

Лекция 12

Термодинамический анзац Бете: результаты

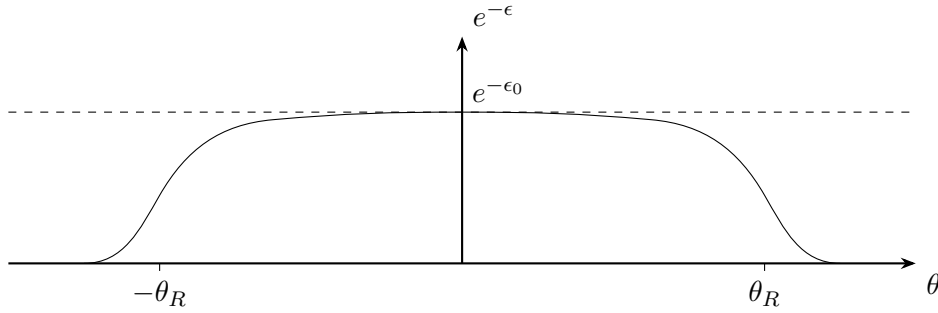
Вернемся к случаю одной частицы и рассмотрим предел высоких температур. Легко заметить, что уравнение (11.25) имеет постоянное решение $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ при $R = 0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma \nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi} \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2\pi}. \quad (12.1)$$

Рассмотрим теперь малые, но конечные значения R . В этом случае имеется значение $\theta_R \gg 1$ при котором правая часть (11.25) равна единице:

$$\theta_R \simeq \log \frac{2}{mR}. \quad (12.2)$$

Если $e^{|\theta|} \ll e^{\theta_R}$, правой частью можно пренебречь и $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$. Если же, наоборот, $e^{|\theta|} \gg e^{\theta_R}$, правая часть велика, так что $\epsilon(\theta) \simeq mR \operatorname{ch} \theta$ и $e^{-\epsilon(\theta)} \rightarrow 0$. Нетривиальным оно становится вблизи двух точек θ_R и $-\theta_R$, где имеет форму «кинка» для $e^{-\epsilon}$:



Но при больших θ_R решения вблизи этих двух точек не зависят друг от друга и от R . Так как $\epsilon(-\theta) = \epsilon(\theta)$, рассмотрим решение вблизи θ_R . Полагая $\tilde{\epsilon}(\theta) = \epsilon(\theta_R + \theta)$, мы получаем для $\tilde{\epsilon}(\theta)$ приближенное уравнение

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^\theta. \quad (12.3)$$

В формуле (11.27) для скейлинговой функции $f(r)$ ($r = mR$) в силу четности функции $\epsilon(\theta)$ можно $\operatorname{ch} \theta$ заменить на e^θ . Тогда вклад левого кинка будет подавлен, и в пределе $r \rightarrow 0$ скейлинговая функция выражается через правое кинковое решение:

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) = \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \quad (12.4)$$

В приближении (12.3) ответ не зависит от r , поэтому формула (12.4) даст $f(0)$. Вычислим эту величину.

Продифференцируем уравнение (12.3) по θ :

$$e^\theta = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Подставляя это в правую часть (12.4), мы получаем два слагаемых

$$f_1(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{\epsilon}'(\theta) \tilde{l}(\theta) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}), \quad \text{где } \tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}),$$

и

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta) \tilde{l}(\theta').$$

Слагаемое $f_1(0)$ не зависит от вида функции $\tilde{\epsilon}(\theta)$ и сводится к интегралу от элементарных функций. Слагаемое $f_2(0)$ в силу нечетности и быстрого убывания $\phi''(\theta)$ обратилось бы в нуль, если бы интегралы коммутировали. Но эти интегралы не коммутируют, потому что $\tilde{l}(\theta)$ стремится к конечному значению

$$l_0 = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) = -\nu^{-1} \epsilon_0$$

при $\theta \rightarrow -\infty$. Сначала перепишем интеграл в виде

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta')$$

Интеграл по θ' можно взять по частям, поскольку $\phi'(\theta)$ быстро убывает при $\theta \rightarrow \pm\infty$. Получаем

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu) \tilde{l}'(\theta')$$

Постоянное слагаемое $\pi\nu$ (пропадающее при дифференцировании по θ) добавлено к ϕ для того, чтобы интеграл стремился к нулю при $\theta \rightarrow -\infty$. При этом интеграл по θ' сходится, поскольку $\tilde{l}'(\theta)$ стремится к нулю достаточно быстро при $\theta \rightarrow \pm\infty$. После этого можно взять по частям интеграл по θ :

$$f_2(0) = \pi\nu \int \frac{d\theta d\theta'}{2\pi^2} \tilde{l}'(\theta) \tilde{l}'(\theta') + \int \frac{d\theta d\theta'}{2\pi^2} \tilde{l}'(\theta) \phi(\theta - \theta') \tilde{l}'(\theta').$$

В каждом из этих слагаемых интегралы коммутируют в силу быстрого убывания $\tilde{l}'(\theta)$. Второе слагаемое равно нулю в силу нечетности функции ϕ , а интеграл в первом слагаемом элементарно берется:

$$f_2(0) = \frac{\nu \tilde{l}_0^2}{2\pi} = -\frac{\epsilon_0 \tilde{l}_0}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$f(0) = \frac{\sigma}{\pi} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) + \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}) \right). \quad (12.5)$$

Эту функцию принято записывать через так называемый *дилогарифм Роджерса*:

$$\begin{aligned} L(z) &= -\frac{1}{2} \int_0^z du \left(\frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u} \right) = \frac{\log z \log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u} \log(1-u), \\ L(-z) &= -L\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad L(1/z) = 2L(1) - L(z) \quad (0 \leq z \leq 1). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Дилогарифм Роджерса не является продолжением комплексно-аналитической функции на вещественную ось, но является монотонной непрерывной функцией, вещественно-аналитической всюду, кроме точек 0 и 1.

Имеем

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0) = \frac{6\sigma}{\pi^2} L(\sigma e^{-\epsilon_0}). \quad (12.7)$$

Надо сказать, что дилогарифм Роджерса встречается во множестве задач, связанных с термодинамическим анзацем Бете, и потому хорошо изучен. Найдено множество его специальных значений. Нам будут важны следующие равенства:

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \frac{\pi^2}{6} = L(z) + L(1-z), \quad L\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим несколько примеров. Начнем с тривиальных. Для свободной частицы $S(\theta) = 1$, $\nu = 0$ и $\epsilon_0 = 0$. Поэтому имеем

$$c^{FB} = c_{\text{eff}}^{FB} = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1$$

в бозонном случае и

$$c^{FF} = c_{\text{eff}}^{FF} = -\frac{6}{\pi^2} L(-1) = \frac{6}{\pi^2} L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

в фермионном случае (модель Изинга в нулевом магнитном поле).

Теперь перейдем к нетривиальным случаям. Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\text{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \quad (12.9)$$

Начнем со случая $-1 < p < 0$, который соответствует модели sh-Гордона. Это «фермионная» S -матрица для бозонов: $S(0) = -1$. В этой модели имеется всего одна частица, так что можно прямо применять полученные формулы. В этом случае $\nu = 1$ и уравнение (12.1) не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \rightarrow +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2} L(-\infty) = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим матрицу (12.9) при $0 < p < 1$. В отличие от предыдущего случая, здесь $\nu = -1$ и уравнение (12.1) имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем эффективный центральный заряд

$$c_{\text{eff}}^{LY} = \frac{2}{5}. \quad (12.10)$$

Очевидно, эта величина имеет смысл только тогда, когда спектр состоит из одной этой частицы. Спектр модели синус-Гордона содержит также солитоны и высшие бризеры (на последнее указывает полюс в $S_{11}(\theta)$). Если учесть все эти частицы, окажется, что эффективный центральный заряд модели синус-Гордона равен единице. То есть, опять же, модель синус-Гордона на малых масштабах ведет себя как свободный безмассовый бозон. Ответ (12.10) верен для случая $p = 2/3$, когда мы отождествляем связанное состояние с самой частицей 1. Этот ответ согласуется с гипотезой о том, что такая теория является возмущением теории Ли–Янга с центральным зарядом $c = -22/5$ и $\Delta_{\min} = -1/5$.

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле (11.30), имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и предположение (11.2) термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос: почему все же термодинамический анзац Бете работает? Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера[18]. Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году [19], вириальные коэффициенты газа полностью определяются S -матрицей составляющих его частиц. Точные S -матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области $R \gg \xi$. Это значит, что условием применимости термодинамического анзаца Бете является отсутствие фазового перехода для системы частиц, и это условие выполняется в одном пространственном измерении.

Рассмотрим теперь случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Уравнение (11.25) в пределе $R \rightarrow 0$ имеет вид

$$\epsilon_{0a} = \sum_b \nu_{ab} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \quad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \quad (12.11)$$

Сумма берется по всем частицам в спектре. Формула для значения в нуле скейлинговой функции $f(m_{\min} R) = R\mathcal{E}_0(R)$ и, следовательно, эффективного центрального заряда имеет почти тот же вид:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0) = \frac{6}{\pi^2} \sum_a \sigma_a L(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \quad (12.12)$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Как мы помним, эта теория становится замкнутой в точках $p = 2/(2N - 1)$ после отождествления n -го и $(2N - 1 - n)$ -го бризеров. Система имеет фермионный характер ($\sigma_n = -1$), а константы $\nu_{nn'}$ даются формулами

$$\nu_{nn'} = \delta_{nn'} - 2 \min(n, n'). \quad (12.13)$$

Систему уравнений (12.11) удобно записать в переменных $y_n = e^{-\epsilon_0 n}$:

$$y_n(1 + y_n)^{2n-1} \prod_{m=1}^{n-1} (1 + y_m)^{2m} \prod_{m=n+1}^{N-1} (1 + y_m)^{2n} = 1, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (12.14)$$

От произведений по m можно избавиться, переписав эту систему в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \quad (12.15)$$

Полученная Y -система не эквивалентна системе (12.14), но, во-первых, любое решение системы (12.14) удовлетворяет системе (12.15), а во-вторых, единственное положительное ($\forall n : y_n > 0$) решение Y -системы совпадает с единственным положительным решением системы (12.14).

Для дилогарифма Роджерса есть много теорем о его значениях на решениях Y -систем.¹ В частности, система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq l-1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \quad (12.16)$$

имеет единственное положительное решение, и

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} L(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \quad (12.17)$$

Если мы заметим, что при $l = 2N - 1$ решение системы (12.16) является симметричным ($y_{l-n} = y_n$), то для $0 \leq n \leq N$ оно решает систему (12.15), а величина

$$c_{\text{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} L(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1} \quad (12.18)$$

совпадает с эффективным центральным зарядом «ленточных» моделей $M(2, 2N+1)$.

Возьмемся к задаче об одной частице и изучим следующие члены в разложении $f(r)$. В первом приближении надо учесть влияние второй экспоненты на кинк $\tilde{\epsilon}(\theta)$. Добавим вклад второй экспоненты в правую часть (12.3):

$$\tilde{\epsilon}(\theta) + \delta\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta') - \delta\epsilon(\theta')}) = e^\theta + \left(\frac{mR}{2}\right)^2 e^{-\theta}.$$

В силу малости $(mR)^2$ мы можем считать этот вклад малым при $e^\theta \gg e^{-\theta R}$. Раскладывая по $\delta\epsilon$, получаем

$$\delta\epsilon(\theta) = \left(\frac{mR}{2}\right)^2 \psi_-(\theta), \quad (12.19)$$

где $\psi_-(\theta)$ является решением линейной задачи. Нам понадобится еще одна функция $\psi_+(\theta)$, поэтому определим эти функции вместе:

$$\psi_\pm(\theta) - \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma} = e^{\pm\theta} \quad (12.20)$$

Заметим, что уравнение для ψ_+ получается дифференцированием уравнения (12.3) по θ , поэтому

$$\psi_+(\theta) = \tilde{\epsilon}'(\theta). \quad (12.21)$$

¹Обзор этих теорем можно найти в работе [20].

Уравнение для ψ_- не удается решить аналитически. Но нужную поправку для $f(r)$ оказывается возможным выразить через ψ_+ . Подставим решение $\tilde{\epsilon} + \delta\epsilon$ вместо $\tilde{\epsilon}$ в правую часть (12.4) и получим²

$$f(r) = f(0) + \frac{r^2}{2} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^\theta \psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma}.$$

Теперь в правой части выразим e^θ через ψ_+ :

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma)}.$$

Интегралы во втором слагаемом коммутируют. Переобозначив в нем $\theta \leftrightarrow \theta'$, мы видим, что множители, содержащие ψ_- собираются в $e^{-\theta}$. Используя затем (12.21), получим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} = - \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta}\tilde{l}'(\theta). \quad (12.22)$$

Мы видим, что интеграл определяется формой кинка на его левом крае, где $e^{-\theta}$ больше. Его нетрудно вычислить, если фаза S -матрицы спадает как

$$\phi(\theta) = -\phi(-\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (12.23)$$

В этом случае при $\theta \rightarrow -\infty$ имеем

$$e^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta') = -A \int \frac{d\theta'}{2\pi} e^{-\theta'}\tilde{l}'(\theta') = Af''(0).$$

С другой стороны разность $\tilde{\epsilon}(\theta) - \epsilon_0 = o(e^\theta)$ при $\theta \rightarrow -\infty$. Это немедленно следует из требования сходимости интеграла в левой части уравнения (12.3). Поэтому, взяв интеграл в левой части по частям, получим для нее

$$e^{-\theta} \left(\epsilon_0 + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta')\tilde{l}(\theta') \right) = 1.$$

Следовательно,

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left((\phi(\theta) - \pi\nu)e^\theta \right)^{-1}. \quad (12.24)$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\epsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \quad (12.25)$$

Для S -матрицы (12.9) имеем $A = 4 \sin \pi p$. Следовательно, для модели sh-Гордона ($-1 < p < 0$)

$$\epsilon_\infty = \frac{m^2}{8 \sin \pi(-p)}, \quad (12.26)$$

а для модели Ли–Янга

$$\epsilon_\infty = -\frac{m^2}{4\sqrt{3}}. \quad (12.27)$$

Более тщательный анализ показывает, что выражение $f(r) - f(0) - \frac{1}{2}f''(0)r^2$ действительно раскладывается по целым степеням r^α с некоторым показателем $\alpha > 0$, что позволяет найти конформную размерность возмущающего оператора $\Delta_p = 1 - \alpha/4$ для унитарной модели или $1 - \alpha/2$ для неунитарной. Вычисление коэффициента при первой поправке позволяет связать константу связи λ с массой частицы m .

²Если мы посмотрим на формулу (11.8), мы увидим, что поправки, связанные с возмущением, могут быть больше r^2 при малых r , если $1 - \Delta_p$ достаточно мало. Однако они (кроме очень специальных случаев) имеют другую аналитическую зависимость от R , поэтому здесь мы будем эти поправки игнорировать.

Задачи

1. Выведите (12.11) и (12.12).
2. Покажите, что для S -матриц бризеров в модели синус-Гордона при $0 < p < 1$ набег фазы дается формулой (12.13). Выведите (12.14), (12.15).
3. Покажите, что для моделей, описываемых бризерным сектором модели синус-Гордона в точках $p = 2/(2N - 1)$ с отождествлением частиц $n \sim 2N - 1 - n$ величина ϵ_∞ дается формулой (12.26) с параметром $m = m_1$.
4. Покажите, что при больших значениях θ функция $\epsilon(\theta)$ имеет асимптотику вида

$$\epsilon(\theta) = \frac{mR}{2} e^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(mR) (mR e^\theta)^{-n},$$

где функции $s_n(r)$ конечны при $r \rightarrow 0$. Выразите $s_1(r)$ через $f(r)$. Покажите, что остальные коэффициенты $s_n(r)$ можно представить в виде

$$s_n(mR) = -n A_n \sigma(mR)^n \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{n\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}), \quad \phi(\theta) = \pi\nu + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\theta},$$

причем $s_n(0) \neq 0$, если $A_n \neq 0$. Оцените значения $s_n(0)$ при больших n . Найдите значения n , при которых $A_n \neq 0$, для модели sh-Гордона и модели Ли–Янга.

5*. Рассмотрите модель с матрицей рассеяния фундаментальной частицы

$$S_{11}(\theta) = S_{1\bar{1}}(i\pi - \theta) = \frac{\text{sh} \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{2\pi i}{N} \right)}{\text{sh} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2\pi i}{N} \right)}, \quad (12.28)$$

где $N \geq 2$ — целое число. Эта S -матрица имеет полюс, порождающий серию связанных состояний $n = 2, 3, \dots, N$ (см. задачу 10.5). При отождествлении $\bar{n} = N - n$, спектр замыкается (\mathbb{Z}_N -симметричная модель Изинга). Найдите параметры $\nu_{nn'}$ для этой теории и покажите, что эффективный центральный заряд совпадает с центральным зарядом теории \mathbb{Z}_N -парафермионов:

$$c = 2 - \frac{6}{N + 2}. \quad (12.29)$$

Найдите также значения ϵ_∞ .

Семинар 12

Вычисление вакуумной плотности энергии ϵ_∞ в системе из нескольких частиц

Рассмотрим модель с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S -матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2 \cos \frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ϵ_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a . Получим общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$:

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \quad \text{где } I_a = - \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta} \tilde{l}'_a(\theta).$$

Здесь предполагается $\kappa_1 = 1$.

Положим

$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab} e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Тогда величины I_a являются решениями уравнения

$$\sum_b A_{ab} I_b = \kappa_a.$$

Теперь нужно проанализировать вид асимптотик $S_{ab}(\theta)$, исходя из условий задачи, и найти $f''(0)$. Получим

$$A = A_{11} \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2 \end{pmatrix} \text{ или } A_{ab} = A_{11} \kappa_a \kappa_b \Rightarrow f''(0) = A_{11}^{-1}, \quad \epsilon_\infty = -\frac{m_1^2}{2A_{11}}.$$