Лекция 3
Инвариантная теория возмущений

Рассмотрим модель φ^4 в D измерениях:

$$S_\lambda[\varphi] = \int d^D x \, \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right). \tag{1}$$

Мы хотим вычислить функционал

$$Z[J] = \int D\varphi \, e^{iS_\lambda[\varphi] + i(J,\varphi)},$$

рассматривая слагаемые с $J(x)$ и λ как малые возмущения.

Проведем сначала размерный анализ:

$$\begin{aligned} &[S] = 1, \\ &[\varphi] = [x]^{-(D-2)/2} = [m]^{(D-2)/2}, \\ &[J] = [x]^{-(D+2)/2} = [m]^{(D+2)/2}, \\ &[\lambda] = [x]^{D-4} = [m]^{4-D}. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы видим, что при $D < 4$ величина λ растет с увеличением масштаба. В этом случае возмущение называется *релевантным*. При $D > 4$ величина λ убывает на больших масштабах, и возмущение называется *иррелевантным*. Наконец, при $D = 4$ константа взаимодействия безразмерна и возмущение является *маргинальным*. Как мы увидим позже, оно на самом деле является иррелевантным, т. е. становится несущественным на больших масштабах. Это значит, что именно на больших масштабах мы можем представлять себе частицы как почти не взаимодействующие. Аналогичное поведение имеет место в КЭД. Противоположное — в КХД.

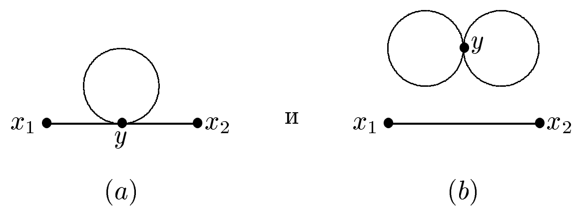
Теперь давайте раскладывать производящий функционал по степеням J и λ (мы опускаем нечетные степени $J(x)$, так как их вклады равны нулю):

$$\begin{aligned} Z[J] = \int D\varphi e^{iS_0[\varphi]} \Bigg(& 1 + \frac{1}{2!} \int d^{2D}x \, iJ(x_1) \, iJ(x_2) \, \varphi(x_1)\varphi(x_2) \\ & + \frac{1}{4!} \int d^{4D}x \, iJ(x_1) \, iJ(x_2) \, iJ(x_3) \, iJ(x_4) \, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) + \cdots \Bigg) \\ & \times \left(1 + \frac{-i\lambda}{4!} \int d^D y \, \varphi^4(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^{2D} y \, \varphi^4(y_1)\varphi^4(y_2) + \cdots \right) \end{aligned}$$

Вычислим общий член такого разложения

$$\int D\varphi \, e^{iS_0[\varphi]} \times \frac{1}{m!n!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^n \int d^{mD}x \, d^{nD}y \, iJ(x_1) \ldots iJ(x_m) \, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m) \varphi^4(y_1) \ldots \varphi^4(y_n).$$

Мы должны перебрать все спаривания. При этом из точек $x_1, \ldots, x_m$ выходит по одной линии, а из точек $y_1, \ldots, y_n$ — по четыре. Далее эти линии нужно соединить всеми возможными способами. Например, при $m = 2$, $n = 1$ мы получаем 2 графика



Поскольку в каждой точке y_i сидит 4 поля φ, линии к ним можно подводить 4! способов, что сокращает множетели 4! в знаменателе. Кроме того, точки $y_1, \ldots, y_n$ следует переставить $n!$ способами. Вместо этого удобнее каждый график учесть один раз (все равно мы интегрируем по y_i), но убрать $n!$ в знаменателе. Наконец, если график обладает симметриями по отношению к перестановкам линий, то соответствующие перестановки, учтенные ранее не приводят к разным спариваниям. Следовательно, следует поделить все на число перестановок симметрий графа. Например для графа (a) число симметрий равно 2, а для графа (b) — 8.

Итак, для вычисления вклада графа в производящий функционал, нужно выполнить следующие шаги.

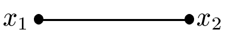
1. Сопоставить каждой вершине, в которую входит 4 линии, множитель $-i\lambda$.
2. Сопоставить каждой линии пропагатор $G(y_i, y_j)$.
3. Проинтегрировать по $y_1, \ldots, y_n$.
4. Поделить ответ на число симметрий графа.
5. Сопоставить каждой вершине, в которую входит одна линия, множитель $iJ(x_i)$.
6. Проинтегрировать по $x_1, \ldots, x_m$.
7. Поделить ответ на $m!$.

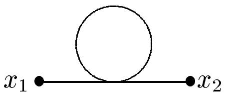
Чтобы вычислить m-точечную корреляционную функцию, следует проварьировать m раз по iJ, затем положить $J = 0$ и поделить на $Z[0]$. Варьирование по $iJ(x_i)$ выделит графы с m "внешними" вершинами и сократит $m!$ в знаменателе. Теперь посмотрим, что такое $Z[0]$. Оно состоит из диаграмм без внешних хвостов. Деление на него убьет все диаграммы с поддиаграммами без внешних хвостов. Поэтому для вычисления корреляционных функций следует

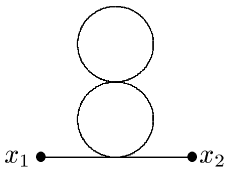
а) брать только диаграммы, не содержащие поддиаграмм, не связанных с внешними точками $x_1, \ldots, x_m$;

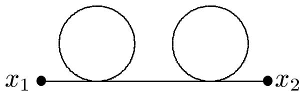
б) опустить шаги 5–7.

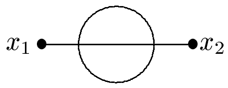
В случае $m = 2$, $n = 1$ вклад дает только диаграмма (a). Для двухточки имеем

$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle =$ 

$+\,\frac{1}{2}$ 

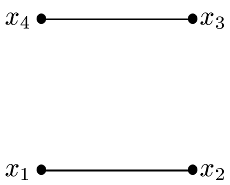
$+\,\frac{1}{4}$ 

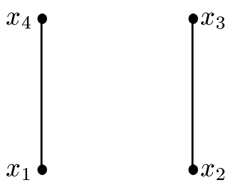
$+\,\frac{1}{4}$ 

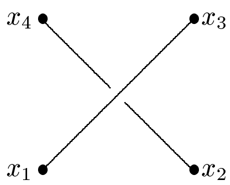
$+\,\frac{1}{6}$ 

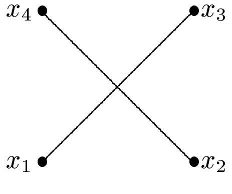
$+\cdots$

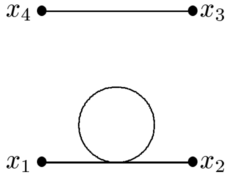
Для четырехточки имеем

$\langle \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_4) \rangle =$ 

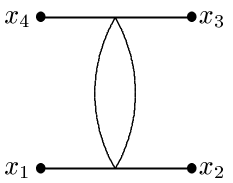
$+$ 

$+$ 

$+$ 

$+\,\frac{1}{2}$ 

$+$ (еще 5 диаграмм)

$+\frac{1}{2}$ 

+ (еще 2 диаграммы)

+ (еще 4 связных диаграммы с одной петлей)

+ (еще 15 диаграмм с 2 петлями) + $\cdots$.

Переформулируем правила вычисления корреляционных функций в импульсном пространстве.

1. Сопоставить каждой вершине, в которую входит 4 линии, множитель $-i\lambda$.

2. Нарисовать на каждой линии стрелки в произвольных направлениях и написать у каждой стрелки импульсную переменную $p^{(l)}$ так, чтобы в каждой вершине суммарный втекающий импульс равнялся нулю. Сопоставить каждой линии пропагатор $G(p^{(l)})$.

3. Проинтегрировать по независимым импульсным переменным с весом $d^D p/(2\pi)^D$.

4. Поделить ответ на число симметрий графа (без стрелок).

5. Умножить все на $(2\pi)^D \delta(p_1 + \cdots + p_m)$ и отождествить p_i с $p^{(l)}$ на соответствующей линии, если $p^{(l)}$ вытекает из диаграммы, и с $-p^{(l)}$, если втекает. Ответ даст нам $\langle \varphi_{p_1} \ldots \varphi_{p_m} \rangle$.

Понятно, что для действий вида

$$S[\varphi] = \int d^D x \, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \sum \frac{\lambda_k}{k!}\varphi^k \right)$$

правила аналогичны, причем каждой вершине с к линиями отвечает множитель $-i\lambda_k$. Отметим, что

$$[\lambda_k] = [x]^{(k/2-1)D-k} = [m]^{k-(k/2-1)D}.$$

Соответственно, критическая размерность падает с ростом k.

Легко также понять, как модифицируются правила в случае нескольких сортов частиц.

Рассмотрим теперь теорию типа φ^4 для комплексного бозона:

$$S[\varphi] = \int d^D x \, \left(|\partial_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\varphi|^4 \right).$$

В принципе, можно рассмотреть взаимодействие типа $\lambda_1(\varphi^4 + \bar{\varphi}^4)$. Однако в этом случае нарушается симметрия $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$ и к действию можно добавить еще один релевантный член $\mu(\varphi^2 + \bar{\varphi}^2)$, описывающий превращение частицы в античастицу и наоборот. Это означает что частица и античастица не являются собственными состояниями Гамильтониана даже в квадратичном приближении. То есть на самом деле имеется две нейтральные частицы с массами $m_{1,2} = m \pm \mu$. Подобная ситуация имеет место в случае K^0-мезона.

Единственное отличие в диаграммной технике состоит в том, что ребра графов теперь направлены, а в каждую вершину входит и выходит по две линии. Соответственно меняются симметрийные множители диаграмм. Например:

$\langle \varphi(x_1)\bar{\varphi}(x_2) \rangle =$