Лекция 2
Квантование скалярного поля

Рассмотрим поле $\varphi(x)$ с действием

$$S[\varphi] = \int d^D x \, \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - U(\varphi) \right). \tag{1}$$

Здесь принята сигнатура $(+ - \cdots -)$. Уравнение движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi = -U'(\varphi).$$

Рассмотрим сначала каноническое квантование. Запишем действие в виде

$$S[\varphi] = \int dt \, \mathcal{L}[\varphi, \dot\varphi]$$

где лагранжиан $\mathcal{L}$ — функционал φ и $\dot\varphi$ как функций пространственных координат $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^{D-1})$. Введем канонические переменные

$$\varphi(\boldsymbol{x}), \qquad \pi(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot\varphi(\boldsymbol{x})} = \dot\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

со скобкой Пуассона

$$\{\pi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})\} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{3}$$

Гамильтониан

$$H = \int d^{D-1} x \, \left(\frac{1}{2} \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + U(\varphi) \right). \tag{4}$$

При квантовании скобка Пуассона заменяется на коммутатор

$$[\pi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})] = -i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{5}$$

Уравнение движения приобретает операторный вид

$$\dot f = -i[f, H].$$

Отсюда видно, что теория поля не допускает простой размерной редукции.

Вопрос. *В случае квантовой механики частиц и классической теории поля мы можем сделать следующую операцию. Если начальные условия однородны по одной из координат, мы можем вообще забыть об этой координате и рассматривать задачу в пространстве меньшей размерности. В квантовой теории поля этого сделать* **нельзя**. *Почему?*

При квантовании методом функционального интеграла пишем

$$Z[J] = \int D\varphi \, e^{iS[\varphi] + i(J, \varphi)}, \qquad (f, g) = \int d^D x \, f(x) g(x). \tag{6}$$

Чтобы построить пространство состояний и получить какие-нибудь содержательные результаты, рассмотрим частный случай *свободного поля*

$$S_0[\varphi] = \int d^D x \, \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right). \tag{7}$$

Уравнение движения

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0$$

линейно. Выполним каноническое преобразование

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}}(\tilde{a}_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{px}} + \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{px}}),\\ \pi(\boldsymbol{x}) &= -i\int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}{2}}(\tilde{a}_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{px}} - \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{px}}),\end{aligned} \tag{8}$$

где $\varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$. Нетрудно проверить, что

$$\{\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}, \tilde{a}_{\boldsymbol{p}'}\} = \{\tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}, \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}'}\} = 0, \qquad \{\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}, \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}'}\} = i(2\pi)^{D-1}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{9}$$

Уравнение движения принимает вид

$$\dot{\tilde{a}}_{\boldsymbol{p}} = -i\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}, \qquad \dot{\tilde{a}}^+_{\boldsymbol{p}} = i\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}.$$

Отсюда

$$\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{-i\varepsilon_{\boldsymbol{p}}t}a_{\boldsymbol{p}}, \qquad \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{i\varepsilon_{\boldsymbol{p}}t}a^+_{\boldsymbol{p}}. \tag{10}$$

Гамильтониан принимает вид

$$H = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}. \tag{11}$$

Задача. *Доказать формулы (9)–(11).*

Квантование:

$$[\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}, \tilde{a}_{\boldsymbol{p}'}] = [\tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}, \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}'}] = 0, \qquad [\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}, \tilde{a}_{\boldsymbol{p}'}] = (2\pi)^{D-1}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{12}$$

Гамильтониан

$$H = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2} + \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}\right) = \mathrm{const} + \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}. \tag{13}$$

Легко проверить, что уравнения (9), (10) сохраняют силу и в квантовом случае. Удобно записывать все через a, a^+:

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{p}'}] = [a^+_{\boldsymbol{p}}, a^+_{\boldsymbol{p}'}] = 0, \qquad [a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{p}'}] = (2\pi)^{D-1}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{12$'$}$$

$$H = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2} + a^+_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}\right) = \mathrm{const} + \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\varepsilon_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}. \tag{13$'$}$$

Пространство состояний строим так. Вводим вакуум $|0\rangle$:

$$a_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0, \tag{14}$$

Все остальные состояния порождаются с помощью $a^+_{\boldsymbol{p}}$:

$$|\boldsymbol{p}_1, N_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, N_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1!\ldots N_n!}}(a^+_{\boldsymbol{p}_1})^{N_1}\ldots(a^+_{\boldsymbol{p}_n})^{N_n}|0\rangle. \tag{15}$$

Это состояние можно интерпретировать как состояние $N=\sum N_n$ частиц с волновой функцией

$$\sim \operatorname*{Sym}_{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N} e^{i\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_{N_1})+\cdots+\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x}_{N_1+\cdots+N_{n-1}+1}+\cdots+\boldsymbol{x}_N)}.$$

Энергия этого состояния равна $E_{\mathrm{vac}} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i N_i$.

Интерпретация. *Модель свободного поля описывает свободные (невзаимодействующие) тождественные бозоны спина 0.*

Поле φ, входящее в действие (или гамильтониан), содержит как операторы уничтожения $a_{\boldsymbol{p}}$, так и операторы рождения $a^+_{\boldsymbol{p}}$, так что любое взаимодействие этого поля (неквадратичный вклад в действие) может как уничтожать, так и рождать частицы.

Интерпретация. *Частицы, описываемые действием (1) (истинно) нейтральны.*

Можно найти корреляционные функции, например (при $t > t'$)

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle &= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{d^{D-1}p'}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}\varepsilon_{\boldsymbol{p}'}}}\langle 0|a_{\boldsymbol{p}}a^{+}_{\boldsymbol{p}'}|0\rangle e^{-ip(x-x')}\\ &= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{e^{-ip(x-x')}}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}},\end{aligned}$$

где $p = (\varepsilon_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p})$. При произвольных t, t' мы можем написать

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{e^{-i\varepsilon_{\boldsymbol{p}}|t-t'|+i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь квантование с помощью функционального интеграла:

$$Z_0[J] = \int D\varphi\, e^{-\frac{1}{2}(\varphi,K\varphi)+i(J,\varphi)},$$

где

$$K = i\partial_\mu\partial^\mu + im^2 + 0.$$

Слагаемое $+0$ добавлено для сходимости функционального интеграла. Выполним преобразование Фурье в D-мерном пространстве Минковского:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\varphi_p e^{-ipx}.$$

Тогда ядро имеет вид

$$K(p,p') = -i(2\pi)^D\delta(p-p')(p^2-m^2+i0)$$

Соответственно

$$G(p,p') = (2\pi)^D\delta(p-p')G(p) = (2\pi)^D\delta(p-p')\frac{i}{p^2-m^2+i0}$$

и

$$G(x,x') = \langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{i}{p^2-m^2+i0}\,e^{-ip(x-x')}. \tag{17}$$

Перейдем к евклидовым координатам:

$$\begin{aligned}&x^0 = -ix^0_E, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_E,\\ &p^0 = ip^0_E, \qquad \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p}_E, \qquad p^2 = -p^2_E, \qquad px = p_Ex_E.\end{aligned}$$

Тогда, опуская индексы E при x и p, получим

$$G_E(x,x') = \int_E \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2+m^2}. \tag{18}$$

Слагаемого $+i0$ здесь не нужно, т. к. не нужно обходить полюсы. Заметим, что вещественный контур по p^0_E деформируется в контур по p^0 без пересечения полюсов.

Задача. *Получить (16) из (17). (Подсказка: интеграл по p_0 вычисляется вычетами по-разному в зависимости от знака $t'-t$.)*

Остальные корреляторы вычисляются по теореме Вика. Ее можно сформулировать графически. Каждому полю $\varphi(x_i)$ сопоставим вершину графа. Соединим вершины линиями, так чтобы из каждой вершины выходила одна линия, а каждая линия соединяла две вершины. Сопоставим каждой линии множитель $G(x_i,x_j)$. Просуммируем все допустимые графы.

Рассмотрим другой пример свободного поля. Рассмотрим **комплексное** поле $\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+i\varphi_2)$ с действием

$$S=\int d^Dx\,(\partial_\mu\bar\varphi\,\partial^\mu\varphi-m^2\bar\varphi\varphi)=\int d^Dx\sum_{i=1,2}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i\,\partial^\mu\varphi_i-\frac{m^2}{2}\varphi_i^2\right) \tag{19}$$

($\bar\varphi$ — комплексно-сопряженное к φ). Можно рассматривать такое поле как два скалярных нейтральных бозонных поля с равной массой, но поучительно провести вычисления заново.

Канонические переменные:

$$\begin{aligned}&\varphi(\boldsymbol{x}), &&\pi(\boldsymbol{x})=\dot{\bar\varphi}(\boldsymbol{x}),\\ &\bar\varphi(\boldsymbol{x}), &&\bar\pi(\boldsymbol{x})=\dot\varphi(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Преобразование (8) превращается в

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x})&=\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}}(\tilde a_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{px}}+\tilde b^+_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{px}}),\\ \pi(\boldsymbol{x})&=-i\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}{2}}(\tilde b_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{px}}-\tilde a^+_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{px}}),\\ \bar\varphi(\boldsymbol{x})&=\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}}(\tilde b_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{px}}+\tilde a^+_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{px}}),\\ \pi(\boldsymbol{x})&=-i\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}{2}}(\tilde a_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{px}}-\tilde b^+_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{px}}),\end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично вводятся операторы a, a^+, b, b^+ с коммутационными соотношениями

$$[a_{\boldsymbol{p}},a^+_{\boldsymbol{p}'}]=[b_{\boldsymbol{p}},b^+_{\boldsymbol{p}'}]=(2\pi)^{D-1}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),$$

вакуум

$$a_{\boldsymbol{p}}|0\rangle=b_{\boldsymbol{p}}|0\rangle=0.$$

Гамильтониан имеет вид

$$H=\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\varepsilon_{\boldsymbol{p}}(1+a^+_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}+b^+_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}).$$

Мы видим, что имеется два сорта частиц a и b, причем в поле входит a вместе с b^+, либо b вместе с a^+. Это значит, что в любом взаимодействии, где рождается a, может вместо этого поглотиться b и наоборот.

Имеется сохраняющийся ток

$$j_\mu=i(\bar\varphi\partial_\mu\varphi-\varphi\partial_\mu\bar\varphi). \tag{21}$$

Ему соответствует заряд

$$N=\int d^{D-1}x\,j^0(\boldsymbol{x})=\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}(a^+_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}-b^+_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}),$$

отвечающий симметрии

$$\varphi\to e^{i\alpha}\varphi,\qquad\bar\varphi\to e^{-i\alpha}\bar\varphi.$$

Задача. Доказать.

Интерпретация. *Комплексное поле описывает пару бозонов спина 0 типа частица—античастица.*

Теорема. *Два сорта нейтральных бозонов с одинаковой массой эквивалентны одной паре заряженных бозонов.*

Наконец, напишем пропагатор. Для этого воспользуемся теоремой

$$\int i^n d^n x d^n \bar{x}\, e^{-(\bar{x},Kx)-(\bar{a},x)-(\bar{x},b)} = \frac{(2\pi)^n}{\det K}\, e^{(\bar{a},K^{-1}b)}. \tag{22}$$

Введем производящий функционал

$$Z[J,\bar{J}] = \int D\varphi\, D\bar{\varphi}\, e^{iS[\varphi,\bar{\varphi}]+i(\bar{J},\varphi)+i(J,\bar{\varphi})}$$

(J и $\bar{J}$ — независимые переменные). Тогда

$$\langle\varphi(x)\bar{\varphi}(x')\rangle = -\left.\frac{Z^{-1}[J,\bar{J}]\delta^2 Z[J,\bar{J}]}{\delta\bar{J}(x)\,\delta J(x')}\right|_{J=\bar{J}=0}.$$

Находим

$$\begin{gathered} G(x,x') = \langle\varphi(x)\bar{\varphi}(x')\rangle = \int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{i}{p^2-m^2+i0}\, e^{-ip(x-x')}, \\ \langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \langle\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(x')\rangle = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Теперь остальные корреляторы вычисляются опять по теореме Вика. Но теперь имеется два сорта точек φ и $\bar{\varphi}$, а все линии следует снабдить стрелками, идущими из $\bar{\varphi}(x_i)$ в $\varphi(x_j)$.