Лекция 8
Модели с непрерывной симметрией и сигма-модели.

Рассмотрим фазовый переход в системе с многокомпонентным полем $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, описываемым действием

$$S[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^d x \, \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi})^2 + \frac{m^2}{2} \boldsymbol{\varphi}^2 + \frac{g}{8} (\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \right). \tag{1}$$

Действие обладает группой симметрии $O(N)$ — группой ортогональных матриц размера $N \times N$, то есть группой поворотов. Рассмотрим случай

$$m^2 = -\frac{\mu^2}{2} < 0 \qquad (\tau < 0).$$

Начнем с теории Ландау. Минимум действия соответствует точке

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{n} \varphi_s, \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1, \qquad \varphi_s = \frac{\mu}{g^{1/2}}. \tag{2}$$

Минимумы образуют гладкое многообразие — сферу S^{N-1}, причем значение действия для всех точек сферы одинаково. Рассмотрим окрестность одной из точек на сфере. Пусть

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \big(\varphi_s + \delta\varphi_\parallel(x)\big)\, \boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp(x), \qquad \boldsymbol{n}\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp(x) = 0. \tag{3}$$

Тогда

$$S[\boldsymbol{\varphi}] - S[\varphi_s \boldsymbol{n}] = \int d^d x \, \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \delta\varphi_\parallel)^2 + \frac{\mu^2}{2} \delta\varphi_\parallel^2 \right.$$
$$\left. + \frac{g\varphi_s}{2} \delta\varphi_\parallel^3 + \frac{g}{8} \delta\varphi_\parallel^4 + \frac{g}{4} \left(2\varphi_s \delta\varphi_\parallel + \delta\varphi_\parallel^2 \right) \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 + \frac{g}{8} (\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2)^2 \right). \tag{4}$$

Мы видим, что поле разбивается на параллельную компоненту с массой μ и безмассовую перпендикулярную (*голдстоуновский бозон*). Действие и вакуум симметричны относительно поворотов в пространстве поля $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp$, то есть относительно группы $O(N-1)$. Таким образом пространство минимумов $S^N \simeq O(N)/O(N-1)$.

Появление «мягкой» голдстоуновской компоненты приводит к значительным флуктуационным эффектам уже в области применимости теории Ландау. Конечно, имеется квадратичный по $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp$ член, пропорциональный $2\varphi_s \delta\varphi_\parallel + \delta\varphi_\parallel^2$, который, в принципе, может привести к массе соответствующей частицы при квантовании. Мы сейчас покажем, почему этого не происходит.

Давайте зафиксируем функцию $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp(x)$ и будем выполнять функциональное интегрирование только по функции $\delta\varphi_\parallel(x)$. При этом будем считать, что константы μ и φ_s являются физической обратной корреляционной длиной и спонтанным «моментом». Так как нас интересует изменение такого функционального интеграла при при малых $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2$, разложим интеграл $\int D\delta\varphi_\parallel \, e^{-S[\boldsymbol{\varphi}]}$ по степеням $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2$. Коэффициент при первой степени будет, очевидно, пропорционален $\langle 2\varphi_s \delta\varphi_\parallel + \delta\varphi_\parallel^2 \rangle$. Нужно вычислить два средних: $\langle \delta\varphi_\parallel \rangle$ и $\langle \delta\varphi_\parallel^2 \rangle$. Первое среднее равно нулю в силу определения φ_s. Второе среднее обращается в нуль в результате перенормировки температуры перехода. Итак,

$$\langle 2\varphi_s \delta\varphi_\parallel + \delta\varphi_\parallel^2 \rangle = 0,$$

что указывает на то, что $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp(x)$ действительно безмассовое.

Этот результат представляет собой частный случай общей

Теоремы Голдстоуна. *Если в результате спонтанного нарушения симметрии вакуумы теории поля образуют k-мерное многообразие, то в теории имеется по крайней мере k безмассовых бозонов.*

Давайте докажем теорему Голдстоуна в рамках теории поля. Сначала перейдем к пространству Минковского. Такой переход достигается заменой $x^d \to \mathrm{i}x^0$, $g_{\mu\nu} \to -g_{\mu\nu}$. То есть метрический тензор приобретает вид $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{d-1,d-1} = 1$. При этом

$$e^{-S_{\mathrm{Euc}}} = e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{Mink}}}.$$

Поэтому, если эвклидов лагранжиан имеет вид

$$L_{\text{Euc}}(\boldsymbol{\varphi}, \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi})^2 + U(\boldsymbol{\varphi}),$$

то минковский лагранжиан равен

$$L_{\text{Mink}}(\boldsymbol{\varphi}, \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi})^2 - U(\boldsymbol{\varphi}) \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \boldsymbol{\varphi} \partial_\nu \boldsymbol{\varphi} - U(\boldsymbol{\varphi}),$$

а гамильтониан

$$H[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\pi}] = \int d^{d-1}x \, \left(\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d-1} (\partial_i \boldsymbol{\varphi})^2 + U(\boldsymbol{\varphi}) \right), \qquad \boldsymbol{\pi} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \int d^{d-1}x \, L_{\text{Mink}}(\boldsymbol{\varphi}, \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}).$$

Мы видим, что для такого простого действия минимум эвклидова действия соответствует минимуму потенциальной энергии, а значит и гамильтониана. В размерности $d = 1$ мы знаем, что если минимум несимметричен, тем не менее в квантовой системе имеется единственное невырожденное основное состояние. Это в точности соответствует отсутствию фазового перехода при конечных температурах в одномерной классической цепочке. При $d > 1$ возможны вырожденные вакуумы.

Предположим, что в системе действительно имеется непрерывное семейство вырожденных вакуумов. Пусть $|0\rangle$ — один из вакуумов, а $Q(x^0) = \int d^{d-1}x \, j^0(x)$ — генератор группы симметрии, такой что

$$|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha Q}|0\rangle \neq \lambda|0\rangle$$

для общих значений α. Генератор симметрии является сохраняющимся зарядом

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0.$$

Пусть A — какой-нибудь оператор, такой что

$$a(t) = \langle 0|[Q(t), A]|0\rangle \neq 0.$$

Вставляя суммирование по промежуточным состояниям $\sum_n |n\rangle\langle n|$, получаем

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_n \int d^{d-1}x \, \left(\langle 0|j^0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-\mathrm{i}P_n x} - \langle 0|A|n\rangle\langle n|j^0(0)|0\rangle e^{\mathrm{i}P_n x} \right) \\ &= \sum_n (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(p_n) \left(\langle 0|j^0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-\mathrm{i}E_n t} - \langle 0|A|n\rangle\langle n|j^0(0,0)|0\rangle e^{\mathrm{i}E_n t} \right), \end{aligned}$$

где p_n — пространственные компоненты импульса P_n. С другой стороны, ввиду сохранения заряда Q, имеем

$$0 = \dot{a}(t) = -\mathrm{i} \sum_n (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(p_n) E_n \left(\langle 0|j^0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-\mathrm{i}E_n t} + \langle 0|A|n\rangle\langle n|j^0(0,0)|0\rangle e^{\mathrm{i}E_n t} \right).$$

Следовательно, вклады с $E_n \neq 0$, $p_n \neq 0$ все обращаются в нуль:

$$\langle 0|j^0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle = \langle 0|A|n\rangle\langle n|j^0(0)|0\rangle = 0 \quad \text{при } P_n \neq 0.$$

Так как $a(t) \neq 0$, вклад нулевой энергии-импульса должен быть ненулевым:

$$\langle 0|j^0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle \neq 0 \quad \text{или} \quad \langle 0|A|n\rangle\langle n|j^0(0)|0\rangle \neq 0 \quad \text{при } P_n = 0.$$

А это и значит, что имеется по крайней мере одна нулевая мода $P_n = 0$, порождаемая оператором $j^0(0)$, а значит и безмассовая частица. Если имеется k-мерное пространство вакуумов, то имеется k зарядов Q_i и k нулевых мод, отвечающих k безмассовым частицам.

Выше мы выяснили, что в классическом пределе теории (то есть в теории Ландау на языке теории фазовых переходов) с действием (1) при $m^2 < 0$ имеется спонтанное нарушение симметрии, причем вакуумы образуют сферу $S^{N-1} \simeq O(N)/O(N-1)$. Мы показали также, что если при квантовании (учете флуктуационных поправок) нарушение симметрии сохраняется, то, в согласии с теоремой Голдстоуна, теория поля содержит $N-1$ безмассовых бозонов. Возникает следующий вопрос: не восстанавливают ли квантовые (=флуктуационные) поправки исходной $O(N)$-симметрии системы. Давайте вычислим парную корреляционную функцию голдстоуновских полей. В квадратичном приближении она является решением уравнения:

$$\nabla^2 \langle \delta\varphi_{\perp i}(x) \delta\varphi_{\perp j}(x') \rangle = -(\delta_{ij} - n_i n_j)\delta(x - x'). \tag{5}$$

Решение этого уравнения мы уже несколько раз писали:

$$\langle \delta\varphi_{\perp i}(x) \delta\varphi_{\perp j}(x') \rangle = (\delta_{ij} - n_i n_j) \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)S_d |x-x'|^{d-2}}, & d > 2; \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{R}{|x-x'|}, & d = 2. \\ \frac{1}{2}(R - |x-x'|), & d = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Если в случае $d > 2$ корреляционная функция стремится к нулю при $|x - x'| \to \infty$, то при $d \le 2$ она стремится к бесконечности. Именно с этим связано появление константы R в корреляционной функции при $d \le 2$, имеющий смысл инфракрасной обрезки.

Тот факт, что при $d > 2$ корреляционная функция (6) стремится к нулю, означает, что направление вектора $\boldsymbol{\varphi}(x)$ на больших расстояниях скоррелировано, то есть имеется дальний порядок. В то же время в размерностях $d = 1, 2$ в системах с непрерывной группой симметрии дальний порядок отсутствует. При $d = 1$ мы знаем, что отсутствует и фазовый переход. Имеется важный вопрос: может ли быть фазовый переход в размерности $d = 2$? И если такой переход есть, то чем качественно различаются высокотемпературная и низкотемпературная фазы? На эти вопросы мы ответим в следующей лекции.

Запишем вектор $\boldsymbol{\varphi}(x)$ в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{n}(x)\varphi(x), \qquad |\boldsymbol{n}(x)| = 1, \qquad \varphi(x) \ge 0. \tag{7}$$

Действие в этих переменных принимает вид

$$S[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^d x \left(\frac{\varphi^2}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{8}\varphi^4 \right). \tag{8}$$

Пусть $\tau < 0$ и на систему наложено граничное условие $\boldsymbol{n}(x) \to \boldsymbol{n}_0$ при $|x| \to \infty$. Тогда соотношение

$$\langle \boldsymbol{\varphi}(x) \rangle = \boldsymbol{n}_0 \varphi_s \tag{9}$$

определяет значение «спонтанной намагниченности» φ_s с учетом флуктуационных поправок. В области применимости теории Ландау флуктуации $\varphi(x)$ на масштабах порядка или больше корреляционной длины для продольных флуктуаций и $\langle \varphi^2(x) \rangle \simeq \varphi_s^2$. То же самое происходит и во флуктуационной области, но на масштабах, во всяком случае, много больше корреляционной длины. Поэтому на достаточно больших масштабах коэффициент $\varphi^2/2$ при $(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2$ в (8) можно заменить на $\varphi_s^2/2$. Это значит, что крупномасштабные флуктуации определяются действием $O(N)$-*симметричной сигма-модели*:

$$S[\boldsymbol{n}] = \int d^d x \, \frac{\varphi_s^2}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_N), \qquad \boldsymbol{n}^2(x) = 1. \tag{10}$$

Позже мы приведем пример микроскопического вывода сигма-модели.

Добавим к действию (1) вклад внешнего поля

$$S_{\boldsymbol{h}}[\boldsymbol{\varphi}] = S[\boldsymbol{\varphi}] - \int d^d x \, \boldsymbol{h}(x)\boldsymbol{\varphi}(x). \tag{11}$$

Внешнее поле заменяет φ_s на «вмороженную» функцию $\varphi(x)$ и фиксирует направление вектора $\boldsymbol{n}_0$. Действие для сигма-модели при этом модифицируется следующим образом:

$$S_{\boldsymbol{h}}[\boldsymbol{n}] = \int d^d x \, \frac{\varphi^2(x)}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - \int d^d x \, \varphi(x)\boldsymbol{h}(x)\boldsymbol{n}(x). \tag{12}$$

В дальнейшем мы будем считать внешнее поле однородным: $\boldsymbol{h}(x) = \boldsymbol{h} = h\boldsymbol{n}_0$. В однородном магнитном поле интересной величиной является восприимчивость

$$\chi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j} = \chi_\parallel(h^2) n_{0i} n_{0j} + \chi_\perp(h^2)(\delta_{ij} - n_{0i} n_{0j}). \tag{13}$$

Величины $\chi_\parallel$ и $\chi_\perp$ называются продольной и поперечной восприимчивостями соответственно. Эти величины определяют действие для малых флуктуаций поля в квадратичном приближении:

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \left((\partial_\mu \delta\varphi_\parallel)^2 + (\partial_\mu \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp)^2 + \frac{1}{\chi_\parallel} \delta\varphi_\parallel^2 + \frac{1}{\chi_\perp} \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \right). \tag{14}$$

Вычислим поперечную восприимчивость поля $\boldsymbol{\varphi}$ во внешнем поле. Это легко сделать точно. Действительно, весь эффект от добавки поля $d\boldsymbol{h}$, ортогональной полю h состоит в том, что поле $\boldsymbol{\varphi}$ (или $\boldsymbol{n}$) поворачивается по полю. Следовательно

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{h} = d\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{\varphi}$$

и

$$\chi_\perp = \frac{\varphi}{h}. \tag{15}$$

Мы видим, что поперечная восприимчивость ниже точки перехода стремиться к бесконечности при $h \to 0$. Нетрудно показать, что и продольная восприимчивость стремится к бесконечности в этом пределе, но не так быстро. Это происходит уже за счет флуктуаций.

Так как $\boldsymbol{n}^2 = 1$ между для флуктуации имеется соотношение

$$2\boldsymbol{n}_0 \delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}^2 = 0.$$

Обозначим $\delta n_\parallel = \boldsymbol{n}_0 \delta\boldsymbol{n}$, то есть продольную компоненту флуктуации. При это поперечная компонента $\delta\boldsymbol{n}_\perp \simeq \delta\boldsymbol{n}$ в лидирующем порядке. Поэтом имеется соотношение

$$\delta n_\parallel = -\frac{\delta\boldsymbol{n}_\perp^2}{2}, \quad \text{если } |\delta\boldsymbol{n}_\perp| \ll 1. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\langle \delta\varphi_\parallel \rangle = -\frac{\varphi}{2} \langle \delta\boldsymbol{n}_\perp^2 \rangle = -\frac{1}{2\varphi} \langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \rangle.$$

Из (14) мы видим, что $\chi_\perp^{-1}$ играет роль квадрата массы, поэтому

$$\langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \rangle = (N-1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{k^2 + \chi_\perp^{-1}}.$$

Эта величина расходится. Однако ее производная по h сходится и равна

$$\frac{\partial}{\partial h} \langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \rangle = -\frac{N-1}{\varphi} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + h/\varphi)^2} = -\frac{\pi(N-1)(d-2)S_d}{4(2\pi)^d \sin\frac{\pi(d-2)}{2}} \varphi^{\frac{2-d}{2}} h^{-\frac{4-d}{2}}.$$

Отсюда получаем

$$\chi_\parallel = \frac{\pi(N-1)(d-2)S_d}{8(2\pi)^d \sin\frac{\pi(d-2)}{2}} \varphi^{-\frac{d}{2}} h^{-\frac{4-d}{2}} + \frac{\partial\varphi}{\partial h}, \tag{17}$$

где $\partial\varphi/\partial h$ представляет собой регулярный при $h \to 0$ вклад от минимизации действия для поля $\varphi(x)$. В частности, при $d = 3$ имеем

$$\chi_\parallel = \frac{N-1}{16\pi \varphi_s^{3/2} h^{1/2}} + O(1) \quad \text{при } h \to 0. \tag{18}$$

Таким образом эффективно, благодаря большим поперечным флуктуационным, продольная мода также смягчается и встает вопрос о применимости исходного сигма-модельного приближения (*принципа сохранения модуля*).

Флуктуация модуля выражается через продольную и поперечную флуктуации:

$$\delta\varphi^2 = 2\varphi\delta\varphi_\parallel^2 + \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2.$$

Если записать эффективное действие в виде

$$S_{\text{eff}}[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^d x \, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi})^2 + f(\varphi^2) - \boldsymbol{h}\boldsymbol{\varphi} + (\text{высшие производные}) \right), \tag{19}$$

нетрудно найти, что

$$\chi_\perp^{-1} = 2f'(\varphi^2), \tag{20}$$

$$\chi_\parallel^{-1} = 4\varphi^2 f''(\varphi^2) + 2f'(\varphi^2). \tag{21}$$

Раскладывая потенциальный член в (19) до второй степени по $\delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2$, можно найти

$$S_{\text{eff}}[\boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{2} \int d^d x \, \left(\frac{1}{\chi_\perp} \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 + \frac{1}{\chi_\parallel} \frac{(\delta\varphi^2)^2}{4\varphi^2} \right) + (\text{члены с производными}). \tag{22}$$

Вычислим среднее

$$\langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \rangle_V \equiv \frac{1}{V} \int_V d^d x \, \langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp(0) \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp(x) \rangle \simeq \frac{\chi_\perp}{V} \quad \text{при } V \gg \chi_\perp^{d/2}.$$

Аналогично,

$$\langle (\delta\varphi^2)^2 \rangle_V \equiv \frac{1}{V} \int_V d^d x \, \langle \delta\varphi^2(0) \delta\varphi^2(x) \rangle \simeq \frac{4\varphi^2 \chi_\parallel}{V} \quad \text{при } V \gg \chi_\parallel^{d/2}.$$

Условие применимости сигма-модельного приближения

$$\sqrt{\langle (\delta\varphi^2)^2 \rangle_V} \ll \langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \rangle_V \tag{23}$$

имеет вид

$$V \ll \frac{\chi_\perp^2}{4\varphi^2 \chi_\parallel}. \tag{24}$$

При $h \to 0$ правая часть равенства стремится к бесконечности, так что сигма-модельное приближение в слабом внешнем поле применимо. В то же время разложения (14), (22), а значит и оценка (24) имеют смысл, только когда $\langle \delta\boldsymbol{\varphi}_\perp^2 \rangle_V \ll \varphi^2$, то есть

$$V \gg \frac{\chi_\perp}{4\varphi^2}. \tag{25}$$

Задачи

1. Вывести выражения (20), (21) для восприимчивостей и (22) для эффективного действия (свободной энергии).

2. Показать, что из (18) следует, что главный вклад в разложение $f(\varphi^2)$ при $\varphi > \varphi_s$ имеет вид

$$f(\varphi^2) = C(\varphi - \varphi_s)^3.$$

Найти постоянную C.