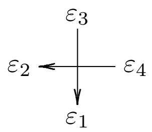
Лекция 17
Модель льда и коммутирующие трансфер-матрицы

Мы уже рассматривали двумерную точно решаемую модель классической статистической механики — модель Изинга. Рассмотрим теперь другую модель — *шестивершинную модель* или *модель льда*. Пусть на ребрах квадратной решетки живут «спины» $\varepsilon = \pm$, а взаимодействие имеет место в вершинах. Именно, каждой конфигурации спинов вокруг вершины



сопоставим больцмановский вес $R^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$. Стрелки здесь обозначают ориентацию решетки.

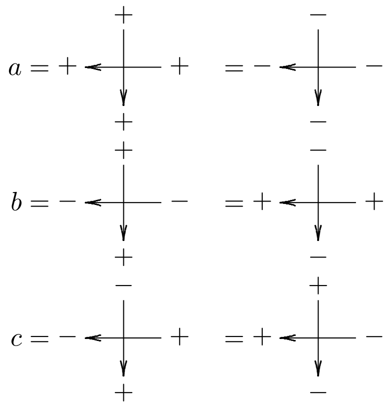
Конфигурацией C называется совокупность значений спинов на всех ребрах решетки. *Весом* конфигурации $W(C)$ называется произведение больцмановских весов во всех вершинах решетки. *Основной конфигурацией* называется конфигурация наибольшего веса. *Статистической суммой* называется сумма весов по всем конфигурациям $Z = \sum_C W(C)$. *Шестивершинной моделью* называется модель, в которой ненулевые веса имеются только при

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \tag{1}$$

и веса инвариантны по отношению к инверсии всех спинов:

$$R^{-\varepsilon_3\ -\varepsilon_4}_{-\varepsilon_1\ -\varepsilon_2} = R^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \tag{2}$$

Итак, вокруг каждой вершины допускается одна из следующих шести конфигураций



Матрицу R можно в этом случае записать в виде

$$R = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Рассмотрим модель на решетке размера $M \times N$ с циклическими граничными условиями и введем трансфер-матрицу столбца

$$T^{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_N}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_N} = \sum_{\mu_1\ldots\mu_N} R^{\mu_2\varepsilon'_1}_{\mu_1\varepsilon_1} R^{\mu_3\varepsilon'_2}_{\mu_2\varepsilon_2}\ldots R^{\mu_1\varepsilon'_N}_{\mu_N\varepsilon_N}. \tag{4}$$

Матрицу R удобно рассматривать как оператор

$$R : \mathbf{C}\otimes\mathbf{C} \to \mathbf{C}\otimes\mathbf{C}, \qquad v_{\varepsilon_1}\otimes v_{\varepsilon_2} \mapsto R^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\varepsilon'_1\varepsilon'_2} v_{\varepsilon'_1}\otimes v_{\varepsilon'_2}.$$

Здесь v_ε — естественный базис в пространстве $V = \mathbf{C}^2$. Если имеется набор идентичных пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$, то через R_{ij} мы будем обозначать оператор, действующий на произведении $V_i \otimes V_j$

как R, а на других V_l как единичный оператор. Тогда трансфер-матрицу можно записать компактно в виде

$$T = \mathrm{tr}_{V_0}(R_{0N} \dots R_{02} R_{01}). \tag{5}$$

Оператор под знаком следа заслуживает отдельного обозначения

$$L = R_{0N} \dots R_{02} R_{01} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{6}$$

и называется *оператором монодромии*. Очевидно

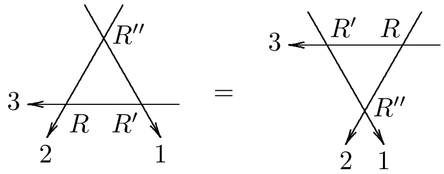
$$T = A + D. \tag{7}$$

Пространство $V_1 \otimes \dots \otimes V_N$ называется *квантовым пространством*, а пространство V_0 — *вспомогательным пространством*. Оператор L рассматривается обычно как оператор в квантовом пространстве и как матрица — во вспомогательном пространстве. Операторы $A, \dots, D$ действуют в квантовом пространстве.

Решение задачи о нахождении статистической суммы шестивершинной модели сводится к задаче о нахождении собственных значений трансфер-матрицы. Когда такого типа задача могла бы быть разрешима точно? По сути это вопрос о *квантовой интегрируемости* модели. Что такое квантовая интегрируемость, мы точно не знаем, но из классической механики мы знаем, что модель интегрируема тогда, когда в ней имеется достаточное количество интегралов движения в инволюции. Поэтому нам хотелось бы иметь достаточное количество операторов, коммутирующих с трансфер-матрицей и друг с другом. Предположим, что такие интегралы имеют снова вид трансфер-матрицы T' с какой-то другой матрицей R' вида (3). Итак, пусть имеются операторы T и T' вида (5) с R-матрицами вида (3). Когда они коммутируют? Достаточное (хотя и не необходимое) условие можно сформулировать так. Операторы T и T' коммутируют тогда, когда имеется матрица R'' вида (3), такая что

$$R''_{12} R'_{13} R_{23} = R_{23} R'_{13} R''_{12}. \tag{8}$$

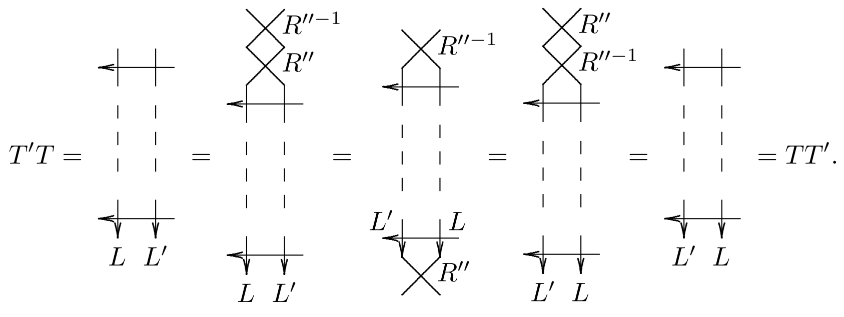
Графически это выглядит так:



(8′)

Это соотношение называется *уравнением Янга–Бакстера.*

Коммутативность трансфер-матриц T и T' при условии (8) легко доказать графически (циклические условия на вертикальных линиях подразумеваются):



В виде формул это записывается так. Из уравнения Янга–Бакстера следует, что

$$R''_{12} L'_1 L_2 = L_2 L'_1 R''_{12},$$

где операторы L'_1 и L_2 действуют на одном и том же квантовом пространстве, но имеют разные вспомогательные пространства V_1 и V_2. Тогда

$$\begin{aligned} T'T &= \mathrm{tr}_{V_1 \otimes V_2}(L'_1 L_2) = \mathrm{tr}_{V_1 \otimes V_2}((R''_{12})^{-1} R''_{12} L'_1 L_2) = \mathrm{tr}_{V_1 \otimes V_2}((R''_{12})^{-1} L_2 L'_1 R''_{12}) \\ &= \mathrm{tr}_{V_1 \otimes V_2}(R''_{12} (R''_{12})^{-1} L_2 L'_1) = \mathrm{tr}_{V_1 \otimes V_2}(L_2 L'_1) = TT'. \end{aligned}$$

Не будем выводить решение уравнения Янга–Бакстера последовательно, приведем только ответ. Понятно, что нормировка R-матриц не важна, поэтому R-матрицы можно параметризовать двумя переменными. Обозначим их λ и u. Удобно ввести тригонометрическую параметризацию

$$\begin{aligned} a(\lambda, u) &= \sin(\lambda - u), \\ b(\lambda, u) &= \sin u, \\ c(\lambda, u) &= \sin \lambda, \end{aligned} \tag{9}$$

если $c < a + b$, $a < b + c$, $b < a + c$, и

$$\begin{aligned} a(\lambda, u) &= \operatorname{sh}(\lambda - u), \\ b(\lambda, u) &= \operatorname{sh} u, \\ c(\lambda, u) &= \operatorname{sh} \lambda, \end{aligned} \tag{10}$$

если $c > a + b$. Случаи $a > b + c$ и $b > a + c$ не интересны (см. ниже).

В параметризации (9) или (10) решение уравнения Янга–Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} R &= R(\lambda, u_2 - u_3), \\ R' &= R(\lambda, u_1 - u_3), \\ R'' &= R(\lambda, u_1 - u_2). \end{aligned} \tag{11}$$

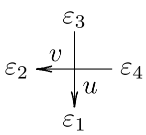
Параметр λ должен быть одинаков для всех трех матриц и в дальнейшем мы будем его опускать. Параметр u у всех трех матриц различен, хотя его значения и связаны соотношением. Важно, что для любых двух матриц R и R' с одинаковым значением λ имеется матрица R'' (с тем же, кстати, значением λ). Это значит, что имеется целое семейство коммутирующих трансфер-матриц $T(u)$ с произвольными u и фиксированным λ:

$$[T(u), T(u')] = 0 \quad \forall u, u'. \tag{12}$$

Переменная u называется *спектральным параметром.*

Заметим, что параметр u_i удобно приписать i-й линии, а R-матрицу записывать в виде

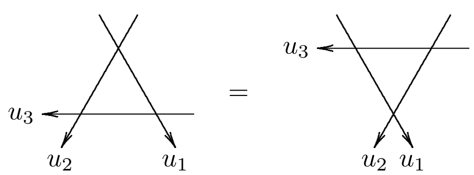
$$R(u-v)^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} =$$



Соотношение Янга–Бакстера

$$R_{12}(u_1 - u_2)R_{13}(u_1 - u_3)R_{23}(u_2 - u_3) = R_{23}(u_2 - u_3)R_{13}(u_1 - u_3)R_{12}(u_1 - u_2) \tag{13}$$

можно тогда изобразить как



(13′)

В таком виде уравнение Янга–Бакстера возникло в теории поля как условие факторизации многочастичного рассеяния на двухчастичные. Заметим также, что R-матрицы (9) и (10) удовлетворяют соотношениям кроссинг-симметрии и унитарности вида

$$R(\lambda - u)^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = R(u)^{\varepsilon_2\ -\varepsilon_3}_{\varepsilon_4\ -\varepsilon_1}, \qquad R_{12}(u)R_{21}(-u) = a(u)a(-u). \tag{14}$$

Наличие континуального семейства интегралов движения, конечно, не означает, что их действительно бесконечно много. На самом деле часть из них зависимы, так что их количество конечно, но достаточно для интегрируемости. Избавиться от континуального параметра можно, учтя аналитичность трансфер-матрицы как функции u и рассмотрев производящий функционал

$$T^{-1}(0)T(u) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n u^n}{n!}.$$

Гамильтонианы H_n коммутируют друг с другом

$$[H_m, H_n] = 0 \quad \forall m, n$$

и образуют семейство локальных интегралов движения. Локальность означает, что H_n можно представить в виде $\sum_{i=1}^{N} I_{n,i}$, где $I_{n,i}$ зависит только от конечного числа узлов $i, i+1, \ldots, i+n$. На самом деле только первые $N-1$ интегралов H_n и оператор $T(0)$ независимы. Оператор H_1 найти очень легко. Действительно, рассмотрим произведение

$$\check{R}(u) = R(u)P = \begin{pmatrix} a(u) & & & \\ & c(u) & b(u) & \\ & b(u) & c(u) & \\ & & & a(u) \end{pmatrix} = 1 \sin\lambda + \begin{pmatrix} -u\cos\lambda & & & \\ & & u & \\ & u & & \\ & & & -u\cos\lambda \end{pmatrix} + O(u^2)$$
$$= \sin\lambda - (h + \mathrm{const}\,)u + O(u^2),$$

где

$$h = -\frac{1}{2}(\sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y - \cos\lambda\, \sigma^z \otimes \sigma^z).$$

В первом порядке по u именно эти слагаемые дадут вклад в H_1. Их не очень сложно собрать (например, в индексных обозначениях), и получить

$$H_1 = H_{\mathrm{XXZ}} + \mathrm{const}\,,$$

где H_{XXZ} — гамильтониан XXZ-модели Гайзенберга:

$$H_{\mathrm{XXZ}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z), \tag{15}$$

где

$$\Delta = -\cos\lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{16}$$

(последнее равенство верно при любых u). В случае $c > a + b$ имеем

$$\Delta = -\operatorname{ch}\lambda. \tag{16$'$}$$

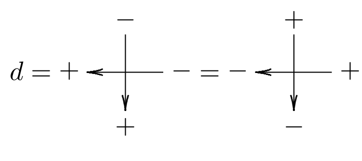
Таким образом, задача сводится к диагонализации XXZ-гамильтониана, которую мы (частично) решили в прошлый раз. В частности, условие льда в точности соответствует сохранению z-компоненты спина:

$$[T(u), S^z] = [H_{\mathrm{XXZ}}, S^z] = 0. \tag{17}$$

Задачи

1. Проверьте, что $\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$ равно $-\cos\lambda$ или $-\operatorname{ch}\lambda$ в зависимости от параметризации.

2. Дополним модель двумя дополнительными вершинами с одинаковым весом:



модель с такими вершинами уже не удовлетворяет условию льда и называется *восьмивершинной моделью.* Покажите, что две трансферматрицы R и R' коммутируют между собой, если их веса удовлетворяют условиям:

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)} = \frac{a'^2+b'^2-c'^2-d'^2}{2(a'b'-c'd')}, \qquad \Gamma = \frac{ab-cd}{ab+cd} = \frac{a'b'-c'd'}{a'b'+c'd'}.$$

Рассмотрим небольшую окрестность тривиального решения $a=c=1$, $b=d=0$:

$$a = 1+\alpha u + O(u^2), \quad b = u + O(u^2), \quad c = 1 + O(u^2), \quad d = \delta u + O(u^2).$$

Покажите, что разложение $T^{-1}(0)T(u)$ дает в первом порядке по u гамильтониан

$$H_{\mathrm{XYZ}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(J_x\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x + J_y\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y + J_z\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right),$$

где $J_x : J_y : J_z = 1 : \Gamma : \Delta$.