Лекция 19
Конформная симметрия в двух измерениях и алгебра Вирасоро

Давайте рассмотрим эвклидову теорию поля в двух измерениях. В комплексных координатах $z = x^1 + \mathrm{i}x^2$, $\bar{z} = x^1 - \mathrm{i}x^2$ удобно ввести следующие обозначения

$$T(z,\bar{z}) = 2\pi T_{zz}, \qquad \bar{T}(z,\bar{z}) = 2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}, \qquad \Theta(z,\bar{z}) = -2\pi T_{z\bar{z}}.$$

Закон сохранения энергии-импульса записывается следующим образом:

$$\bar{\partial}T(z,\bar{z}) = \partial\Theta(z,\bar{z}), \qquad \partial\bar{T}(z,\bar{z}) = \bar{\partial}\Theta(z,\bar{z}).$$

Нас будет интересовать случай *конформной теории поля*, отвечающей некоторой критической точке. Из исчезновения следа тензора энергии-импульса следует, что $\Theta(z,\bar{z}) = 0$, и законы сохранения приобретают вид

$$\bar{\partial}T(z,\bar{z}) = 0, \qquad \partial\bar{T}(z,\bar{z}) = 0. \tag{1}$$

Очевидно, это означает, что величина T является аналитической функцией переменной z, а $\bar{T}$ — переменной $\bar{z}$.[1] Поэтому впредь мы будем писать $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$. Обратим внимание, что уравнения (1) доставляют нам бесконечный набор интегралов движения. Чтобы увидеть это, воспользуемся радиальными переменными τ, σ:

$$z = e^{\tau + \mathrm{i}\sigma}, \qquad \bar{z} = e^{\tau - \mathrm{i}\sigma}. \tag{2}$$

В этой картине τ играет роль (мацубаровского) времени, причем бесконечное прошлое находится в точке $z = \bar{z} = 0$, а бесконечное будущее — в точке $z = \bar{z} = \infty$. Переменная σ играет роль пространственной координаты. Соотношения (2) представляют собой отображение цилиндра на плоскость, что в конформной теории не меняет вида уравнений поля.

Введем операторы

$$L_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi\mathrm{i}}\, z^{n+1} T(z), \qquad \bar{L}_n = \oint_{\bar{C}} \frac{d\bar{z}}{2\pi\mathrm{i}}\, \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}). \tag{3}$$

Интегралы не меняются при деформации контура C, если только контур не пересекает точки, в которых находятся другие поля. Считая, что $L_n(\tau)$, $\bar{L}_n(\tau)$ представляют собой интегралы по контуру $C(\tau) = \{z = e^{\tau+\mathrm{i}\sigma} | \, 0 \le \sigma < 2\pi\}$, мы запишем уравнения (1) в виде

$$\frac{dL_n(\tau)}{d\tau} = \frac{d\bar{L}_n(\tau)}{d\tau} = 0. \tag{4}$$

Операторы $T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$ или L_n, $\bar{L}_n$ порождают конформные преобразования. Рассмотрим изменение $\delta_\varepsilon\Phi(z,\bar{z})$ некоторого поля $\Phi(z,\bar{z})$ при малом преобразовании плоскости

$$z \to z + \varepsilon(z), \qquad \bar{z} \to \bar{z} + \overline{\varepsilon(z)}.$$

Очевидно,

$$\delta_\varepsilon\Phi(z,\bar{z}) = \oint_{C_z} \frac{d\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\, \varepsilon(\zeta)[T(\zeta), \Phi(z,\bar{z})] + \oint_{\bar{C}_z} \frac{d\bar{\zeta}}{2\pi\mathrm{i}}\, \overline{\varepsilon(\zeta)}[\bar{T}(\bar{\zeta}), \Phi(z,\bar{z})]. \tag{5}$$

Обсудим смысл простейших интегралов движения L_n, $\bar{L}_n$. Компоненты $\mathrm{i}L_{-1}$, $\mathrm{i}\bar{L}_{-1}$ представляют собой просто компоненты P_z и $\bar{P}_z$ импульса системы, то есть порождают сдвиги в плоскости. Компоненты $L_0 + \bar{L}_0$ и $L_0 - \bar{L}_0$ представляют собой сдвиги в переменных τ и σ, то есть на плоскости порождают масштабные преобразования и повороты. Собственное значение $L_0 - \bar{L}_0$ представляет собой лоренцев спин состояния в точке $z = \bar{z} = 0$. Компоненты L_1, $\bar{L}_1$ соответствуют композиции трех преобразований: инверсии, сдвигу и снова инверсии.

Теперь найдем самый общий вид преобразования тензора энергии-импульса под действием конформного преобразования:

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z)\partial T(z) + 2\varepsilon'(z)T(z) + \frac{c}{12}\varepsilon'''(z). \tag{6}$$

[1] Разумеется, это неверно в точках, где расположены другие поля.

Первые два члена очевидно возникают из лагранжева описания и не содержат в себе ничего, кроме того, что оператор $T(z)$ является оператором спина 2. Третий член является самой общей добавкой спина 2, не содержащей никаких дополнительных полей. Он содержит некоторое число c, называемое *центральным зарядом*. В частности, отсюда следует, что

$$[T(z),\bar{T}(\bar{z}')]=0. \tag{7}$$

Инфинитезимальное преобразование (6) можно проинтегрировать по ε и получить конечное преобразование

$$T(z)\to\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 T(\zeta)+\frac{c}{12}\{\zeta,z\},\qquad \{\zeta,z\}=\frac{d^3\zeta}{dz^3}\frac{dz}{d\zeta}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\frac{dz}{d\zeta}\right)^2. \tag{8}$$

Скобка $\{\zeta,z\}$ иногда называется производной Шварца.

Найдем теперь операторное разложение, отвечающее преобразованию (6). Сейчас мы убедимся, что это разложение имеет вид

$$T(z')T(z)=\frac{c/2}{(z'-z)^4}+\frac{2T(z)}{(z'-z)^2}+\frac{\partial T(z)}{z'-z}+O(1). \tag{9}$$

Очевидно, что с сингулярными членами в этом разложении связаны дельта-функции (и их производные), обеспечивающие некоммутативность $T(z')$ и $T(z)$ в бесконечно малой окрестности точки $z'=z$. Но работать с дельта-функциями довольно неудобно. Поэтому мы выведем соотношения другим способом. Запишем интеграл от коммутатора

$$\oint\frac{dz'}{2\pi\mathrm{i}}\varepsilon(z')[T(z'),T(z)]=\left[\oint\frac{dz'}{2\pi\mathrm{i}}\varepsilon(z')T(z'),T(z)\right]=\oint_{C_>}\frac{dz'}{2\pi\mathrm{i}}\varepsilon(z')T(z')T(z)-\oint_{C_<}\frac{dz'}{2\pi\mathrm{i}}\varepsilon(z')T(z')T(z),$$

где контуры $C_{\gtrless}$ окружают точку 0, причем контур $C_>$ обходит точку z снаружи, а контур $C_<$ — внутри. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\oint\frac{dz'}{2\pi\mathrm{i}}\varepsilon(z')[T(z'),T(z)]=\oint_{C_z}\frac{dz'}{2\pi\mathrm{i}}\varepsilon(z')T(z')T(z),$$

где контур C_z представляет собой маленькую окружность вокруг точки z. Подставляя сюда операторное разложение (9), немедленно получаем (6).

Подставив в (6) функцию $\varepsilon(z)$ в виде ϵz^{m+1}, получаем

$$[L_m,T(z)]=z^{m+1}\partial T(z)+2(m+1)z^mT(z)+\frac{c}{12}m(m^2-1)z^{m-1}.$$

Умножив это выражение на z^{n+1} и проинтегрировав по dz, получим

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{10a}$$

Аналогично,

$$[\bar{L}_m,\bar{L}_n]=(m-n)\bar{L}_{m+n}+\frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{10b}$$

Алгебра (10a) (или (10b) называется *алгеброй Вирасоро* (или, более правильно, но менее общепринято, *Виразоро*). Алгебра Вирасоро представляет собой бесконечномерную алгебру Ли, и ее теория представлений позволяет глубоко продвинутся в исследовании пространств состояний конформной теории поля и даже во многих случаях найти явно корреляционные функции.

Рассмотрим «вакуумные» состояния в радиальной картине:

$$L_n|\Delta,\bar{\Delta}\rangle=\bar{L}_n|\Delta,\bar{\Delta}\rangle=0\quad(n>0),\qquad L_0|\Delta,\bar{\Delta}\rangle=\Delta|\Delta,\bar{\Delta}\rangle,\qquad \bar{L}_0|\Delta,\bar{\Delta}\rangle=\bar{\Delta}|\Delta,\bar{\Delta}\rangle. \tag{11}$$

Такие состояния называются *векторами старшего веса*. Операторы L_{-n}, $\bar{L}_{-n}$ $(n>0)$ порождают из векторов старшего веса представления, которые называются *представлениями старшего веса*.

Состояниям в радиальной картине отвечают операторы, помещенные в точку $z = \bar{z} = 0$. Рассмотрим *примарные* или *первичные* операторы $\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})$ с операторным разложением

$$\begin{aligned} T(z')\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) &= \frac{\Delta\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})}{(z'-z)^2} + \frac{\partial\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})}{z'-z} + O(1), \\ \bar{T}(\bar{z}')\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) &= \frac{\bar{\Delta}\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})}{(\bar{z}'-\bar{z})^2} + \frac{\bar{\partial}\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})}{\bar{z}'-\bar{z}} + O(1), \end{aligned} \tag{12}$$

Легко проверить, что состояние

$$|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \phi_{\Delta\bar{\Delta}}(0,0)|0,0\rangle \tag{13}$$

удовлетворяет условию (11). Кроме того, эти операторы преобразуются при конформных преобразованиях как

$$\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \to \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{\Delta} \left(\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} \phi_{\Delta\bar{\Delta}}(\zeta, \bar{\zeta}) \tag{14}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [L_n, \phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})] &= z^{n+1}\partial\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) + \Delta(n+1)z^n\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}), \\ [\bar{L}_n, \phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z})] &= \bar{z}^{n+1}\bar{\partial}\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) + \bar{\Delta}(n+1)\bar{z}^n\phi_{\Delta\bar{\Delta}}(z, \bar{z}). \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом величина $d = \Delta + \bar{\Delta}$ имеет смысл масштабной размерности оператора, а $s = \Delta - \bar{\Delta}$ — его спина. Величины Δ и $\bar{\Delta}$ называются *конформными размерностями* первичного оператора.

Особый интерес представляют операторы размерности $\Delta = \bar{\Delta} = 1$. Для таких операторов интеграл по плоскости $\int d^2x\, \phi_{11}(z, \bar{z})$ инвариантен:

$$\int dz\, d\bar{z}\, \phi_{11}(z, \bar{z}) \to \int dz\, d\bar{z}\, \frac{d\zeta}{dz}\frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}\, \phi_{11}(\zeta, \bar{\zeta}) = \int d\zeta\, d\bar{\zeta}\, \phi_{11}(\zeta, \bar{\zeta}).$$

Прежде чем разбираться более подробно в теории представлений алгебры Вирасоро давайте разберем простой пример, где алгебра Вирасоро возникает достаточно естественно. Это теория Лиувилля с действием

$$S_{\mathrm{Liouville}}[\varphi] = \int d^2x\, \left(\frac{(\partial_\mu\varphi(x))^2}{16\pi} + \mu e^{b\varphi}\right). \tag{16}$$

Классическое уравнение движения имеет вид

$$\partial\bar{\partial}\varphi = 2\pi\mu b e^{b\varphi}.$$

На классическом уровне эта теория является конформно-инвариантной по отношению к преобразованиям

$$\varphi(z, \bar{z}) \to \varphi(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{1}{b}\log\zeta'\bar{\zeta}'.$$

Классически компоненты тензора энергии-импульса должны иметь вид

$$T(z) = -\frac{1}{4}(\partial\varphi)^2, \qquad \bar{T}(z) = -\frac{1}{4}(\bar{\partial}\varphi)^2, \qquad \Theta(z, \bar{z}) = \pi\mu e^{b\varphi}.$$

Здесь компонента $T_{z\bar{z}}$ не равна нулю. Можно слегка исправить тензор энергии-импульса:

$$T(z) = -\frac{1}{4}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2b}\partial^2\varphi, \qquad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{4}(\bar{\partial}\varphi)^2 + \frac{1}{2b}\bar{\partial}^2\varphi, \qquad \Theta = 0.$$

Теперь перейдем к квантовому случаю. Мы будем искать тензор энергии-импульса в виде

$$T(z) = -\frac{1}{4}{:}(\partial\varphi)^2{:} + \frac{Q}{2}\partial^2\varphi, \qquad \bar{T}(z) = -\frac{1}{4}{:}(\bar{\partial}\varphi)^2{:} + \frac{Q}{2}\bar{\partial}^2\varphi. \tag{17}$$

Нетрудно проверить, что эти компоненты образуют алгебру Вирасоро с центральным зарядом

$$c = 1 + 6Q^2. \tag{18}$$

Кроме того, экспоненциальные поля $e^{a\varphi}$ являются примарными полями с конформными размерностями

$$\Delta_a = \bar{\Delta}_a = a(Q-a). \tag{19}$$

Теперь зафиксируем значение величины Q. Прежде всего, заметим, что теорию Лиувилля можно рассматривать как теорию свободного поля, возмущенную оператором $\mu \int d^2x\, e^{b\varphi}$. Чтобы получившаяся теория была конформно-инвариантна, необходимо, чтобы этот оператор был инвариантен при конформных преобразованиях, то есть оператор $e^{b\varphi}$ должен иметь конформную размерность $(1,1)$: $\Delta_b = 1$. Отсюда немедленно следует

$$Q = b + b^{-1}. \tag{20}$$

Отметим, что $Q \geq 2$ и поэтому

$$c \geq 25. \tag{21}$$

Классическому пределу отвечает случай $b \to 0$, откуда мы видим что в квазиклассике $c \to \infty$. Таким образом, центральный заряд совсем не исчезает в классическом пределе. В классическом пределе удобно положить

$$\phi = b\varphi, \qquad \hbar = b^2 \simeq 24/c, \qquad t(z) = \hbar T(z), \qquad l_n = \hbar L_n.$$

Выражая коммутатор через скобку Пуассона, $[\cdot,\cdot] \simeq -\mathrm{i}\hbar\{\cdot,\cdot\}$, получаем

$$\{l_m, l_n\} = \mathrm{i}(m-n)l_{m+n} + 2\mathrm{i}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.$$

Эти соотношения можно получить и непосредственно из скобок Пуассона для полей $\phi(\tau,\sigma)$ и $\partial_\tau\phi(\tau,\sigma)$.

В двумерной конформной теории поля все поля можно классифицировать по представлениям двух копий алгебры Вирасоро. Поэтому имеет смысл изучить структуру этой алгебры. Пусть $|\Delta\rangle$ — вектор старшего веса одной алгебры Вирасоро с центральным зарядом c. Все другие векторы в представлении можно получить действием операторов L_{-n}:

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}|\Delta\rangle, \qquad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k > 0. \tag{22}$$

Эти векторы образуют базис в представлении, которое называется *модулем Верма* или *свободно-порожденном модуле*. Вопрос состоит в том, является ли модуль Верма неприводимым представлением. Модуль Верма приводим, если он содержат другой модуль Верма в качестве подмодуля (т. е. подпредставления). Это значит, что он содержит вектор $|\chi\rangle$, такой что

$$L_n|\chi\rangle = 0 \quad (n>0), \qquad L_0|\chi\rangle = (\Delta+N)|\chi\rangle. \tag{23}$$

Такой вектор называется *нуль-вектором* на уровне $N>0$, а модуль Верма в этом случае называют *вырожденным* на уровне N. Легко показать, что нуль-вектор должен быть ортогонален всем остальным векторoм. Прежде всего, нетрудно показать, что эрмитово сопряжение, согласованное с алгеброй Вирасоро имеет вид

$$L_n^+ = L_{-n}. \tag{24}$$

Кроме того, заметим, что два вектора $|A\rangle$ и $|B\rangle$ фиксированного веса,

$$L_0|A\rangle = \Delta_A|A\rangle, \qquad L_0|B\rangle = \Delta_B|B\rangle$$

ортогональны, если $\Delta_A \neq \Delta_B$:

$$0 = \langle A|(L_0 - L_0)|B\rangle = (\Delta_A - \Delta_B)\langle A|B\rangle.$$

Пусть

$$|A\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_k>0} A_{n_1n_2\ldots n_k} L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}|\Delta\rangle.$$

Тогда
$$\langle A|\chi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n_1\geq n_2\geq\dots\geq n_k>0} A_{n_1 n_2\dots n_k}\langle\Delta|L_{n_1}L_{n_2}\dots L_{n_k}|\chi\rangle = A\langle\Delta|\chi\rangle = 0.$$
Таким образом, с физической точки зрения нуль-векторы и их потомки отвечают нулевому состоянию, а с математической модуль Верма можно профакторизовать по подмодулям, порожденным всеми нуль-векторами, и после этого получится неприводимое представление.

Давайте попробуем найти простейшие нуль-векторы. Для того, чтобы проверить, что данный вектор $|\chi\rangle$ является нуль-вектором, достаточно проверить, что
$$L_1|\chi\rangle = L_2|\chi\rangle = 0.$$
Дело в том, что все остальные L_n $(n\geq 3)$ можно получить как коммутаторы этих двух операторов в достаточном количестве:
$$L_n = \frac{1}{n-2}[L_{n-1}, L_1] = \frac{1}{(n-2)!}[\dots[[L_2.L_1], L_1]\dots, L_1].$$

Пусть $N=1$. Тогда имеется единственный потомок $|\chi_1\rangle = L_{-1}|\Delta\rangle$, который и должен оказаться нуль-вектором. Очевидно, $L_2|\chi\rangle = 0$. Подействуем теперь оператором L_1:
$$L_1|\chi_1\rangle = L_1L_{-1}|\Delta\rangle = 2L_0|\Delta\rangle = 2\Delta|\Delta\rangle.$$
Следовательно вектор $|\chi_1\rangle$ является нуль-вектором, если $\Delta = 0$. Посмотрим, что это значит физически. Рассмотрим корреляционную функцию
$$\begin{aligned}0 = \langle 0,0|\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\dots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k)L_{-1}|0,0\rangle &= \langle 0,0|[\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\dots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k), L_{-1}]|0,0\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{k}\partial_i\langle 0,0|\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\dots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k)|0,0\rangle.\end{aligned}$$
То есть корреляционная функция первичных полей, определенная в радиальной картине, не меняется при однородном сдвиге по z. Аналогично она не меняется при однородном сдвиге по $\bar z$.

Рассмотрим теперь случай $N=2$. Возможно, мы получим более содержательные уравнения. Пусть
$$|\chi_2\rangle = (AL_{-2} + BL_{-1}^2)|\Delta\rangle.$$
Имеем условия нуль-вектора
$$\begin{aligned}0 &= L_1|\chi_2\rangle = (3A + 2(2\Delta+1)B)L_{-1}|\Delta\rangle,\\ 0 &= L_2|\chi_2\rangle = ((4\Delta + c/2)A + 6\Delta B)|\Delta\rangle.\end{aligned}$$
Мы получаем систему уравнений
$$\begin{aligned}3A + 2(2\Delta+1)B = 0,\\ (4\Delta + c/2)A + 6\Delta B = 0.\end{aligned}$$
Условие совместности этих уравнений
$$9\Delta = (2\Delta+1)(4\Delta+c/2)$$
имеет решения
$$\Delta = \Delta_{12/21} \equiv \frac{1}{16}\left(5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}\right). \tag{25}$$
Мы видим, что модуль Верма может быть вырожден на уровне 2, только если $c\leq 1$ или $c\geq 25$. Мы обозначили эти размерности как Δ_{12} и Δ_{21} имея в виду полную классификацию вырожденных модулей, которую мы опишем в следующий раз. Пусть Δ_* — любое из этих двух решений. Полагая $A=1$, получим
$$|\chi_2\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta_*+1)}L_{-1}^2\right)|\Delta_*\rangle. \tag{26}$$

Теперь подставим образуем с этим вектором корреляционную функцию:

$$0 = \langle 0,0|\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\ldots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k)|\chi_2,\bar\Delta\rangle$$
$$= \langle 0,0|[\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\ldots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k),L_{-2}]|\Delta_*,\bar\Delta\rangle$$
$$-\frac{3}{2(2\Delta_*+1)}\langle 0,0|[\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\ldots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k),L_{-1}^2]|\Delta_*,\bar\Delta\rangle.$$

Из коммутационных соотношений (15) находим дифференциальное уравнение

$$\left(\sum_{i=1}^k\left(\frac{1}{z_i-z}\partial_i+\frac{\Delta_i}{(z_i-z)^2}\right)-\frac{3}{2(2\Delta_*+1)}\partial^2\right)$$
$$\times\langle 0,0|\phi_{\Delta_1,\bar\Delta_1}(z_1,\bar z_1)\ldots\phi_{\Delta_k\bar\Delta_k}(z_k,\bar z_k)\phi_{\Delta_*\bar\Delta}(z,z)|0,0\rangle = 0, \quad (27)$$

где в последнем слагаемом мы заменили $(\sum\partial_i)^2$ на $\partial^2\equiv\partial^2/\partial z^2$, учитывая однородность корреляционной функции.

Итак, наличие в корреляционной функции вырожденного поля приводит к некоторому дифференциальному уравнению на корреляционные функции. В следующий раз мы убедимся, что эти дифференциальные уравнения позволяют найти многие корреляционные функции явно. С другой стороны, мы увидим, что даже без этих корреляционных функций конформная симметрия позволяет решать модели с $c<1$ и $c>25$, хотя в общем случае корреляционные функции не могут быть записаны в столь явном виде, как в случае вырожденных полей.

Литература

A. A. Belavi, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nuclaer Physics* **B241** (1984) 333–380.

Задачи

1. Получите (6) из операторного разложения (9).

2. Получите выражения (18) и (19) для центрального заряда и конформных размерностей в теории Лиувилля.

3. Найдите компоненты тензора энергии-импульса для свободного майорановского фермиона

$$S[\psi]=\frac{1}{4\pi}\int d^2x\,(\psi\bar\partial\psi-\bar\psi\partial\bar\psi),$$

который описывает модель Изинга в критической точке. Покажите, что центральный заряд модели $c=1/2$. Найдите размерности полей ψ и $\bar\psi$. Вычислите размерности полей, отвечающих вырожденным модулям Верма на уровне 2.