Лекция 4
Теория возмущений и диаграммная техника.

Пусть у нас есть теория поля с одним скалярным бозоном φ и с действием

$$\mathcal{S}[\varphi] = \mathcal{S}_0[\varphi] + \int d^d x \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{g_k}{k!} \varphi^k \right), \qquad \mathcal{S}_0[\varphi] = \frac{1}{2} int d^d x \, \varphi \mathcal{K} \varphi. \tag{1}$$

Оператору $\mathcal{K}$ отвечает пропагатор $G_0(x, y)$, являющийся решением уравнения

$$K_x G_0(x, y) = \delta(x - y). \tag{2}$$

Первым делом давайте научимся считать производящий функционал корреляционных функций, то есть статсумму с неоднородным внешним полем:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-\mathcal{S}[\varphi] + \int d^d x \, J(x) \varphi(x)}. \tag{3}$$

Разложим экспоненты, содержащие $J(x)$ и g_k в ряды:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-\mathcal{S}_0[\varphi]} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d^{md} x \prod_{i=1}^{m} J(x_i) \varphi(x_i) \right) \prod_{k=1}^{K} \left(\sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(-g_k)^{n_k}}{n_k! (k!)^{n_k}} \int d^{n_k d} x \prod_{i=1}^{n_k} \varphi^k(x_i) \right).$$

Выпишем общий член этого разложения:

$$\frac{(-g_1)^{n_1} \dots (-g_K)^{n_k}}{m! n_1! \dots n_K! (2!)^{n_2} \dots (K!)^{n_K}} \int d^{md} x \prod_{k=1}^{K} d^{n_k d} y^{(k)} \prod_{i=1}^{m} J(x_i) \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-\mathcal{S}_0[\varphi]} \prod_{i=1}^{m} \varphi(x_i) \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{n_k} \varphi^k(y_i^{(k)}).$$

В силу теоремы Вика мы должны перебрать все спаривания между полями φ. Обозначим точки x_i, $y_i^{(k)}$ точками, а спаривания — линиями, соединяющими эти точки. При этом из каждой точки x_i выходит по одной линии, а из каждой точки $y_i^{(k)}$ выходит по k линий. Далее, эти линии нужно соединить всеми возможными способами. Поскольку в каждой точке $y_i^{(k)}$ сидит k полей, линии к ним можно подсоединить $k!$ способами. Это сокращает множители $(k!)^{n_k}$ в знаменателе. Кроме того, точки $y_1^{(k)}, \dots, y_{n_k}^{(k)}$ можно переставлять $n_k!$ способами, что сокращает множители $n_k!$ в знаменателе. Наконец, если граф обладает симметрией, то некоторые из перестановой не приводят к новым спариваниям. Поэтому мы должны поделить все выражение на число элементов симметрии графа.

Итак, для вычисления вклада графа в производящий функционал, надо произвести следующие операции:

1. Сопоставить каждой вершине, в которую входит k линий, множитель $(-g_k)$.
2. Сопоставить каждой линии пропагатор $G_0(z_i, z_j)$, где z_i точки, отвечающие вершинам.
3. Проинтегрировать по всем переменным, отвечающим вершинам $(y_i^{(k)})$.
4. Поделить ответ на число симметрий графа.
5. Сопоставить каждой внешней линии множитель $J(x_i)$.
6. Проинтегрировать по всем переменным, отвечающим внешним линиям (x_i).
7. Поделить ответ на $m!$.

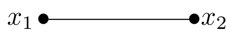
Чтобы вычислить вклад в m-точечную корреляционную функцию, надо проварьировать ответ m раз по J, затем положить $J = 0$ и поделить на $Z[0]$. Варьирование по J выделит графы с m внешними линиями и сократит $m!$ в знаменателе. Величина $Z[0]$ состоит из всех диаграмм без внешних линий, поэтому деление на $Z[0]$ сократит вклады всех отдельных, не связанных с остальными частями, поддиаграмм без внешних линий.

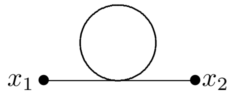
Поэтому правило для вычисления корреляционных функций гласит:

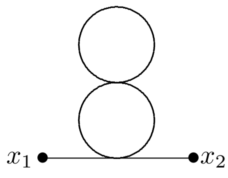
а) Брать только диаграммы, на содержащие поддиаграмм, не связанных с внешними линиями.

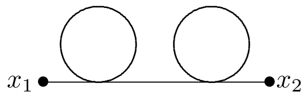
б) Опустить шаги 5–7.

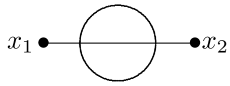
Приведем два примера из теории со взаимодействием φ^4. Для двухточки имеем

$\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle =$ 

$+\frac{1}{2}$ 

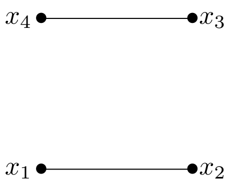
$+\frac{1}{4}$ 

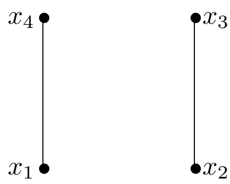
$+\frac{1}{4}$ 

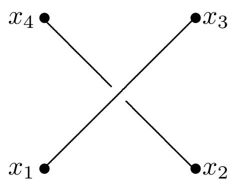
$+\frac{1}{6}$ 

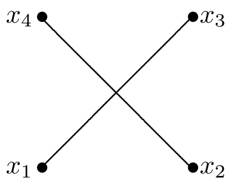
$+\cdots$

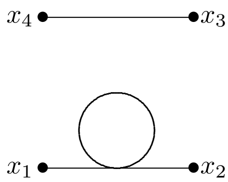
Для четырехточки имеем

$\langle\varphi(x_1)\dots\varphi(x_4)\rangle =$ 

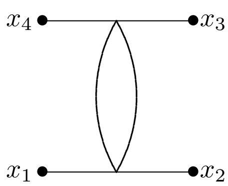
$+$ 

$+$ 

$+$ 

$+\frac{1}{2}$ 

$+$ (еще 5 диаграмм)

$+\frac{1}{2}$ 

$+$ (еще 2 диаграммы)

$+$ (еще 4 связных диаграммы с одной петлей)

$+$ (еще 15 диаграмм с 2 петлями) $+\cdots$.

Теперь переформулируем правила вычисления диаграмм в импульсном пространстве:

1. Нарисовать на каждой линии стрелку в произвольном направлении и написать у каждой линии импульс $p^{(l)}$ и сопоставить каждой линии пропагатор $G_0(p^{(l)})$.

2. Сопоставить каждой вершине, в которую входит k линий множитель $(-g_k)\delta\left(P_{\text{втек}} - P_{\text{вытек}}\right)$, где $P_{\text{втек}}$ и $P_{\text{вытек}}$ — суммы всех импульсов, втекающих в вершину и вытекающих из нее соответственно.

3. Проинтегрировать по всем импульсам $p^{(l)}$).

4. Поделить ответ на число симметрий графа (стрелки игнорировать).

5. Отождествить на каждой внешней линии импульс $p^{(l)}$ с соответствующим p_i, если он вытекает из диаграммы, и с $-p_i$, если вытекает. Ответ даст нам $\varphi_{p_1}\dots\varphi_{p_m}$.

Прямое вычисление корреляционных функций — не всегда то, что нам нужно. Важную роль играют так называемые вершинные части, которые позволяют более эффективно суммировать значительные куски корреляционных функций. Запишем производящий функционал в виде

$$Z[J] = e^{-F[J]}, \tag{4}$$

где $F[J]$ в теории поля называют *свободной энергией*, по аналогии со статфизикой. Не будем путать эту свободную энергию с функционалом $F[\varphi]$, определенным в предыдущих лекциях. Свободная энергия позволяет определить так называемое *классическое поле*

$$\tilde{\varphi}(x) = -\frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} = \langle \varphi(x) \rangle_J \tag{5}$$

В полевом описании модели Изинга классическое поле и есть, собственно, среднее значение параметра порядка в неоднородном внешнем поле. Уравнение (5) позволяет найти поле источника $J(x)$ как функционал классического поля $\tilde{\varphi}(x)$. В полной аналогии с термодинамическим потенциалом введем *эффективное действие*

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] = F[J] + \int d^d x J(x) \tilde{\varphi}(x) \tag{6}$$

с естественным следствием

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi = \langle \varphi \rangle_J} = J(x). \tag{7}$$

Разложим функционал $\Gamma[\varphi]$ в ряд по φ:

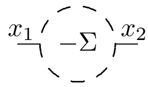
$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^{dn} x \, \Gamma_n(x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n). \tag{8}$$

Функции Γ_n называют *вершинными частями*. Очевидно, Γ_0 не имеет значения, а $\Gamma_1(x) = -J(x)$, где $J(x)$ соответствует нулевому полю. Что касается Γ_2, то

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x_1, x_2) &= \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \, \delta \varphi(x_2)} \right|_{\varphi=0} \\ &= - \left. \frac{\delta J(x_1)}{\delta \tilde{\varphi}(x_2)} \right|_{\varphi=0} = - \left[\frac{\delta \tilde{\varphi}(x_2)}{\delta J(x_1)} \right]^{-1}_{J=0} = - \left[\frac{\delta^2 F[J]}{\delta J(x_1) \, \delta J(x_2)} \right]^{-1}_{J=0} \\ &= -[\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle - \langle \varphi(x_1) \rangle \langle \varphi(x_2) \rangle]^{-1} = -[\langle\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle\rangle]^{-1} \\ &= -G^{-1}(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{9}$$

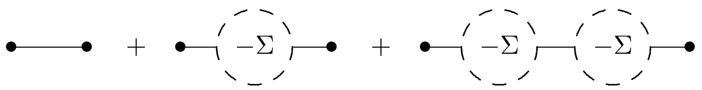
Здесь $G(x_1, x_2) \equiv \langle\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle\rangle$ — *точный* пропагатор (в отличие от затравочного пропагатора G_0), а минус первая степень понимается в операторном смысле. Теперь рассмотрим диаграммную технику для Γ_2. Пусть

$$\Gamma_2(x_1, x_2) = -G_0^{-1}(x_1, x_2) - \Sigma(x_1, x_2) = -G_0^{-1}(x_1, x_2) +$$



(G_0 — невозмущенный пропагатор, $-\Sigma$ — *массовый оператор*). Тогда (в операторном виде)

$$G = G_0 + G_0(-\Sigma)G_0 + G_0(-\Sigma)G_0(-\Sigma)G_0 + \cdots$$

$=$  $+ \cdots .$ (10)

Очевидно, что $-\Sigma$ дается всеми *одночастично-неприводимыми* диаграммами, т. е. диаграммами, которые остаются связными после разрезания любой внутренней линии. Кроме того, внешним линиям не сопоставляется пропагаторов.

Для Γ_3 имеем

$$\begin{aligned}
\Gamma_3(x_1,x_2,x_3) =&\ \frac{\delta\Gamma_{2,J}(x_1,x_2)}{\delta\tilde\varphi(x_3)}\bigg|_{J=0}\\
=&-\int d^Dy_3\ \frac{\delta[\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_J-\tilde\varphi(x_1)\tilde\varphi(x_2)]^{-1}}{\delta J(y_3)}\frac{\delta J(y_3)}{\delta\tilde\varphi(x_3)}\bigg|_{J=0}\\
=&-\int d^{3D}y\,\Gamma_{2,J}(x_1,y_1)\Gamma_{2,J}(x_2,y_2)\Gamma_{2,J}(x_3,y_3)\\
&\times\big(\langle\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)\rangle_J\\
&-\tilde\varphi(y_1)\langle\varphi(y_2)\varphi(y_3)\rangle_J-\tilde\varphi(y_2)\langle\varphi(y_1)\varphi(y_3)\rangle_J-\tilde\varphi(y_3)\langle\varphi(y_1)\varphi(y_2)\rangle_J\\
&+3\tilde\varphi(y_1)\tilde\varphi(y_2)\tilde\varphi(y_3)\big)\bigg|_{J=0}\\
=&\int d^{3D}y\,G^{-1}(x_1,y_1)G^{-1}(x_2,y_2)G^{-1}(x_3,y_3)G(y_1,y_2,y_3).
\end{aligned}$$

Нетрудно также найти, что

$$\begin{aligned}
\Gamma_4(x_1,\ldots,x_4)=&\int d^{4D}y\prod_{i=1}^4G^{-1}(x_i,y_i)\bigg(G(y_1,\ldots,y_4)\\
&-\int d^{2D}z\,\big(G(y_1,y_2,z_1)G^{-1}(z_1,z_2)G(z_2,y_3,y_4)+(\text{еще 2 слагаемых})\big)\bigg),
\end{aligned}$$

Общее правило состоит в том, что Γ_n вычисляются как сумма *одночастично-неприводимых диаграмм*, то есть диаграмм, которые не распадаются на несвязные части при разрезании по одной линии. Кроме того, внешние линии диаграмм для вершинных функций «укорочены», то есть им не следует сопоставлять затравочные пропагаторы.

Задачи

1. Построить диаграммную технику для теории комплексного скалярного поля φ с действием

$$\mathcal{S}[\varphi]=\int d^dx\ \left(|\partial_\mu\varphi|+m^2|\varphi|^2+\frac{g}{4}|\varphi|^4\right).$$

2. Построить диаграммную технику для теории n-компонентного вещественного скалярного поля $\boldsymbol{\varphi}$ с действием

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{\varphi}]=\int d^dx\ \left(\frac12\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}\partial^\mu\boldsymbol{\varphi}+\frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi}^2+\frac{g}{8}(\boldsymbol{\varphi}^2)^2\right).$$