Лекция 14

Точные формфакторы квазилокальных операторов

Вернемся к алгебре Фаддеева—Замолодчикова. Напомним, что операторы $V_\alpha(\theta)$ определены на двух прямых

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightrightarrows} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi) \tag{14.1}$$

и удовлетворяют соотношению

$$V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2) - \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha'_1\alpha'_2} V^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1) = 2\pi C^{\alpha_1\alpha_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)$$
$$- 2\pi \sum_{\alpha'_1,\alpha'_2} C^{\alpha'_1\alpha'_2} S(-i\pi)^{\alpha_2\alpha_1}_{\alpha'_2\alpha'_1}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi), \tag{14.2}$$

При этом операторы на верхней прямой можно интерпретировать как операторы уничтожения, а операторы на нижней прямой — как операторы рождения:

$$V^+_\alpha(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta}V^\beta(\theta-i\pi). \tag{14.3}$$

Можно естественным способом определить нормальное упорядочение:

$$\begin{gathered} {:}X{:} = X, \text{ если } X = V^+_{\beta_1}(\vartheta_1)\cdots V^+_{\beta_L}(\vartheta_L)V^{\alpha_K}(\theta_K)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1), \quad \theta_i,\vartheta_j \in \mathbb{R}; \\ {:}XV^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)Y{:} = \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha'_1\alpha'_2} {:}XV^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1)Y{:}. \end{gathered} \tag{14.4}$$

В случаях, когда $S(\theta) = \pm 1$, алгебра Фаддеева—Замолодчикова сводится к алгебре бозонных или фермионных операторов, описывающих систему свободных бозонов или фермионов соответственно.

Определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\}}\prod_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta_i}{2\pi}\, e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} {:}V^{\alpha_n}(\theta_n)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1){:}\,, \tag{14.5}$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1,\ldots,\theta_N)$ комплексных переменных θ_i, называемых *формфакторами* оператора O. Здесь

$$P^0_\alpha(\theta) = m_\alpha \operatorname{ch}\theta, \qquad P^1_\alpha(\theta) = m_\alpha \operatorname{sh}\theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^\theta}$ с любым положительным τ.

Очевидно, эти операторы являются трансляционно-инвариантными в следующем смысле

$$i\partial_\mu O(x) = [O(x), P_\mu], \tag{14.6}$$

где P_μ — оператор импульса, определенный как

$$P_\mu = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi}\, P_{\alpha\mu}(\theta)V^+_\alpha(\theta)V^\alpha(\theta) \quad \Rightarrow \quad [P_\mu, V^\alpha(\theta)] = -P_{\alpha\mu}(\theta)V^\alpha(\theta). \tag{14.7}$$

Так как $P_0 = H$ является гамильтонианом, оператор $O(x)$ является решением уравнения Гайзенберга. Кроме трансляционной инвариантности мы будем требовать лоренц-инвариантности. Определим *лоренцев спин* s_O оператора $O(x)$ следующим свойством:

$$F_O(\theta_1+\lambda,\ldots,\theta_n+\lambda)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{s_O\lambda}F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{14.8}$$

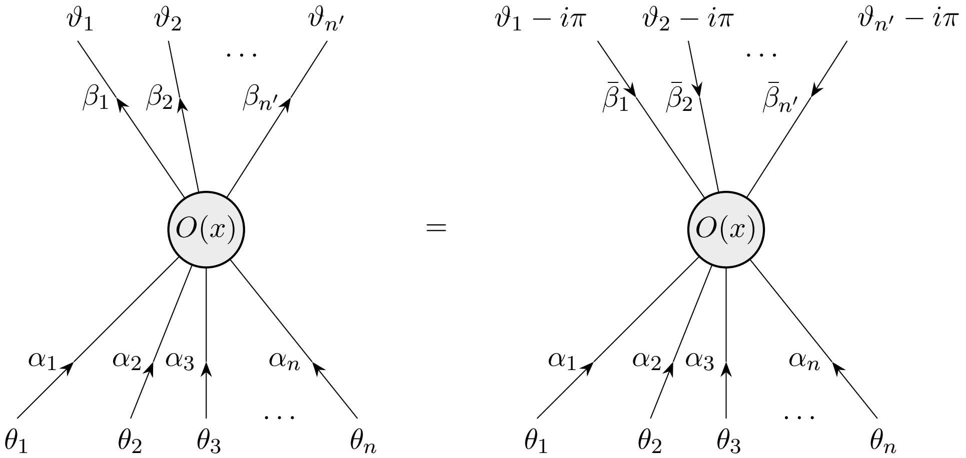
Тогда

$$i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)O(x) = \epsilon^{\mu\nu}\left(is_O O(x) + [O(x), L]\right), \tag{14.9}$$

где антисимметричный тензор нормирован условием $\epsilon_{01} = -\epsilon^{01} = 1$, а оператор момента L определяется как
$$L = i\sum_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi}\, V^+_\alpha(\theta)\frac{d}{d\theta}V^\alpha(\theta) \quad\Rightarrow\quad [L, V^\alpha(\theta)] = -i\frac{d}{d\theta}V^\alpha(\theta). \tag{14.10}$$
В результате при преобразовании Лоренца, характеризуемом быстротой λ, корреляционные функции вида $\langle\prod O_i(x_i)\rangle$ будут умножаться на на $e^{\lambda\sum s_{O_i}}$.

Легко видеть, что на вещественной оси функции F_O являются матричными элементами вида
$$\langle\mathrm{vac}|O(x)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \qquad \theta_1 > \cdots > \theta_n. \tag{14.11}$$
Более общо,
$$\begin{aligned}{}_{\beta_1\ldots\beta_{n'}}\langle\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n'}|O(x)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_n} &= e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)+ix\sum_{i=1}^{n'} P_{\beta_i}(\vartheta_i)} \\ &\times \sum_{\{\beta'_i\}}\prod_{i=1}^{n'} C_{\beta_i\beta'_i}\cdot F_O(\theta_1^-,\ldots,\theta_n^-,\vartheta_{n'}^+ - i\pi,\ldots,\vartheta_1^+ - i\pi)_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta'_{n'}\ldots\beta'_1},\end{aligned} \tag{14.12}$$
где мы обозначили $\theta_i^\pm = \theta_i \pm i0$, если $\theta_1 > \ldots > \theta_n$, $\vartheta_1 > \ldots > \vartheta_{n'}$. Обратим внимание, что функции F_O совпадают с матричными элементами только в точках, где все $\theta_i \neq \vartheta_j$. Там, где какие-нибудь θ_i и ϑ_j совпадают, в матричных элементах возникают контактные члены, которые легко извлекаются из определения (14.5). Бесконечно малые добавки будут пояснены позже.

Графически это равенство можно изобразить так:



Представление оператора в виде разложения по произведениям $V^\alpha(\theta)$ позволяет найти выражения для корреляционных функций в виде *спектральных разложений*. Для двухточечной корреляционной функции, например, имеем
$$\begin{aligned}\langle O_1(x)O_2(0)\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\},\{\alpha'_i\}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^n\theta}{(2\pi)^n}\, e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)}\prod_{i=1}^n C^{\alpha_i\alpha'_i} \\ \times F_{O_1}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} F_{O_2}(\theta_n - i\pi,\ldots,\theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n\ldots\alpha'_1}.\end{aligned} \tag{14.13}$$
Эта формула получается либо коммутацией операторов $V_\alpha(\theta)$, либо вставкой разложения единицы по собственным векторам. В последнем случае экспоненциальный множитель от суммы импульсов имеет смысл собственного значения композиции оператора эволюции и оператора пространственного сдвига. Ясно, что эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции только тогда, когда ряд убывает. Это верно в случае больших расстояний между операторами. Действительно, рассмотрим операторы, разделенные мнимым временем $-i\tau$. Тогда множитель
$$\left|e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)}\right| = e^{-\tau\sum_i m_{\alpha_i}\operatorname{ch}\theta_i} \le e^{-\tau\sum_i m_{\alpha_i}}$$

экспоненциально быстро убывает с числом частиц, причем тем быстрее, чем больше τ.

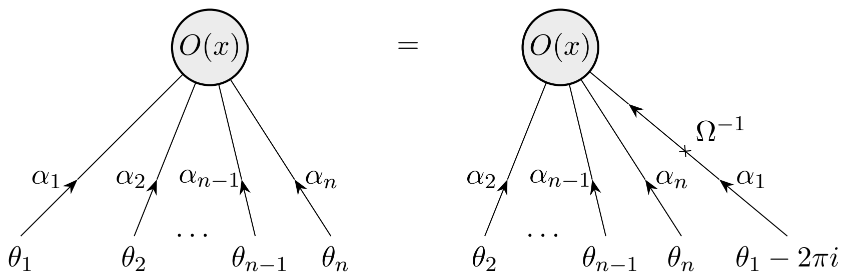
Из равенства (14.12) немедленно следует условие эрмитовости оператора, определенного разложением (14.5):

$$O^+(x) = O(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$(F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})^* = \sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n} C_{\alpha_i \alpha'_i} \cdot F_O(\theta_n - i\pi, \ldots, \theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n \ldots \alpha'_1} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \theta_i \in \mathbb{R}). \quad (14.14)$$

Оператор $O(x)$, определенный в (14.5), является трансляционно-инвариантным, но для функций F_O общего вида он не является локальным. Давайте попробуем наложить условия, которые обеспечили бы в каком-то смысле его локальность. Прежде всего, заметим, что мы можем понимать формулу (14.12) как результат применения кроссинг-симметрии к формуле (14.11). Давайте потребуем, чтобы двукратное применение кроссинг-симметрии переводило бы формфактор в себя. Постулируем *циклическое свойство*:

$$F_O(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \sum_{\alpha'_1} (\Omega^{-1}(O))^{\alpha'_1}_{\alpha_1} F_O(\theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_1 - 2\pi i)_{\alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha'_1}. \quad (14.15)$$

Здесь $\Omega(O)$ — некоторая постоянная матрица, смысл которой мы проясним позднее. По кинематическим соображениям мы потребуем, чтобы матрица имела ненулевые матричные элементы только для частиц одинаковой массы. Важно, что при двукратном применении кроссинг-симметрии мы переместили быстроту θ_1 из первой позиции в последнюю:



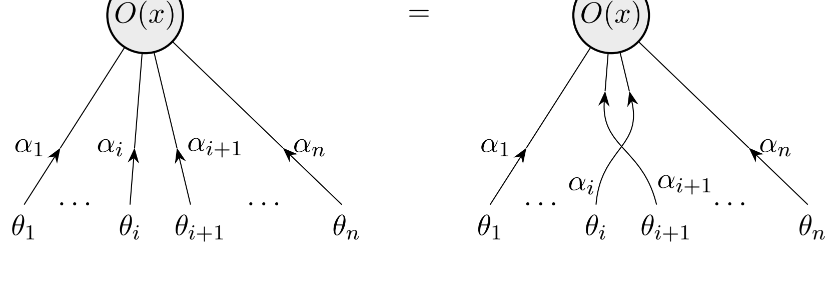
Нетрудно проверить, что

$$S_{12}(\theta)\Omega_1(O)\Omega_2(O) = \Omega_1(O)\Omega_2(O)S_{12}(\theta). \quad (14.16)$$

Давайте теперь зафиксируем аналитические свойства формфакторов, согласовав их с аналитическими свойствами волновой функции, заданными в лекции 10, то есть потребовав, чтобы за пределами домена, определенного в (14.11), сама формула оставалась верной. Именно, потребуем выполнения *перестановочного свойства*:

$$F_O(\ldots, \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots)_{\ldots \alpha_i \alpha_{i+1} \ldots} = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})^{\alpha'_i \alpha'_{i+1}}_{\alpha_i \alpha_{i+1}} F_O(\ldots, \theta_{i+1}, \theta_i, \ldots)_{\ldots \alpha'_{i+1} \alpha'_i \ldots}. \quad (14.17)$$

Это требование эквивалентно требованию, чтобы подынтегральное выражение в (14.5) было симметрично по отношению к перестановкам $(\theta_i, \alpha_i) \leftrightarrow (\theta_j, \alpha_j)$. Графически уравнение (14.17) представляется так (суммирование по индексам на внутренних линиях здесь и ниже подразумевается):



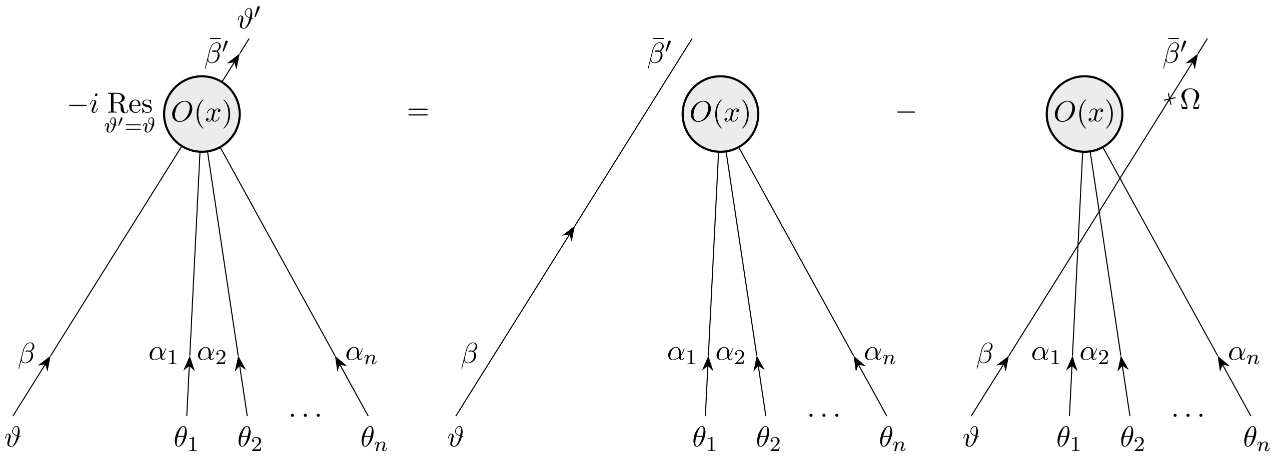
Требования (14.15)–(14.17) описывают свойства функций F_O при фиксированном числе частиц каждого сорта (каждого значения массы). Ясно, что проверка взаимной локальности двух операторов требует коммутации каждой пары компонент в разложениях (14.5). В то же время было бы странно, если бы коммутативности можно было достичь почленно.

Постулируем два свойства, связывающие формфакторы с различными числами частиц. Положим, что на физическом листе $0 \le \mathrm{Im}(\theta_i - \theta_{i+1}) \le \pi$ из особенностей имеются только простые полюсы двух типов. Первый тип полюсов, *кинематические полюсы*, расположены в точках $\theta_i - \theta_{i+1} = i\pi$ и имеют вычеты, определяемые уравнением

$$\operatorname*{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\pi, \vartheta, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\ldots\alpha_n} =$$

$$= i \sum_{\beta'', \{\alpha'_i\}} C_{\beta'\beta''} \left(\delta_\beta^{\beta''} \delta_\alpha^{\alpha'} - \sum_{\{\gamma_i\}} \Omega^{\beta''}_{\gamma_n}(O) \delta_\beta^{\gamma_0} \prod_{i=1}^n S(\vartheta - \theta_i)^{\gamma_i}_{\gamma_{i-1}}{}^{\alpha'_i}_{\alpha_i} \right) F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}. \quad (14.18)$$

Графически это уравнение записывается так:



Вместе с уравнением (14.17) это уравнение задает все кинематические полюсы.

В левой части мы можем перенести частицу с быстротой $\vartheta' + i\pi$ из первой позиции в последнюю, используя циклическое свойство (при этом ее быстрота станет равной $\vartheta' - i\pi$), а затем, используя перестановочное свойство протащить ее на вторую позицию. Тогда первое и второе слагаемое в правой части поменяются местами. Для самосогласованности следует потребовать, чтобы

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} \Omega^\alpha_{\alpha'}(O) \Omega^\beta_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \quad (14.19)$$

Всегда можно выбрать базис из нескольких нейтральных и нескольких заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид с блоками 1×1 вида 1 (нейтральные частицы) и 2×2 вида σ^1 (заряженные частицы). Дополнительной заменой базиса матрицу Ω можно диагонализовать, $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_\alpha)$, так что

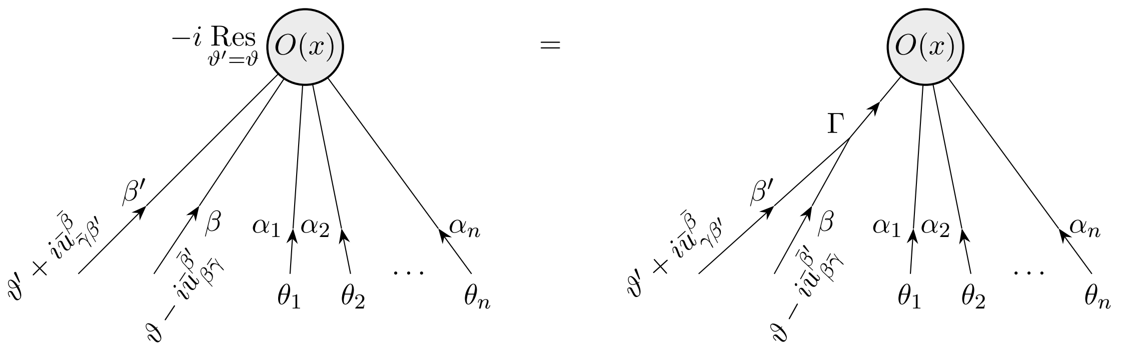
$$\Omega_\alpha \Omega_{\bar\alpha} = 1.$$

В частности, для нейтральных частиц $\Omega_\alpha = \pm 1$. Кроме того, в C-симметричной модели $\Omega_{\bar\alpha} = \Omega^*_\alpha$, так что $|\Omega_\alpha| = 1$.

Второй тип полюсов, *динамические полюсы*, связан с полюсами S-матрицы, отвечающими связанным состояниям: $\theta_i - \theta_j = iu^\gamma_{\alpha\beta}$ $(i < j)$. Вычеты в этих полюсах определяются уравнением

$$\operatorname*{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\bar u^{\bar\beta}_{\bar\gamma\beta'}, \vartheta - i\bar u^{\bar\beta'}_{\beta\bar\gamma}, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\ldots\alpha_n} = i \sum_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta'\beta} F_O(\vartheta, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\gamma\alpha_1\ldots\alpha_n}. \quad (14.20)$$

Графически это уравнение имеет вид:



Обратим внимание на то, что кинематический полюс может быть представлен как динамический полюс, в котором частица и античастица связываются в фиктивную частицу нулевой массы, не участвующую в разложении для оператора. Наличие в вычете двух вкладов связано с циклическим свойством (14.15) и положением полюса на краю физического листа.

Рассмотрим одновременное произведение двух операторов $O_1(x)O_2(y)$. Для определенности положим, что оператор O_1 находится правее O_2:

$$x^0 = y^0 - i0, \qquad x^1 > y^1. \tag{14.21}$$

Сдвижка $-i0$ отвечает хронологическому упорядочению в мнимом времени. Чтобы формулы выглядели короче, введем такие обозначения. Для любого набора переменных $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем обозначать $\overrightarrow{\xi}$ последовательность $\xi_1, \dots, \xi_k$, а $\overleftarrow{\xi}$ последовательность $\xi_k, \dots, \xi_1$. Там, где порядок будет неважен, будем просто писать ξ. Через $(\overrightarrow{\xi})_i$, $(\overleftarrow{\xi})_i$, $(\xi)_i$ будем обозначать соответствующую последовательность без iго элемента. Кроме того, выражения типа $C^{\alpha\beta}$ будут обозначать $\prod_i C^{\alpha_i\beta_i}$. Итак,

$$\begin{aligned} O_1(x)O_2(y) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\dots,\{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n} \, e^{-iP_\gamma(\xi)(x-y)-iP_\alpha(\theta)x-iP_\beta(\vartheta)y} \\ \times C^{\gamma\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\xi^-}, \overrightarrow{\theta})_{\overrightarrow{\gamma}\overrightarrow{\alpha}} F_{O_2}(\overrightarrow{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_{\overrightarrow{\beta}\overleftarrow{\gamma'}} {:}V^{\alpha_m}(\theta_m)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\beta_n}(\vartheta_n)\cdots V^{\beta_1}(\vartheta_1){:}\,. \end{aligned} \tag{14.22}$$

Здесь мы снова положили $\xi_i^\pm = \xi_i \pm i0$. Бесконечно-малые слагаемые к ξ_i и $\xi_i - i\pi$ добавлены таким образом, чтобы контуры интегрирования при перемножении матричных элементов правильно обходили кинематические полюсы: для частицы с быстротой ξ_i контур должен проходить под всеми кинематическими полюсами оператора $\mathcal{O}_1$, по отношению к которому она входящая, и над всеми кинематическими полюсами оператора $\mathcal{O}_2$, по отношению к которому она выходящая.

Теперь сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$. Множитель $e^{-iP_\gamma(\xi)(x-y)}$ для $0 < \operatorname{Im}\xi_i < \pi$ стремиться к нулю при $\xi_i \to \pm\infty$ в силу (14.21), так что он не будет нарушать сходимость интегралов. Но интегралы будут зацепляться за кинематические и динамические полюсы. При этом контур мы проведем так, чтобы после сдвига ξ_i^- в первом формфакторе перешли $\xi_i^+ + i\pi$, непременно зацепившись за все кинематические полюсы, а во втором формфакторе $\xi_i^+ - i\pi$ перешло в ξ_i^-, не зацепившись ни за один кинематический полюс.

Давайте возьмем ξ_k и найдем разность $\left(\int_{\mathbb{R}-i0} - \int_{\mathbb{R}+i\pi+i0}\right) \frac{d\xi_k}{2\pi}$ от всего подынтегрального выражения. Это будет сумма вычетов, умноженная на i. Рассмотрим вычет в полюсе, отвечающем кинематическому полюсу, связанному с θ_1:

$$\begin{aligned} & e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y)-iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x-i(P_\beta(\vartheta)+P_{\alpha_1}(\theta_1))y} \\ & \quad \times \sum_{\{\alpha\},\dots,\{\delta'\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1} F_{O_1}\left((\overrightarrow{\xi^-})_k, (\overrightarrow{\theta})_1\right)_{(\overrightarrow{\gamma''})_k(\overrightarrow{\alpha'})_1} F_{O_2}\left(\overrightarrow{\vartheta}, \theta_1, (\overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_k\right)_{\overrightarrow{\beta},\alpha'_1,(\overleftarrow{\gamma})_1} \\ & \quad \times \left(-\delta^{\alpha'}_{\alpha}\delta^{\gamma''}_{\gamma} + \delta^{\delta_1}_{\alpha_1}\delta^{\alpha'_1}_{\delta'_k}\Omega^{\delta'_1}_{\delta_m}(O_1)\prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_1 - \xi_i + 2\pi i)^{\delta'_{i+1}\gamma''_i}_{\delta'_i\gamma_i} \prod_{i=2}^{m} S(\theta_1 - \theta_i)^{\delta_i\alpha'_i}_{\delta_{i-1}\alpha_i}\right) {:}\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}{:}\,. \end{aligned}$$

Буква θ_1 перекочевала из первого формфактора во второй, превращая его в ϑ_{n+1}. Мы видим, что этот вклад соответствует значениям $k' = k - 1$, $m' = m - 1$, $n' = n + 1$. При этом первое слагаемое в скобках сокращает соответствующий член в разложении, «заменяя» его на второй член в скобках. При этом произведение матриц $S(\theta_1 - \theta_i)$ во втором слагаемом «подтаскивает» $V(\theta_1)$ к $V(\vartheta_n)$. Произведение же матриц $S(\theta_1 - \xi_i + 2\pi i)$ протаскивает θ_1 в формфакторе F_{O_2} до конца направо. В результате такой процедуры эффективно каждое слагаемое суммы умножается на $\Omega^{\alpha'_1}_{\alpha_1}(O_1)$, а ϑ_n в F_{O_2} протаскивается до конца направо через буквы ξ_i. Возможность выбрать разные ξ_i и θ_j в этой процедуре в качестве «начальных» просто исправляет комбинаторные множители.

Продолжая процедуру, мы домножаем F_{O_2} последовательно на все $\Omega^{\beta'_i}_{\beta_i}(O_1)$, меняем местами $\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}$ и $\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}$ в нормально-упорядоченном произведении и перемещаем $\xi - i\pi$ справа налево в F_{O_2}. После этого остается перенести все ξ_i в F_{O_1} по циклическому свойству, что домножит F_{O_1} на множители $\Omega^{\gamma''_i}_{\gamma_i}(O_1)$.

Теперь нужно разобраться с динамическими полюсами. Нетрудно понять, что динамические полюсы сокращают друг друга. Действительно, ξ_k «зацепляется» за два полюса:[1]

$$\begin{aligned}
\xi^{(1)}_k &= \theta_1 + iu^\delta_{\gamma_k\alpha_1}, \\
\xi^{(2)}_k &= \vartheta_n + i\pi - iu^{\delta'}_{\beta_n\gamma'_k} = \vartheta_n + i\bar u^{\delta'}_{\beta_n\gamma'_k}.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что в формфакторе F_{O_1} результат слияния $\xi^{(1)}_k$ и θ_1 даст быстроту

$$\theta'_1 = \theta_1 + i\bar u^{\bar\gamma_k}_{\alpha_1\bar\delta},$$

а в формфакторе F_{O_2} это даст

$$\vartheta_{n+1} = \xi^{(1)}_k - i\pi = \theta_1 - i(\pi - u^\delta_{\gamma_k\alpha_1}) = \theta_1 - i\bar u^\delta_{\gamma_k\alpha_1}.$$

Аналогично, результат слияния ϑ_n с $\xi^{(2)}_k - i\pi$ даст в первом формфакторе

$$\theta_0 = \xi^{(2)}_i = \vartheta_n + i\bar u^{\delta'}_{\beta_n\gamma'_k}$$

и во втором формфакторе

$$\vartheta'_k = \xi^{(2)}_i - i\pi + iu^{\bar\beta_n}_{\gamma_k\bar\delta'} = \vartheta_n - i\bar u^{\bar\gamma'_k}_{\bar\delta'\beta_n}.$$

Теперь выберем такую пару слагаемых, для которых

$$\begin{gathered}
m \equiv m^{(1)} = m^{(2)} + 1, \qquad n \equiv n^{(2)} = n^{(1)} + 1, \qquad k \equiv k^{(1)} = k^{(2)}, \\
\vartheta^{(2)}_n = \theta^{(1)}_1, \qquad \beta^{(2)}_n = \alpha^{(1)}_1, \qquad \gamma'^{(2)}_k = \bar\delta^{(1)}, \qquad \delta'^{(2)} = \bar\gamma^{(1)}_k.
\end{gathered}$$

Тогда

$$\theta^{(2)}_0 = \theta'^{(1)}_1, \qquad \vartheta'^{(2)}_k = \vartheta^{(1)}_{k+1}.$$

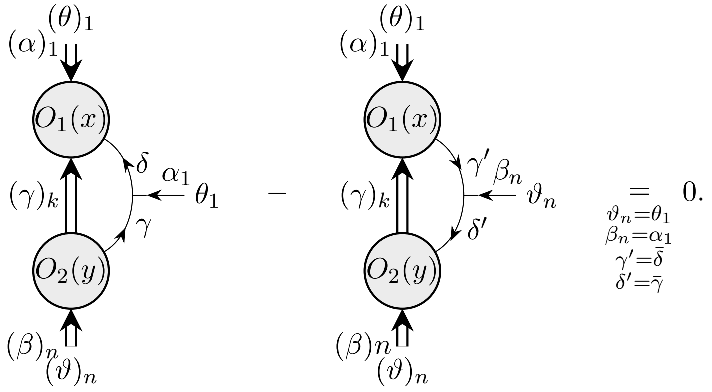
С учетом равенства

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{\beta',\gamma'} \Gamma^{\beta'}_{\alpha\gamma'} C_{\beta\beta'} C^{\gamma\gamma'}, \tag{14.23}$$

которое следует из кроссинг-симметрии, эти два слагаемых совпадают с точностью до знака. Поскольку они содержат множители $(\xi_k - \theta_1)^{-1}$ и $(\vartheta_n - \xi_k + i\pi)^{-1}$ соответственно, знаки будут разными, и слагаемые сократят друг друга.

[1] На самом деле я упрощаю. Речь идет, конечно, о наборах полюсов.

Графически это выглядит так:



Итак, вклады динамических полюсов сокращают друг друга, а вклады кинематических, суммированные вместе дают:

$$\begin{aligned} O_1(x)O_2(y) = &\sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\ldots,\{\gamma''_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n}\, e^{-iP_\gamma(\xi)(y-x)-iP_\alpha(\theta)x-iP_\beta(\vartheta)y} \\ &\times C^{\gamma\gamma'}\Omega^{\gamma''}_{\gamma'}(O_1)\Omega^{\beta''}_{\beta}(O_1)F_{O_2}(\overrightarrow{\xi^-},\overrightarrow{\vartheta})_{\overrightarrow{\gamma''}\overrightarrow{\beta''}}F_{O_1}(\overrightarrow{\theta},\overleftarrow{\xi^+-i\pi})_{\overrightarrow{\alpha}\overleftarrow{\gamma}} \\ &\times {:}V^{\beta_n}(\vartheta_n)\cdots V^{\beta_1}(\vartheta_1)V^{\alpha_m}(\theta_m)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1){:}\,. \end{aligned} \tag{14.24}$$

То, что мы получили, это почти произведение $O_2(y)O_1(x)$. Чтобы действительно получить это произведение, наложим условие. Будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны, если для всех n выполняются равенства

$$\sum_{\{\alpha'_i\}}\prod_{i=1}^{n}\Omega^{\alpha'_i}_{\alpha_i}(O_I)F_{O_J}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n} = C(O_I,O_J)F_{O_J}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \qquad (I,J)=(1,2),(2,1). \tag{14.25}$$

Здесь $C(O_I,O_J)$ — числа. В блочно-диагональном базисе частиц легко видеть, что это не такое уж ограничительное условие. Оно просто говорит о том, что для любых n и наборов $\{\alpha_i\}$, для которых имеются ненулевые формфакторы F_{O_J} произведение $\prod_{i=1}^{n}\Omega_{\alpha_i}(O_I)$ не зависит от n и $\{\alpha_i\}$ и равно $C(O_I,O_J)$. Тогда одновременные коммутаторы операторов O_1 и O_2 выглядят так:

$$O_1(x)O_2(y) = \begin{cases} C(O_1,O_2)O_2(y)O_1(x), & x^0=y^0,\ x^1>y^1; \\ C^{-1}(O_2,O_1)O_2(y)O_1(x), & x^0=y^0,\ x^1<y^1. \end{cases} \tag{14.26}$$

Это есть основная теорема, доказанная Федором Смирновым. Подробное доказательство и разбор следствий этой теоремы можно найти в книге [26]. Условие сходимости интегралов, лоренц-инвариантность в форме (14.8), условие цикличности (14.15), перестановочное условие (14.17) и условия кинематического (14.18) и динамического (14.20) полюсов называются *формфакторными аксиомами* или *аксиомами Каровского—Вайша—Смирнова.* Кроме теоремы Смирнова о взаимной квазилокальности есть еще *гипотеза Смирнова*, согласно которой *все* квазилокальные операторы в теории поля могут быть найдены как решения формфакторных аксиом.

Величину $\omega(O_1,O_2)$, определяемую по модулю единицы формулой

$$e^{2\pi i\omega(O_1,O_2)} = \Omega(O_1,O_2) = C(O_1,O_2)C(O_2,O_1) \tag{14.27}$$

называют *показателем взаимной локальности* операторов O_1 и O_2. Величину $\Omega(O_1,O_2)$ обычно называют *индексом взаимной локальности.* Если показатель взаимной локальности равен нулю, операторы O_1 и O_2 называют *взаимно-локальными.* Нетрудно проверить, что если оператор $O(x)$ самолокален (взаимно-локален с собой) и имеет целый или полуцелый спин, то

$$C(O,O) = (-1)^{2s_O}, \tag{14.28}$$

то есть коммутирует с собой, если его спин целый, и антикоммутирует, если его спин полуцелый.

Теперь нетрудно понять смысл матрицы $\Omega^\alpha_\beta(O)$. Давайте рассмотрим оператор

$$A^\alpha(x)=\int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-iP_\alpha(\theta)x}V^\alpha(\theta)+\cdots,$$

где точки обозначают вклады высших формфакторов. Этот оператор представляет собой бозонный (нулевого спина) оператор, уничтожающий бозон в данной точке. Хотя этот оператор определен неоднозначно, его коммутатор с любым другим оператором O, с которым он взаимно-квазилокален, хорошо определен. Поскольку $F_{A^\alpha}(\theta)_\beta=\delta^\alpha_\beta$, оператор A^α может быть взаимно-квазилокален только с оператором, для которого матрица $\Omega^\alpha_\beta(O)$ в выбранном базисе диагональна. Тогда числа

$$\Omega_\alpha(O)=C(O,A^\alpha)=\Omega(O,A^\alpha) \tag{14.29}$$

имеют простой смысл индексов взаимной локальности оператора O с бозонным оператором, уничтожающим элементарное возбуждение α.

Теперь рассмотрим простой пример — скейлинговую модель Изинга при нулевом магнитном поле, то есть Φ_{13}-возмущение минимальной конформной модели $M(3,4)$ ($c=1/2$) [11, 27]. В этой модели, как мы помним, имеется один свободный массивный фермион или, на бозонном языке, один бозон с матрицей рассеяния $S(\theta)=-1$. Это значит, что алгебра Фаддеева—Замолодчикова для этой модели имеет вид фермионной алгебры:

$$V(\theta_1)V(\theta_2)+V(\theta_2)V(\theta_1)=2\pi\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)+2\pi\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi).$$

Поле свободного фермиона $\psi_\pm(x)$ имеет вид

$$\psi_\pm(x)=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-iP(\theta)x\pm\frac12(\theta+\frac{i\pi}{2})}V(\theta),\qquad s_{\psi_\pm}=\pm\frac12,\qquad \Omega_1(\psi_\pm)=-1. \tag{14.30}$$

Единственный ненулевой формфактор этого оператора — одночастичный: $F_{\psi_\pm}(\theta)=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}e^{\pm\frac12(\theta+\frac{i\pi}{2})}$. Очевидно, такой набор формфакторов удовлетворяют формфакторным аксиомам. Пользуясь (14.14), нетрудно проверить эрмитовость операторов $\psi_\pm(x)$.

Отсюда легко найти компоненты тензора энергии-импульса. В пространстве Минковского имеем

$$T_{zz}=-\frac{i}{2}:\psi_+\,\partial\psi_+:,\qquad T_{\bar z\bar z}=\frac{i}{2}:\psi_-\,\bar\partial\psi_-:,\qquad T_{z\bar z}=\frac{im}{2}:\psi_+\psi_-:, \tag{14.31}$$

причем нормальное упорядочение совпадает с нормальным упорядочением (14.4). Учитывая, что

$$P_z(\theta)=-\frac{m}{2}e^\theta,\qquad P_{\bar z}(\theta)=\frac{m}{2}e^{-\theta}, \tag{14.32}$$

получаем, что единственные ненулевые формфакторы компонент тензора энергии-импульса равны

$$\begin{aligned}
&F_{T_{zz}}(\theta_1,\theta_2)=\frac{im^2}{4}e^{\theta_1+\theta_2}\operatorname{sh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, && s_{T_{zz}}=2, && \Omega_1(T_{zz})=1,\\
&F_{T_{\bar z\bar z}}(\theta_1,\theta_2)=\frac{im^2}{4}e^{-\theta_1-\theta_2}\operatorname{sh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, && s_{T_{\bar z\bar z}}=-2, && \Omega_1(T_{\bar z\bar z})=1,\\
&F_{T_{z\bar z}}(\theta_1,\theta_2)=\frac{im^2}{4}\operatorname{sh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, && s_{T_{z\bar z}}=0, && \Omega_1(T_{z\bar z})=1.
\end{aligned} \tag{14.33}$$

Эти ответы хорошо нам известны из теории свободного майорановского фермиона. Найдем теперь нетривиальные формфакторы. Поскольку связанных состояний в этой задаче нет, а кинематический полюс связывает формфакторы только для чисел частиц, отличающихся на два, мы можем разбить все операторы на четные, для которых все формфакторы с нечетным числом частиц равны нулю, и нечетные, для которых все формфакторы с четным числом частиц равны нулю. Простейшие такие операторы мы обозначим $\sigma(x)$ и $\mu(x)$. Их формфакторы равны

$$F_\sigma(\theta_1,\dots,\theta_{2n})=i^nG_\sigma m^{1/8}\prod_{i<j}^{2n}\operatorname{th}\frac{\theta_i-\theta_j}{2},\qquad s_\sigma=0,\qquad \Omega_1(\sigma)=-1, \tag{14.34}$$

$$F_\mu(\theta_1,\ldots,\theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n+1} \operatorname{th}\frac{\theta_i-\theta_j}{2}, \qquad s_\mu = 0, \qquad \Omega_1(\mu) = 1, \tag{14.35}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Постоянные G_σ и G_μ являются безразмерными нормировочными множителями для этих операторов. Их нельзя извлечь непосредственно из формфакторных аксиом. Размерные константы $m^{1/8}$ выбраны из отождествления этих операторов с оператором параметра порядка и параметром беспорядка в модели Изинга чуть ниже точки перехода.

Теперь изучим вопрос о взаимной локальности этих операторов. Очевидно, операторы $\psi_\pm$ — фермионные, а все остальные перечисленные операторы — бозонные, причем все операторы самолокальны. Заметим, что для нечетных операторов $C(O,O) = \Omega_1(O)$, а для четных операторов всегда $C(O,O) = 1$. Сопоставляя это с (14.28), приходим к выводу, что не может быть бозонных нечетных операторов с $\Omega_1(O) = -1$, фермионных нечетных операторов с $\Omega_1(O) = 1$, а также фермионных четных операторов. Поэтому остаются следующие классы:

$\{\varepsilon\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Это семейство включает в себя, например, 1 и $T_{\mu\nu}$.

$\{\mu\}$: Бозонные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Семейство включает μ.

$\{\sigma\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает σ.

$\{\psi\}$: Фермионные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает $\psi_\pm$.

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \quad \mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1-y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1-y^1)\psi(y)\mu(x), \\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1-y^1)\psi(y)\sigma(x), \\
\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x).
\end{gathered} \tag{14.36}$$

Эти коммутационные соотношения позволяют разбить все квазилокальные операторы модели Изинга на три сектора взаимно-локальных операторов:

«бозонный» сектор $\{\varepsilon, \mu\}$;

«фермионный» сектор $\{\varepsilon, \psi\}$;

«двойственный бозонный» сектор $\{\varepsilon, \sigma\}$.

В «бозонном» секторе оператором, рождающим частицу, является бозонный оператор $\mu(x)$, в «фермионном» — фермионные операторы $\psi_\pm(x)$, а в «двойственном бозонном» секторе вообще таких операторов нет. Условно можно сказать, что «бозонный» сектор описывает систему ниже точки перехода, «двойственный бозонный» сектор — выше точки перехода, а «фермионный» сектор описывает вспомогательный майорановский фермион, с помощью которого осуществляется решение модели Изинга. На самом деле, конечно, все эти объекты и представления равноправны. Более того, описанная только что классификация операторов верна для *любой* модели с одной нейтральной частицей без внутренних состояний и без связанных состояний, например, для модели sh-Гордона. В модели, в которой имеются связанные состояния, каких-то секторов может не быть. В модели Ли—Янга, например, со связанным состоянием $1+1 \to 1$, во-первых, операторы нельзя разделить на четные и нечетные, а во-вторых, непременно $\Omega_1(O) = 1$. Поэтому в этой модели имеется только один, «бозонный» сектор.

Итак, решение уравнений на формфакторы, в принципе, позволяет получить любой квазилокальный оператор в теории, однако отождествление таких решений с операторами, определенными в лагранжевом подходе или в рамках конформной теории возмущений, представляет отдельную сложную проблему, которая в общем виде не решена ни для одной теории со взаимодействием.

В качестве примера формфакторов для несвободной теории приведу формфакторы экспоненциальных операторов модели sh-Гордона. Во-первых, определим так называемый минимальный двухчастичный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, удовлетворяющую условиям

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S_{11}(\theta) R(-\theta), \tag{14.37}$$

и не имеющую особенностей на полосе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$. Действительно, функция $F(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_1 - \theta_2)$ удовлетворяет формфакторным аксиомам для операторов с $\Omega_1(O) = 1$. Функция $R(\theta)$ легко строится по правилу:

$$S_{11}(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin\theta t \quad \Rightarrow \quad R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \operatorname{sh} \pi t}, \tag{14.38}$$

где R_0 — произвольная константа. В случае модели sh-Гордона $f(t) = O(t^2)$ и константу R_0 удобно выбрать так, чтобы она сокращала -1 в скобках:

$$R(\theta) = \exp\left(4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2} \operatorname{sh}\frac{\pi p t}{2} \operatorname{sh}\frac{\pi(p+1)t}{2}}{\operatorname{sh}^2 \pi t} \cos(\theta - i\pi)t\right). \tag{14.39}$$

(Напомним: $-1 < p < 0$.) В этом случае произведение

$$R(\theta)R(\theta + i\pi) = \frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{sh}\theta - i \sin \pi p} = 1/f(e^{-\theta}), \qquad f(z) = 1 + \frac{2i \sin \pi p}{z - z^{-1}}. \tag{14.40}$$

Заметим, что

$$\frac{f(e^\theta)}{f(e^{-\theta})} = S_{11}(\theta). \tag{14.41}$$

Введем также константы

$$\rho = (-R(i\pi) \sin \pi p)^{-1/2}. \tag{14.42}$$

Теперь формфакторы из «бозонного» сектора можно записать в виде

$$F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \rho^n \prod_{i<j}^n R(\theta_i - \theta_j) \cdot J_O(e_1^\theta, \ldots, e_n^\theta), \tag{14.43}$$

где $J_O(x_1, \ldots, x_n)$ — рациональные симметричные функции с полюсами в точка $x_i = -x_j$:

$$\operatorname*{Res}_{z'=-z} J_O(z', z, x_1, \ldots, x_n) = -iz \sin \pi p \cdot \left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{z}{x_i}\right) - \prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i}{z}\right)\right) J_O(x_1, \ldots, x_n). \tag{14.44}$$

Множители $f(z/x_i) = f(e^{\vartheta - \theta_i})$ в первом слагаемом сокращают вклады от произведений $R(\vartheta - \theta_i)R(\vartheta - \theta_i + i\pi)$ а функции $f(x_i/z)$ во втором слагаемом поделенные на $f(z/x_i)$ дают произведение S-матриц из (14.18). Рассмотрим решение вида

$$J_a(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I_n = I_- \sqcup I_+} e^{i\pi a(\#I_- - \#I_+)} \prod_{\substack{i \in I_- \\ j \in I_+}} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right), \tag{14.45}$$

где $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а сумма берется по всем разбиениям этого множества на два непересекающиеся подмножества. Оказывается, если положить

$$a = \frac{1}{2} - \alpha \sqrt{\frac{(-p)(1+p)}{2}},$$

то функции J_a определяют по формуле (14.43) формфакторы оператора $e^{\alpha\varphi}/\langle e^{\alpha\varphi}\rangle$.

Задачи

1. Покажите, что если набор функций $\{F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\}$ удовлетворяет формфакторным аксиомам, то и набор функций $\{F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} I_s(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\}$, где I_s — собственные значения локального интеграла движения $\hat{I}_s$ спина $s \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет формфакторным аксиомам и отвечает оператору $O'(x) = [O(x), \hat{I}_s]$.

2. Покажите, что выражения (14.33), (14.34), (14.35) удовлетворяют формфакторным аксиомам.

3. Рассмотрим свободный бозон $S(\theta)=1$. Введем операторы

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}}\frac{d\theta}{2\pi}V(\theta)e^{-iP(\theta)x},$$

$$\sigma(x)=\,:e^{\rho(x)}:\,,$$

$$\psi_\pm(x)=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-iP(\theta)x\pm\frac{1}{2}(\theta+\frac{i\pi}{2})}\,:V(\theta)e^{\rho(x)}:\,,\qquad \rho(x)=-\int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}}\frac{d\theta_1}{2\pi}\,\frac{d\theta_2}{2\pi}\,\frac{e^{-iP(\theta_1,\theta_2)x}}{\operatorname{ch}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}V(\theta_1)V(\theta_2).$$

Покажите, что все эти операторы квазилокальны, причем оператор $\varphi(x)$ принадлежит классу $\{\mu\}$, оператор $\sigma(x)$ принадлежит классу $\{\sigma\}$, а операторы $\psi_\pm(x)$ — классу $\{\psi\}$.

4. Выведите условие (14.44) из условия кинематического полюса (14.18). Покажите, что выражение (14.45) удовлетворяет этому условию и не имеет других полюсов.

5*. Покажите, что функции (14.45) удовлетворяют рекурсионному соотношению

$$J_a(z,x_1,\ldots,x_n)=2\cos\pi a\cdot J_a(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^n\frac{x_iR_a(z;x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)}{z+x_i},\tag{14.46}$$

где

$$R_a(z;x_1,\ldots,x_n)=-i\sin\pi p\cdot\left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{z}{x_i}\right)-\prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i}{z}\right)\right)J_a(x_1,\ldots,x_n),\tag{14.47}$$

с начальным условием

$$J_a(\varnothing)=1.\tag{14.48}$$

Покажите отсюда, что выполняется *отражательное соотношение*

$$J_a(x_1,\ldots,x_n)=J_{-a}(x_1,\ldots,x_n),$$

а формфакторы единичного оператора, кроме нуль-частичного, обращаются в нуль:

$$J_{1/2}(x_1,\ldots,x_n)=0\quad\text{при } n>0.$$