

Лекция 15
Модель Тирринга: решение методом анзатца Бете

Рассмотрим массивную модель Тирринга

$$S^{TM}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right), \quad (1)$$

причем

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix} = -\sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = -\sigma^3. \quad (2)$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H = \int dx (i\psi^+\sigma^3\partial_x\psi - m_0\psi^+\sigma^2\psi + 2g\psi_+^+\psi_+\psi_-^+\psi_-) \quad (3)$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x) + \psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x') = \delta_{\alpha'\alpha}\delta(x' - x), \quad (4)$$

причем импульс P и оператор числа частиц Q имеют вид

$$P = -i \int dx \psi^+\partial_x\psi, \quad Q = \int dx \psi^+\psi. \quad (5)$$

Давайте вспомним картинку Дирака. Спектр $\epsilon^2 - p^2 = m^2$ имеет две ветви: $\epsilon = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Поэтому стандартный вакуум образован “морем” фермионных возбуждений с отрицательными энергиями. Если мы удалим все это “море”, то возникнет “голый вакуум” или *псевдовакуум*. Очевидно, голый вакуум имеет бесконечно большую энергию и не может претендовать на роль основного состояния. Тем не менее, истинный вакуум можно найти как “возбуждение” над псевдовакуумом.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионы $g = 0$. Обозначим через $|\Omega\rangle$ состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x) = 0. \quad (6)$$

Введем волновую функцию “ N -частичного” состояния:

$$|\Psi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7)$$

Эти функции являются собственными векторами оператора Q :

$$Q|\Psi_N\rangle = N|\Psi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний \mathcal{H} распадается в сумму по собственным значениям Q :

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad v \in \mathcal{H}_N \Leftrightarrow Qv = Nv. \quad (8)$$

Действие гамильтониана $|\Psi_N\rangle$ имеет вид

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (i\sigma_k^3 \partial_{x_k} - m_0 \sigma_k^2),$$

где σ_k^i действует на пространстве k -й частицы. При $N = 1$ собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda/2} \\ -ie^{\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \text{sh } \lambda}. \quad (9)$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана имеет вид

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\sigma_k}}^{\alpha_{\sigma_k}}(x_k). \quad (10)$$

Энергия N -частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{k=1}^N \operatorname{ch} \lambda_k. \quad (11)$$

Какие значения могут принимать параметры λ ? Если система находится в ящике размера L с циклическими граничными условиями, то “быстроты” λ_k являются решениями уравнений

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} = 1 \quad k = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Это значит, что λ_k находится либо на вещественной оси, либо на прямой $i\pi + \mathbb{R}$. Последние решения соответствуют отрицательным энергиям и конденсат таких возбуждений может дать истинный вакуум. Очевидно, основному состоянию соответствует состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим $\lambda_k = i\pi + \beta_k$. Чтобы определить вакуумную энергию, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta < \beta_k < \Theta, \quad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \quad (13)$$

В термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ энергия вакуума равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho(\beta) m_0 \operatorname{ch} \beta, \quad \rho(\beta) = \frac{1}{L} \left| \frac{dn}{d\beta} \right| = \frac{m_0}{2\pi} \operatorname{ch} \beta.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой θ соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k = \theta \quad (\text{частица}),$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k = \theta + i\pi \quad (\text{античастица}).$$

Поскольку корни уравнений (12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с $p = (m \operatorname{ch} \theta, m \operatorname{sh} \theta)$, подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (3) коммутирует с оператором числа частиц Q , а по отношению к псевдовакууму $|\Omega\rangle$ нет никаких античастиц. Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств \mathcal{H}_N :

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (i\sigma_k^3 \partial_{x_k} - m_0 \sigma_k^2) + g \sum_{k<l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть:

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1' \alpha_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} = \delta_{\alpha_1' +} \delta_{\alpha_1 +} \delta_{\alpha_2' -} \delta_{\alpha_2 -} + \delta_{\alpha_1' -} \delta_{\alpha_1 -} \delta_{\alpha_2' +} \delta_{\alpha_2 +}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. Действительно, благодаря дельта-функциональному члену, волновая функция разрывна при $x_k = x_l$. В то же время действие гамильтониана зависит от волновой функции как раз в этой точке. Покажем, что, несмотря на это, ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x).$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольным образом:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = \delta(x). \quad (16)$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon'_a(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x)}{f(x)}$$

и при достаточно малых a имеем

$$f(x) = \text{const } e^{c\epsilon_a(x)}.$$

Отсюда в пределе $a \rightarrow 0$ имеем

$$f(+0) = e^c f(-0). \quad (17)$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при $x_1 = x_2$), при $x_1 \neq x_2$ волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса, рассеяние безотражательно и мы имеем:

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по (α_1, x_1) , (α_2, x_2) и содержит (с точностью до общего множителя) один свободный параметр A_{12}/A_{21} , который должен зависеть от константы связи g . Прямое вычисление дает

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{-i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda + ig}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda - ig}{2}}. \quad (19)$$

Функцию $\Phi(\lambda)$ удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda). \quad (20)$$

Величины λ_k естественно определены по модулю $2\pi i$.

Заметим, что функция $R(\lambda)$ периодична по g с периодом 2π . Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-\pi < g < \pi. \quad (21)$$

Теперь нетрудно построить общее N -частичное решение (*анзатц Бете*):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma\tau} A_{\lambda_{\tau_1}, \dots, \lambda_{\tau_N}}[\sigma] \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau_k}}^{\alpha_{\sigma_k}}(x_{\sigma_k}) \quad \text{при } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (22)$$

Коэффициенты A удовлетворяют соотношениям

$$A_{\dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots}[\dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots] = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \dots}[\dots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots]. \quad (23)$$

Наложим теперь циклическое граничное условие

$$\chi(\dots, x_k + L, \dots) = \chi(\dots, x_k, \dots). \quad (24)$$

Тогда получим

$$e^{im_0 L \text{ sh } \lambda_k} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N R(\lambda_k - \lambda_l). \quad (25)$$

Эта система уравнений на параметры λ_k называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с N неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях $N \rightarrow \infty$. Тем не менее, сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, удовлетворяющему (25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты λ_k решения называются *корнями* уравнений Бете.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad (26)$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (27)$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой $i\pi + \mathbb{R}$. Общие комплексные корни могут располагаться симметрично относительно одной из прямых \mathbb{R} и $i\pi + \mathbb{R}$. Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Можно показать, что решения уравнений Бете взаимно-однозначно связаны с наборами чисел (n_1, \dots, n_N) . Понятно также, что различным n_k соответствуют различные λ_k и наоборот. Из принципа Паули следует, что все λ_k должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k \neq n_l \quad (k \neq l). \quad (28)$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями “голых частиц”, т. е. с $\operatorname{Im} \lambda_k = \pi$. Будем писать

$$\lambda_k = i\pi + \beta_k.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа n_k шли через единицу:

$$n_{k+1} - n_k = \pm 1, \quad (29)$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина β_k росла с k . Поэтому примем

$$n_k = k_0 - k$$

с некоторым k_0 . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \beta_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^N \Phi(\beta_k - \beta_l).$$

В термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по β_k . Мы получим

$$m_0 \operatorname{ch} \beta = 2\pi\rho(\beta) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\rho(\beta'). \quad (30)$$

Здесь

$$\rho(\beta) = \frac{1}{L} \frac{dk}{d\beta} \quad (31)$$

— плотность состояний, связанная с числом голых частиц N в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho(\beta) = \frac{N}{L}. \quad (32)$$

При $\Theta \rightarrow \infty$ величина m_0 стремится к нулю при $g > 0$ и к бесконечности при $g < 0$. При $g > 0$ можно показать, что $\rho(\beta)/m_0 \rightarrow \infty$. Поэтому следует искать формальное решение однородного уравнения, которое получается из (30) при $m_0 = 0$, $\Theta \rightarrow \infty$. Оно имеет вид

$$\rho(\beta) = \text{const} \cdot \text{ch} \frac{\pi\beta}{\pi + g}. \quad (33)$$

Коэффициент пропорциональности вычисляется более аккуратным вычислением и оказывается конечным.

Рассмотрим теперь море фермионов с одной дыркой с быстротой $\beta_n = \lambda$.¹ В этом случае система уравнений выглядит следующим образом:

$$m_0 \text{ch} \beta = 2\pi\rho(\beta) - \frac{\Phi'(\beta - \lambda)}{L} + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\rho(\beta'). \quad (34)$$

Обозначив через $\rho_0(\beta)$ решение уравнения (30) и вычтя это уравнение из (34), получим

$$2\pi\delta\rho(\beta, \lambda) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\delta\rho(\beta', \lambda) = \frac{1}{L}\Phi'(\beta - \lambda). \quad (35)$$

Здесь

$$\delta\rho(\beta, \lambda) = \rho(\beta) - \rho_0(\beta).$$

В пределе $\Theta \rightarrow \infty$ это уравнение легко решить методом Фурье. Действительно, пусть

$$\Phi'_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \Phi'(\beta) e^{i\beta\omega}, \quad \delta\rho_\omega(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \delta\rho(\beta, \lambda) e^{i\beta\omega}.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (35), получаем алгебраическое уравнение

$$2\pi\delta\rho_\omega(\lambda) + \Phi'_\omega\delta\rho_\omega(\lambda) = \frac{1}{L}\Phi'_\omega e^{i\lambda\omega}.$$

Легко проверить, что

$$\Phi'_\omega = -2\pi \frac{\text{sh} g\omega}{\text{sh} \pi\omega}, \quad \delta\rho_\omega(\lambda) = -\frac{1}{L} \frac{\text{sh} g\omega}{\text{sh} \frac{\pi-g}{2}\omega \text{ch} \frac{\pi+g}{2}\omega} e^{i\lambda\omega}. \quad (36)$$

Энергия возбуждения определяется как разность $E_{N+1} - E_N$ и равна

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= m_0 \text{ch} \lambda - m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \delta\rho(\beta, \lambda) \text{ch} \beta, \\ p(\lambda) &= m_0 \text{sh} \lambda - m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \delta\rho(\beta, \lambda) \text{sh} \beta. \end{aligned}$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных g .

При $g < 0$ интегралы в этих выражениях сходятся при $\Theta \rightarrow \infty$. Но если мы положим $\Theta = \infty$, мы получим, что $\epsilon(\lambda) = p(\lambda) = 0$, так как $\delta\rho_{\pm i} = \frac{1}{L} e^{\pm\lambda}$. Поэтому следует перенормировать затравочную массу m_0 . Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции $\delta\rho_\omega$ в точках $\omega = \pm \frac{i\pi}{\pi+g}$ дает

$$m_0 = M \exp\left(-\frac{g}{\pi+g}\Theta\right) \sim M \left(\frac{m_0}{\Lambda}\right)^{g/(\pi+g)}, \quad (37)$$

где M — конечная постоянная размерности массы. Сравняя с нашей предыдущей оценкой

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \quad (38)$$

¹К сожалению, в предыдущей версии лекции при рассмотрении моря фермионов с одной дополнительной частицей была допущена ошибка. Я благодарен И. Протопопову, заметившему ее при решении задачи 6.4. Исследование дополнительной частицы на самом деле требует рассмотрения так называемых струнных решений уравнений Бете.

где β — константа связи модели синус-Гордона, получаем соотношение

$$\frac{g}{\pi} = 1 - \beta^2,$$

отличное от соотношения

$$\frac{g}{\pi} = \beta^{-2} - 1,$$

приведенного в Лекции 2. Можно предположить, что нормировка константы связи $g_{\text{ВА}}$ в анзатце Бете отлична от физической нормировки $g_{\text{ОРЕ}}$, определенной операторными разложениями, за пределами первой поправки по теории возмущений. Тем не менее, если постулировать

$$\frac{g_{\text{ВА}}}{\pi} = \frac{g_{\text{ОРЕ}}}{\pi + g_{\text{ОРЕ}}},$$

то результаты, полученные разными способами, совпадают. Заметим, что область определения (21) для константы $g_{\text{ВА}}$ эквивалентна области релевантности возмущения для модели синус-Гордон:

$$0 < \beta^2 < 2.$$

При $g > 0$ ситуация несколько иная. Полусы функции $\delta\rho_\omega(\lambda)$ при $\omega = \pm i\pi/(\pi + g)$ становятся ближе к вещественной оси, чем точки $\pm i$. Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует $m_0 \rightarrow 0$. Строго говоря, требуется явное вычисление $\delta\rho(\beta, \lambda)$ и затем интегралов для энергии и импульса возбуждений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области $g < 0$. Это значит, что формула для перенормировки массы (37) верна и в этом случае.

Энергия и импульс возбуждения равны ($g = g_{\text{ВА}}$)

$$\epsilon(\lambda) = m \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda}{\pi + g}, \quad p(\lambda) = m \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{\pi + g}, \quad m = \frac{M}{g} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\pi - g}{\pi + g} \right). \quad (39)$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\pi\lambda}{\pi + g}.$$

Совершенно аналогично вычисляется спектр дырок, соответствующий античастицам.

Следует еще вычислить S -матрицу частиц и дырок. Для этого надо рассмотреть систему из двух частиц и сравнить уравнения на фазы этих частиц с уравнением на фазы, следующим из S -матрицы. Реально сделать это довольно сложно, поэтому проще найти S -матрицу так, как она была найдена для $O(N)$ -моделей в прошлой лекции. Явный вид в базисе $(++, +-, -+, --)$ следующий:

$$S(\theta) = \left(S_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\theta) \right) = \begin{pmatrix} a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

причем

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \left(\beta^2 = 2 \frac{p}{p+1} \right). \quad (41)$$

Общий множитель имеет довольно сложный вид:

$$a(\theta) = - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(\theta) R_n(i\pi - \theta)}{R_n(0) R_n(i\pi)}, \quad R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2n-1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \quad (42)$$

При $0 < p < 1$ ($0 < \beta^2 < 1$) в теории имеются связанные состояния, соответствующие полюсам в точках

$$\theta_n = i\pi - i\pi p n, \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor.$$

Массы этих состояний равны

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi p n}{2} \quad (43)$$

Литература

- [1] М. Годен, Волновая функция Бете, М., «Мир», 1987
- [2] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи, М., «Наука», 1992

Задачи

1. Получите (3) из (1). Выведите (14).
2. Получите (9).
3. Выведите (19).
4. Получите соотношения (37) и (39).
5. Методом анзаца Бете найдите волновую функцию системы N тождественных нерелятивистских бозонов, взаимодействующих через потенциал

$$U(x) = c\delta(x).$$

Найдите систему уравнений Бете для них. Напишите эту систему в термодинамическом пределе при конечной плотности частиц n . Найдите энергию основного состояния в пределе $c \rightarrow \infty$.