а  $p_{\max}$  и полная энергия системы обратятся в нуль, что отвечает бозе-конденсации. В термодинамическом пределе расстояние между соседними импульсами оказывается порядка  $1/L$ , а спектральная плотность состояний на единицу длины

$$\rho(p) = \frac{2\pi dn}{L dp} \simeq \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))} \quad (6.24)$$

остается конечной. Поэтому сумму в уравнении (6.22) в основном состоянии можно заменить на интеграл. Для этого введем также спектральную плотность заполненных состояний. Расположим  $n_i$  в порядке возрастания:  $n_1 < n_2 < \dots$  и положим

$$\rho^\bullet(p) = \frac{2\pi di}{L dp} \simeq \frac{2\pi}{L(p_{i+1} - p_i)}. \quad (6.25)$$

Теперь возьмем разность двух уравнений (6.23) с  $n+1$  и  $n$  в правой части и поделим их на  $L(p(n+1) - p(n))$ . Получим

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} = \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}.$$

Заменяя сумму по  $j$  на интеграл по  $dp_j$ , а отношение под суммой приближая производной  $\Phi'(p) = \frac{d}{dp} \Phi(p)$ , получим

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p). \quad (6.26)$$

Это уравнение связывает плотность заполненных состояний и плотность состояний. Но процедура вычитания исключило одно уравнение из системы. Поэтому дополним систему условием равенства числа заполненных состояний числу частиц:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) = \frac{N}{L}. \quad (6.27)$$

В случае основного состояния эти две величины связаны еще и условием того, что заполненные состояния плотно заполняют интервал  $[-p_{\max}, p_{\max}]$ :

$$\rho^\bullet(p) = \begin{cases} \rho(p), & |p| \leq p_{\max}; \\ 0, & |p| > p_{\max}. \end{cases} \quad (6.28)$$

Отсюда получаем интегральное уравнение

$$1 + \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p-p')\rho(p') = \rho(p), \quad \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) = \frac{N}{L}. \quad (6.29)$$

Это уравнение решается, вообще говоря, численно и позволяет найти энергию основного состояния

$$\frac{E}{L} = \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) \frac{p^2}{2m}. \quad (6.30)$$

Численно решить уравнения Бете, тем более, в термодинамическом пределе, намного проще, чем численно диагонализировать матрицу, которая получается ограничением гамильтониана (6.2) на какое-либо конечное подпространство. Более того, результаты, получаемые решением уравнений Бете, одинаково хороши для любых размеров системы и значений константы связи. В этом смысле мы будем говорить, что уравнения Бете дают точное решение задачи. В следующей лекции мы применим анзац Бете к релятивистской системе и увидим, что для нее можно получить точные *аналитические* результаты в задаче, напоминающей термодинамический предел в модели Либа—Линихера.

Теперь рассмотрим аналогичную фермионную задачу с дельтаобразным взаимодействием. В этом случае член со взаимодействием не равен нулю, только если у нас есть как минимум два сорта фермионов. Это могут быть, например, фермионы спина 1/2. Обозначим их  $\psi_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \pm$ . Коммутационные соотношения имеют вид

$$\{\psi_\varepsilon(x), \psi_{\varepsilon'}^+(x')\} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta(x-x'), \quad \{\psi_\varepsilon(x), \psi_{\varepsilon'}(x')\} = \{\psi_\varepsilon^+(x), \psi_{\varepsilon'}^+(x')\} = 0, \quad (6.31)$$

где фигурные скобки обозначают антикоммутатор. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left( \sum_{\varepsilon=\pm} \frac{\partial_x \psi_\varepsilon^+ \partial_x \psi_\varepsilon}{2m} + c \psi_+^+ \psi_-^+ \psi_- \psi_+ \right). \quad (6.32)$$

Обратим внимание на существенную разницу между гамильтонианами (6.2) и (6.32). В случае модели Либа—Линихера все частицы взаимодействовали между собой. В фермионной модели имеется два сорта частиц, причем число частиц каждого сорта сохраняется, но взаимодействуют только частицы разных сортов.

Итак, в системе имеются следующие сохраняющиеся величины:

$$Q_\varepsilon = \int dx \psi_\varepsilon^+ \psi_\varepsilon, \quad P = -i \sum_{\varepsilon=\pm} \int dx \psi_\varepsilon^+ \partial_x \psi_\varepsilon. \quad (6.33)$$

Аналогично бозонному случаю определим вакуум

$$\psi_\varepsilon(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_\varepsilon^+(x) = 0 \quad (6.34)$$

и состояния с фиксированным количеством частиц

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^+(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^+(x_1) |0\rangle. \quad (6.35)$$

Первично-квантованный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + \frac{c}{2} \sum_{i<j} (1 - \sigma_i^3 \sigma_j^3) \delta(x_i - x_j), \quad (6.36)$$

где  $\sigma_i^3$  — это матрица  $\sigma^3 = \text{diag}(1, -1)$ , действующая в пространстве  $i$ го спина.

При  $N = 1$  плоские волны

$$\chi^\varepsilon(x) = A^\varepsilon e^{ipx} \quad (6.37)$$

являются собственными функциями гамильтониана с импульсом  $P = p$  и энергией  $E = \frac{p^2}{2m}$ . При  $N = 2$  будем искать собственные функции в виде

$$\chi^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} - A_{21}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}, & x_1 < x_2; \\ A_{21}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} - A_{12}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}, & x_1 > x_2. \end{cases} \quad (6.38)$$

Функция, очевидно, антисимметрична по отношению к перестановке пар  $(\varepsilon_1, x_1) \leftrightarrow (\varepsilon_2, x_2)$ . Чтобы найти коэффициенты в правой части, подействуем гамильтонианом (6.36) на эту функцию. Предполагая непрерывность функции  $\chi$ ,

$$A_{12}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - A_{21}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = A_{21}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} - A_{12}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1},$$

мы получим следующие соотношения:

$$A_{21}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} = \sum_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} S(p_1 - p_2)_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} A_{12}^{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}, \quad S(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{p}{p+imc} & \frac{imc}{p+imc} & \\ & \frac{imc}{p+imc} & \frac{p}{p+imc} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

где матрица  $S(p)$  записана в базисе  $++, +-, -+, --$ . Эта матрица представляет собой двухчастичную матрицу рассеяния фермионов в вакууме. Легко проверить, что матрица  $S(p)$  удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера:

$$S_{12}(p_1 - p_2) S_{13}(p_1 - p_3) S_{23}(p_2 - p_3) = S_{23}(p_2 - p_3) S_{13}(p_1 - p_3) S_{12}(p_1 - p_2) \quad (6.40)$$

Заметим также, что  $S(0)$  представляет собой матрицу перестановки  $P$ . Графически это представляется в виде

$$S(0) = \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \searrow \quad \nearrow \\ p \quad p \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ p \quad p \end{array} = P. \quad (6.41)$$

Многочастичную волновую функцию в этой задаче тоже легко написать:

$$\chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} (-1)^{\sigma \tau} A_{\tau}^{\varepsilon_{\sigma_1} \dots \varepsilon_{\sigma_N}} e^{i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}, \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (6.42)$$

Действуя на эту функцию гамильтонианом, нетрудно найти условие на коэффициенты

$$A_{\dots j i \dots} = S_{ij}(p_i - p_j) A_{\dots i j \dots}, \quad (6.43)$$

где индексы у  $S$ -матрицы означают пару пространств, на которых она действует.

Наложим теперь условие периодичности. Совершенно аналогично (6.18), получаем

$$e^{ip_i L} T^{(i)}(p_1, \dots, p_N) A_{1 \dots N} = A_{1 \dots N}, \quad T^{(i)}(p_1, \dots, p_N) = \prod_{j=1}^{\widehat{i-1}} S_{ij}(p_i - p_j) \prod_{j=i+1}^{\widehat{N}} S_{ij}(p_i - p_j) \quad (6.44)$$

Мы видим, что задача о нахождении периодических функций свелась к задаче о диагонализации операторов  $T^{(j)}$  в «спиновом» пространстве, причем все эти операторы должны диагонализировываться на одном и том же базисе. Для этого они должны коммутировать. Покажем, что это так. Для этого удобно представить матрицы графически:

$$T^{(i)} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right\} \begin{array}{c} i-1 \\ 1 \\ N \\ i+1 \\ i \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \end{array} \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \right) \\
&= \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \end{array} \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} 0 \right) = T(p_i; p_1, \dots, p_N), \quad (6.45)
\end{aligned}$$

где

$$T(p) \equiv T(p; p_1, \dots, p_N) = \text{tr}_0(S_{N0}(p_N - p) \cdots S_{20}(p_2 - p) S_{10}(p_1 - p)). \quad (6.46)$$

След берется по некоторому вспомогательному пространству, обозначенному здесь через 0. Мы использовали соотношение (6.41) при переходе от второй к третьей строчке.

Оператор  $T(p)$  имеет вид трансфер-матрицы некоторой решеточной модели, а именно шестивершинной модели в точке перехода между щелевой и бесщелевой фазами<sup>1</sup>. Мы знаем, что построенные так трансфер-матрицы коммутируют:

$$[T(p), T(p')] = 0, \quad (6.47)$$

если  $R$ -матрица удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (6.40). Отсюда немедленно следует, что

$$[T^{(i)}, T^{(j)}] = 0. \quad (6.48)$$

Диагонализировать семейство матриц  $T(p)$  можно с помощью стандартной техники алгебраического анзаца Бете. Уравнения Бете пишутся на набор переменных  $(u_1, \dots, u_n)$ . Количество переменных  $n \leq N$  связано с (сохраняющимся) спином состояния:

$$S^z = \frac{N}{2} - n. \quad (6.49)$$

Система *вторичных* уравнений Бете имеют вид

$$\prod_{i=1}^N \frac{u_a - p_i + \frac{imc}{2}}{u_a - p_i - \frac{imc}{2}} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^n \frac{u_a - u_b + imc}{u_a - u_b - imc}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (6.50)$$

Каждому решению этих уравнений Бете отвечает собственное значение трансфер-матрицы  $T(p)$  вида

$$\Lambda(p; \{p_k\}; \{u_b\}) = \prod_{a=1}^n \frac{u_a - p - \frac{imc}{2}}{u_a - p + \frac{imc}{2}} + \prod_{i=1}^N \frac{p - p_i}{p - p_i - imc} \prod_{a=1}^n \frac{p - u_a - \frac{3imc}{2}}{p - u_a - \frac{imc}{2}} \quad (6.51)$$

В случае  $p = p_j$  второй член пропадает и мы получаем *первичные* уравнения Бете в виде

$$e^{ip_i L} = \prod_{a=1}^n \frac{u_a - p_i + \frac{imc}{2}}{u_a - p_i - \frac{imc}{2}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.52)$$

Система уравнений (6.50), (6.52) представляет собой систему уравнений Бете на переменные  $p_1, \dots, p_N$ ,  $u_1, \dots, u_n$ , позволяющую построить все собственные векторы и найти все собственные значения гамильтониана (6.32). Полный импульс и энергия даются теми же формулами (6.19), что и в случае модели Либа–Линихера, причем полный импульс удовлетворяет тому же условию квантования (6.20).

В термодинамическом пределе для основного состояния и низколежащих возбуждений эти уравнения могут быть сведены к линейным интегральным уравнениям. Мы не будем подробно обсуждать эту тему. Мне важно было обратить ваше внимание на эту связь между интегрируемыми решеточными моделями статистической механики и динамикой внутренних состояний частиц в многочастичной системе.

<sup>1</sup>В свою очередь, эта модель в однородном случае эквивалентна XXX-цепочке Гайзенберга.

### Задачи

1. Покажите, что  $\mathcal{I}_3 = i \int dx (\varphi^+ \partial_x^3 \varphi - 3mc(\varphi^+)^2 \varphi \partial_x \varphi)$ .
2. Покажите, что модель Либба—Линихера при  $c \rightarrow +\infty$  эквивалентна модели свободных бесспиновых фермионов.
3. Найдите все решения уравнения (6.22) в пределе  $c \rightarrow +0$ , то есть для  $\Phi(p) \rightarrow \pi \operatorname{sign} p$ .
4. Выведите (6.39).
- 5\*. Покажите, что в модели Либба—Линихера при  $c < 0$  для любого целого положительного  $n$  имеется связанное состояние  $n$  частиц с энергией  $E_n^* = -\frac{n(n^2-1)}{24} mc^2$ . Опишите основное состояние системы  $N$  частиц.

### Семинар 6

#### Вычеты $S$ -матрицы и связанные состояния