Лекция 3
Масштабная и конформная инвариантность. Операторная алгебра и конформная теория возмущений.

Рассмотрим корреляционные функции модели Изинга в области

$$r_0 \ll r \ll r_c.$$

В этой области корреляционные функции не зависят ни от одного из этих масштабов и потому обладают масштабной инвариантностью. Именно, корреляционные функции не меняются при масштабном преобразовании

$$\varphi(x) \to \lambda^{d_\varphi}\varphi(\lambda x), \qquad d_\varphi = \frac{d-2+\eta}{2}. \tag{1}$$

Более общо, рассмотрим пространство локальных операторов в теории поля $\mathcal{O}$. Это значит, что для любых двух операторов $\Phi, \Psi \in \mathcal{O}$ корреляционная функция

$$\langle \Phi(x)\Psi(x')\ldots\rangle$$

является непрерывной функцией x в окрестности точки x' за исключением самой точки x'. На гамильтоновом языке это значит, что одновременный коммутатор операторов Φ и Ψ в разных точках равен нулю. Давайте рассматривать операторы в картине *радиального квантования*. Запишем

$$x = ne^\tau, \qquad |n| = 1. \tag{2}$$

Сферу, заметаемую вектором $\boldsymbol{n}$ мы будем считать пространством, а параметр τ — мнимым (мацубаровским) временем. Таким образом, бесконечному прошлому отвечает точка $x=0$, а бесконечному будущему — бесконечно удаленная точка. В такой картине корреляционная функция $\langle \Phi(x_1)\Psi(x_2)\ldots\rangle$ становится вакуумным средним $\langle 0|T(\Phi(x_1)\Psi(x_2)\ldots)|0\rangle$. В дальнейшем мы будем опускать знак хронологического упорядочения. При этом имеется очевидный изоморфизм между пространством локальных операторов $\mathcal{O}$ и пространством состояний $\mathcal{H}$. Действительно, каждому оператору $\Phi(x)$ отвечает состояние $\Phi(0)|0\rangle$, а каждое состояние $|X\rangle$ дает набор корреляционных функций $\langle 0|\Phi(x_1)\Psi(x_2)\ldots|X\rangle$. Эти функции переменных $x_1, x_2, \ldots$ непрерывны в окрестности точки 0, поэтому эту корреляционную функцию можно представить в виде $\langle \Phi(x_1)\Psi(x_2)\ldots X(0)\rangle$.

На пространстве состояний действует гамильтониан системы, который мы здесь обозначим буквой D. Ясно, что D представляет собой оператор масштабного преобразования:

$$D = \mathrm{i}\int df_\mu\, x^\nu T^\mu_\nu, \tag{3}$$

где df_μ — элемент площади. Давайте диагонализуем оператор D:

$$D|\Phi_\alpha\rangle = d_\alpha|\Phi_\alpha\rangle. \tag{4}$$

Состояниям $|\Phi_\alpha\rangle$ отвечают локальные операторы $\Phi_\alpha(x)$ с определенными *масштабными размерностями* d_α. Важный факт состоит в том, что корреляционные функции этих операторов не меняются, если одновременно во всех операторах мы сделаем замену

$$\Phi_\alpha(x) \to \lambda^{d_\alpha}\Phi_\alpha(\lambda x). \tag{5}$$

Чтобы доказать это, вычислим коммутатор $[D, \Phi_\alpha(x)]$. Пусть S_x — маленькая сфера вокруг точки x. Тогда

$$\begin{aligned}[D,\Phi_\alpha(x)] &= \mathrm{i}\int_{S_x} df'_\mu\, x'^\nu T^\mu_\nu(x')\Phi_\alpha(x)\\ &= \mathrm{i}\int_{S_0} df'_\mu\,(x^\nu + x'^\nu)T^\mu_\nu(x+x')\Phi_\alpha(x) = \mathrm{i}x^\nu[P_\nu,\Phi_\alpha(x)] + d_\alpha\Phi_\alpha(x)\\ &= x^\nu\partial_\nu\Phi_\alpha(x) + d_\alpha\Phi_\alpha(x) = \left.\frac{d\Phi_\alpha(xe^\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} + d_\alpha\Phi_\alpha(x).\end{aligned}$$

Уравнение

$$[D, \Phi_\alpha(x)] = \left.\frac{d\Phi_\alpha(xe^\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} + d_\alpha \Phi_\alpha(x) \tag{6}$$

играет роль уравнения Гайзенберга в радиальном квантовании.

Очевидно $D|0\rangle = 0$. Кроме того, из соображений ортогональности имеем $\langle 0|D = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[D, \Phi_{\alpha_1}(x_1 e^\tau) \dots \Phi_{\alpha_N}(x_N e^\tau)]|0\rangle \\ &= \frac{d}{d\tau}\langle \Phi_{\alpha_1}(x_1 e^\tau) \dots \Phi_{\alpha_N}(x_N e^\tau)\rangle + \langle \Phi_{\alpha_1}(x_1 e^\tau) \dots \Phi_{\alpha_N}(x_N e^\tau)\rangle \sum_{i=1}^{N} d_{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение по τ, получаем

$$\langle \Phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \Phi_{\alpha_N}(x_N)\rangle = \lambda^{\sum_{i=1}^N d_{\alpha_i}} \langle \Phi_{\alpha_1}(\lambda x_1) \dots \Phi_{\alpha_N}(\lambda x_N)\rangle, \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Из масштабной инвариантности мгновенно следует два важных результата. Во-первых, почти все одноточечные корреляционные функции обращаются в нуль:

$$\langle \Phi_\alpha \rangle = 0, \qquad \text{если } d_\alpha \neq 0, \tag{8}$$

что естественно для критической точки. Во всех разумных теориях единственным оператором нулевой размерности является единичный оператор.

Во-вторых, парные корреляционные функции имеют степенной вид. В случае скалярных полей

$$\langle \Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(x')\rangle = \frac{\mathrm{const}}{|x - x'|^{d_\alpha + d_\beta}}. \tag{9}$$

В случае полей со спином вместо константы появляется некоторая функция единичного вектора, направленного вдоль $x - x'$, зависящего от спинорной структуры полей.

В классической теории поля масштабная инвариантность эквивалентна требованию бесследовости тензора напряжений (тензора энергии-импульса):

$$T^\mu_\mu = 0. \tag{10}$$

Однако из этого равенства немедленно следует более высокая инвариантность модели — конформная инвариантность.

Мы можем рассуждать иначе. Картина радиального квантования эквивалентна квантованию теории на пространстве $S^{d-1} \otimes \mathbb{R}$. Типичная масштабно-инвариантная теория, возникающая в контексте теории критических явлений, инвариантна относительно отражений. Это значит, что на пространстве $S^{d-1} \otimes \mathbb{R}$ теория должна быть инвариантной относительно обращения времени. Но в исходных координатах преобразование $\tau \to -\tau$ имеет вид *инверсии*:

$$x \to \frac{x}{|x|^2} \tag{11}$$

Группа, состоящая из сдвигов, поворотов, масштабного преобразования и инверсии называется *конформной группой*. Для полноты картины приведем инфинитезимальные генераторы конформной группы:

Сдвиги:	$\mathrm{i}P_\mu = \partial_\mu,$	(12a)
Повороты:	$\mathrm{i}M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu,$	(12b)
Дилатации:	$D = x^\mu \partial_\mu,$	(12c)
Инвертированные сдвиги:	$\mathrm{i}Q^\mu = (|x|^2 \delta^{\mu\nu} - 2x^\mu x^\nu)\partial_\nu.$	(12d)

Всего имеется $\frac{d(d+3)}{2} + 1$ генераторов. Инвертированные сдвиги представляют собой композицию инверсии, сдвига и снова инверсии.

Мы будем принимать

Гипотезу конформной инвариантности: *все корреляционные функции теории инвариантны относительно конформных преобразований вместе с соответствующими преобразованиями локальных операторов.*

Найдем преобразования полей, связанные с инверсией. Операторы

$$\tilde{\Phi}_\alpha(n,\tau) = e^{d_\alpha \tau}\Phi_\alpha(ne^\tau)$$

удовлетворяю обычному уравнению Гайзенберга:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_\alpha}{\partial\tau} = [D, \tilde{\Phi}_\alpha].$$

Это значит, что в этом операторе обращение времени тривиально: $\tilde{\Phi}_\alpha(n,\tau) \to \tilde{\Phi}_\alpha(n,-\tau)$. Отсюда находим, что инверсия полей фиксированной размерности имеет вид

$$\Phi_\alpha(x) \to r^{-2d_\alpha}\Phi_\alpha\left(\frac{x}{|x|^2}\right). \tag{13}$$

Но это правило верно не для всех полей. Но в каждом представлении конформной группы есть такое поле. Оно определяется тем, что соответствующего состояние $|\Phi_\alpha\rangle$ реализует представление группы вращений данного спина и, кроме того,

$$Q^\mu|\Phi_\alpha\rangle = 0. \tag{14}$$

Это состояние называется *состоянием старшего веса*, а соответствующее поле — *примарным* или *первичным*. Все остальные поля *конформного семейства* (*потомки* или *вторичные поля*) получаются из примарного действием элементов алгебры P_μ, $M_{\mu\nu}$ на соответствующее состояние старшего веса.

Начиная с этого места индекс α будет нумеровать не все поля, а только конформные семейства, а символ Φ_α будет обозначать примарное поле.

Гипотеза конформной инвариантности накладывает сильные ограничения на вид двух- и трехточечных корреляционных функций. Для простоты рассмотрим теорию, в которой все примарные поля — бесспиновые. Прежде всего, применим преобразование (13) к корреляционной функции (9):

$$\begin{aligned}
\langle\Phi_\alpha(x)\Phi_\beta(x')\rangle &= r^{-2d_\alpha}r'^{-2d_\beta}\left\langle\Phi_\alpha\left(\frac{x}{r^2}\right)\Phi_\beta\left(\frac{x'}{r'^2}\right)\right\rangle \\
&= \text{const}\,\frac{r^{-2d_\alpha}r'^{-2d_\beta}}{\left(\left(\frac{x}{r^2}-\frac{x'}{r'^2}\right)^2\right)^{(d_\alpha+d_\beta)/2}} \\
&= \text{const}\,\frac{r^{-2d_\alpha}r'^{-2d_\beta}}{\left(\frac{(x-x')^2}{r^2r'^2}\right)^{(d_\alpha+d_\beta)/2}} \\
&= \frac{\text{const}\,(r'/r)^{d_\alpha-d_\beta}}{|x-x'|^{d_\alpha+d_\beta}}, \qquad r=|x|, \quad r'=|x'|.
\end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с правой частью (9) только если $d_\alpha = d_\beta$. Следовательно,

$$\langle\Phi_\alpha(x)\Phi_\beta(x')\rangle = \begin{cases} \frac{G_{\alpha\beta}}{|x-x'|^{2d_\alpha}}, & d_\alpha = d_\beta, \\ 0, & d_\alpha \neq d_\beta \end{cases} \tag{15}$$

с некоторыми константами $G_{\alpha\beta}$. Таким образом, парные корреляционные функции играют роль естественной скобки на пространстве операторов $\mathcal{O}$. Преобразованием базиса можно привести матрицу $G_{\alpha\beta}$ к единичной $\delta_{\alpha\beta}$. Значит, парные корреляционные функции можно использовать для естественной нормировки полей.

Весьма жесткие условия накладываются и на вид трехточечных корреляционных функций. Они имеют вид

$$\langle\Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)\Phi_\gamma(x_3)\rangle = \frac{C_{\alpha\beta\gamma}}{|x_1-x_2|^{d_\alpha+d_\beta-d_\gamma}|x_1-x_3|^{d_\alpha+d_\gamma-d_\beta}|x_2-x_3|^{d_\beta+d_\gamma-d_\alpha}} \tag{16}$$

с некоторыми константами $C_{\alpha\beta\gamma}$.

Рассмотрим теперь произведения операторов, например $\Phi_\alpha(x')\Phi_\beta(x)$. С большого расстояния $R \gg |x'-x|$ это произведение должно выглядеть как локальный оператор. Должно иметь место *операторное разложение*

$$\Phi_\alpha(x')\Phi_\beta(x) = \sum_\gamma f^\gamma_{\alpha\beta}(x',x)\Phi_\gamma(x) \qquad \text{(все поля)}. \tag{17}$$

Здесь $f^\gamma_{\alpha\beta}(x',x)$ — некоторые числовые функции, называемые *структурными функциями*. Кроме того, в этом месте мы считали, что индексы α, β, $gamma$ пробегают все поля.

Вернемся к примарным операторам конформной теории поля. В этом случае структурные функции могут иметь только степенной вид. Легко проверить, что

$$\Phi_\alpha(x')\Phi_\beta(x) = \sum_\gamma \frac{C^\gamma_{\alpha\beta}}{|x'-x|^{d_\alpha+d_\beta-d_\gamma}}(\Phi_\gamma(x) + k^\gamma_{\alpha\beta,1}(x'^\mu - x^\mu)\partial_\mu\Phi_\gamma(x) + \ldots). \tag{18}$$

Второй член в скобках и дальнейшие поправки, обозначенные точками, представляют собой вклады полей-потомков. Константы $k^\gamma_{\alpha\beta,1}$ и т. д. определяются конформной симметрией модели и, в принципе, могут быть вычислены явно. *Структурные константы* $C^\gamma_{\alpha\beta}$ операторной алгебры (18) связаны с трехточечными корреляционными функциями. Действительно, при $|x_3-x_2| \gg |x_1-x_2|$ имеем

$$\begin{aligned}\langle\Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)\Phi_\gamma(x_3)\rangle &\simeq \sum_{\gamma'} \frac{C^{\gamma'}_{\alpha\beta}}{|x_1-x_2|^{d_\alpha+d_\beta-d_{\gamma'}}}\langle\Phi_{\gamma'}(x_2)\Phi_\gamma(x_3)\rangle \\ &= \sum_{\gamma'(d_{\gamma'}=d_\gamma)} \frac{C^{\gamma'}_{\alpha\beta}}{|x_1-x_2|^{d_\alpha+d_\beta-d_\gamma}}\frac{G_{\gamma'\gamma}}{|x_2-x_3|^{2d_\gamma}}.\end{aligned}$$

Сравнивая с (16) находим

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\gamma'(d_{\gamma'}=d_\gamma)} C^{\gamma'}_{\alpha\beta}G_{\gamma'\gamma}. \tag{19}$$

Отметим, что полное разложение (с учетом потомков) позволяет, в принципе, полностью воспроизвести выражение (16). Точно такими же разложениями можно определить четырех- и более точечные функции. Таким образом, набор конформных размерностей и спинов примарных полей и набор структурных констант полностью описывает конформную теорию поля. Позже мы покажем, как их можно находить точно в двумерном случае.

В модели Изинга имеется два примарных поля наинизшей размерности: спин $\varphi(x) \equiv \sigma(x)$ и плотность энергии $\varepsilon(x)$. Имеются три важнейших операторных разложения:

$$\sigma(x')\sigma(x) = \frac{G_{\sigma\sigma}}{|x'-x|^{2d_\sigma}} + \frac{C^\varepsilon_{\sigma\sigma}\varepsilon(x)}{|x'-x|^{2d_\sigma-d_\varepsilon}} + \ldots, \tag{20}$$

$$\sigma(x')\varepsilon(x) = \frac{C^\sigma_{\sigma\varepsilon}\sigma(x)}{|x'-x|^{d_\varepsilon}} + \ldots, \tag{21}$$

$$\varepsilon(x')\varepsilon(x) = \frac{G_{\varepsilon\varepsilon}}{|x'-x|^{2d_\varepsilon}} + \frac{C^\varepsilon_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon(x)}{|x'-x|^{d_\varepsilon}} + \ldots. \tag{22}$$

Заметим, что нормировочные множители $G_{\sigma\sigma}$ и $G_{\varepsilon\varepsilon}$ не могут быть найдены из конформной теории, а должны диктоваться физическими соображениями. Соответственно, структурные константы довольно просто от них зависят:

$$C^\varepsilon_{\sigma\sigma} = G_{\sigma\sigma}G^{-1/2}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^\varepsilon_{\sigma\sigma}, \qquad C^\sigma_{\sigma\varepsilon} = G^{1/2}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^\sigma_{\sigma\varepsilon}, \qquad C^\varepsilon_{\varepsilon\varepsilon} = G^{1/2}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^\varepsilon_{\varepsilon\varepsilon}.$$

И только константы $\mathbf{C}^\alpha_{\beta\gamma}$ являются инвариантными величинами, которые определяются из теории поля.

Теперь давайте выясним, как меняются результаты под действием возмущений. Пусть $\Phi_0[\varphi]$ — функционал действия в критической точке. Предположим, что полный функционал действия имеет вид

$$A[\varphi] = A_0[\varphi] + A_1[\varphi], \qquad A_1[\varphi] = \lambda\int d^dx\,\Phi_{\text{pert}}(x),$$

где $\Phi_{\text{pert}}(x)$ — некоторое скалярное примарное поле. Корреляционные функции в возмущенной теории равны

$$\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle = \frac{\langle\varphi(x)\varphi(0)e^{-A_1[\varphi]}\rangle_0}{\langle e^{-A_1[\varphi]}\rangle_0},$$

где нолик обозначает корреляционные функции, вычисленные в невозмущенной теории. Раскладывая экспоненты в ряд, мы получим отношение двух рядов. Можно показать, что это отношение можно свести к одному ряду с помощью *неприводимых средних* $\langle\!\langle\cdots\rangle\!\rangle$. Для бозонных полей неприводимые средние определяются соотношением

$$\langle\Phi_1\ldots\Phi_N\rangle = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\text{разбиения } I_1,\ldots,I_k}\prod_{i=1}^{k}\left\langle\!\!\left\langle\prod_{j\in I_i}\Phi_j\right\rangle\!\!\right\rangle. \tag{23}$$

Например,

$$\begin{aligned}\langle\Phi\rangle &= \langle\!\langle\Phi\rangle\!\rangle,\\ \langle\Phi_1\Phi_2\rangle &= \langle\!\langle\Phi_1\Phi_2\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\Phi_1\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Phi_2\rangle\!\rangle,\\ \langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle &= \langle\!\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\Phi_1\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Phi_2\Phi_3\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\Phi_2\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Phi_1\Phi_3\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\Phi_3\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Phi_1\Phi_2\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\Phi_1\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Phi_2\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Phi_3\rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

Ясно, что эти соотношения рекуррентно определяют неприводимые средние.

Итак, неприводимый парный коррелятор равен

$$\langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle\!\rangle_{\text{pert}} = \langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)e^{-A_1[\varphi]}\rangle\!\rangle. \tag{24}$$

В первом порядке теории возмущений

$$\delta\langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle\!\rangle \equiv \langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle\!\rangle_0 = -\lambda\int d^dx_1\,\langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)\Phi_{\text{pert}}(x_1)\rangle\!\rangle_0.$$

В конформной теории поля все одноточечные функции равны нулю, так что в правой части можно заменить неприводимую трехточку обычной. На поведение корреляционной функции может влиять три области интегрирования: 1) $|x_1|\ll|x|$, 2) $|x_1-x|\ll|x|$, 3) $|x_1|\gg|x|$. Первые две области не изменят размерности поля φ, поскольку в разложении, например, $\varphi(x)\Phi_{\text{pert}}(x_1)$ вклад могут дать только поля размерности d_φ. В третьей же области мы можем разложить произведение полей $\varphi(x)\varphi(0)$ в ряд:

$$\varphi(x)\varphi(0) = \sum_\alpha \mu_\alpha|x|^{d_\alpha-2d_\varphi}\Phi_\alpha(0) + (\text{потомки}).$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получаем

$$\delta\langle\!\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle\!\rangle \simeq -\lambda|x|^{d_{\text{pert}}-2d_\varphi}\sum_{\alpha(d_\alpha=d_{\text{pert}})}\int_{|x_1|\gg|x|}d^dx_1\,\frac{G_{\alpha,\text{pert}}}{|x_1|^{2d_{\text{pert}}}} \simeq -\text{const}\begin{cases}|x|^{d-d_{\text{pert}}-2d_\varphi}, & d\neq d_{\text{pert}},\\ |x|^{-2d_\varphi}\log|x|, & d=d_{\text{pert}}.\end{cases} \tag{25}$$

Если $d_{\text{pert}}>d$, это представляет собой малую поправку к невозмущенному коррелятору $\propto|x|^{-2d_\varphi}$. Такое возмущение называют *иррелевантным*, так как оно не меняет критического поведения корреляционных функций на больших расстояниях и может, разве что, изменить радиус взаимодействия r_0. Учет высших порядков не меняет этого результата.

Если, наоборот, $d_{\text{pert}}<d$ (такое возмущение называют *релевантным*), первая поправка (25) превышает нулевой порядок на больших масштабах и инфракрасное поведение корреляционных функций существенно меняется. При этом может быть два случая, которые зачастую непросто различить. В первом случае теория теряет масштабную инвариантность, но при этом начиная с некоторого масштаба r_0' корреляторы снова выходят на степенной закон и на масштабах $r\gg r_0'$ теория снова становится конформной, но с другими критическими индексами и структурными константами. Часть полей при этом может в инфракрасной области просто «вымереть», если их корфункции слишком быстро спадают при $r_0\lesssim r\lesssim r_0'$.

В другом случае корреляторы всех полей начнут затухать экспоненциально и в теории появится конечная корреляционная длина r_c. Примерами таких возмущений могут быть возмущение плотностью энергии, $\Phi_{\text{pert}}=\varepsilon$, и возмущение параметром порядка, $\Phi_{\text{pert}}=\varphi$. В первом случае параметр

λ имеет естественный смысл изменения температуры ($\lambda = \beta_c\tau$), а во втором — внешнего поля ($\lambda = -\beta_c h$).

Особый интерес представляет случай $d = d_{\rm pert}$ (*маргинальное* возмущение), когда логарифмическая добавка может означать либо потерю конформной инвариантности, либо быть первым членом в поправке к размерности полей. В первом случае корреляционные функции начинают содержать логарифмы, из-за которых масштабная инвариантность нарушается на всех масштабах, а во втором случае (случай *истинно маргинального* возмущения) конформные размерности непрерывно зависят от параметра модели λ. Различить эти два случая можно только суммированием бесконечного числа важных членов в теории возмущений с учетом конкретного вида операторной алгебры.

Теперь нам легко выразить критические индексы из прошлой лекции через конформные размерности. Мы уже установили, что

$$\eta = 2d_\varphi + 2 - d, \tag{26a}$$

Поскольку размерность τ должна быть равна $d_\tau = d - d_\varepsilon$, а размерность h — $d_h = d - d_\varphi$, мы немедленно получаем

$$\nu = d_\tau^{-1} = (d - d_\varepsilon)^{-1}, \tag{26b}$$

$$\mu = d_h^{-1} = (d - d_\varphi)^{-1}. \tag{26c}$$

$$\beta = \frac{d_\varphi}{d_\tau} = \frac{d_\varphi}{d - d_\varepsilon}. \tag{26d}$$

$$\delta = \frac{d_h}{d_\varphi} = \frac{d - d_\varphi}{d_\varphi}. \tag{26e}$$

$$\gamma = -\frac{d_\varphi - d_h}{d_\tau} = \frac{d - 2d_\varphi}{d - d_\varepsilon}. \tag{26f}$$

Для индексов, связанных с удельной теплоемкостью, сохраняется прежняя аргументация: плотность свободной энергии имеет размерность d, а теплоемкость есть ее вторая производная по τ. Поэтому

$$\alpha = -\frac{d_c}{d_\tau} = -\frac{d - 2d_\tau}{d_\tau} = \frac{d - 2d_\varepsilon}{d - d_\varepsilon}, \tag{26g}$$

$$\varepsilon = -\frac{d_c}{d_h} = \frac{d - 2d_\varepsilon}{d - d_\varphi}. \tag{26h}$$

Итак, мы выразили все критические индексы через две масштабные размерности d_ε и d_φ. Соотношения (31) из Лекции 2 мгновенно проверяются.

Задачи

1. Доказать, что в классической масштабно-инвариантной теории поля, построенной из масштабно-инвариантных скалярных полей, след тензора напряжений равен нулю.

2. Показать, что трехточечные корреляционные функции в конформной теории поля имеют вид (16).

3. Рассмотрим двумерную *теорию поля Лиувилля* с действием

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int d^2x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + e^\varphi \right).$$

Это действие обладает масштабной инвариантностью по отношению к преобразованию

$$\varphi(x) \to \varphi(\lambda x) - 2\log\lambda,$$

то есть и сами поля преобразуются под действием дилатаций. След тензора напряжений, построенный согласно стандартному определению, не равен нулю даже на уравнениях движения. Покажите, что некоторой добавкой и применением уравнений движения можно переопределить тензор напряжений так, чтобы его след тождественно обратился в нуль.