Лекция 10
Спиноры и поля спина $1/2$

1. Спинорное представление группы вращений $SO(3)$. Рассмотрим алгебру $M(2,\mathbf{C})$ всех комплексных матриц 2×2. Выберем в ней базис *матриц Паули*

$$1=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix},\quad \sigma^1=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Имеется соотношение

$$\sigma^i\sigma^j=\delta^{ij}+i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

или

$$\sigma^i\sigma^j-\sigma^j\sigma^i=2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{2}$$

$$\sigma^i\sigma^j+\sigma^j\sigma^i=2\delta^{ij}. \tag{3}$$

Матрицы $\frac{i}{2}\sigma^i$ реализуют двумерное представление алгебры Ли группы $SO(3)$.

Реализуем преобразования группы вращений в $M(2,\mathbf{C})$, так чтобы комбинация $x^i\sigma^i$ оставалась инвариантной. Именно, пусть

$$x'^i=\lambda^i{}_jx^j,\qquad \Lambda=(\lambda^i{}_j)\in O(3). \tag{4}$$

Тогда

$$\sigma'^i=\lambda^i{}_j\sigma^j, \tag{5}$$

т. е. σ^i преобразуются как компоненты вектора (преобразования ортогональные — ковектор и вектор преобразуются одинаково). Оказывается, соотношения (2), (3) сохраняется при этих преобразованиях при $\Lambda\in SO(3)$. Преобразование $\Lambda=-1$ сохраняет (3), но меняет знак в правой части (2). Отсюда следует, что (5) задает автоморфизм $M(2,\mathbf{C})$ при $\Lambda\in SO(3)$. Но все автоморфизмы ассоциативной алгебры $M(n,\mathbf{C})$ внутренние (см. Дубровин–Новиков–Фоменко). Следовательно, существует такой элемент g, что

$$\sigma'^i=g^{-1}\sigma^ig\qquad (\Lambda\in SO(3)). \tag{6}$$

Конечно, элемент g определен с точностью до произвольного множителя. Эту многозначность можно устранить, потребовав, чтобы $g(\Lambda)$ принадлежал $SL(2,\mathbf{C})$, т. е. $\det g(\Lambda)=1$. Тогда представление делается двузначным, так как матрицу g можно домножить на -1.

Покажем, что эта двузначность неустранима. Рассмотрим элемент

$$g=1+\frac{i}{2}\sigma^3\varepsilon$$

с малым ε. Тогда

$$\sigma'^1=\sigma^1-\frac{i}{2}[\sigma^3,\sigma^1]\varepsilon=\sigma^1+\varepsilon\sigma^2,$$
$$\sigma'^2=\sigma^2-\frac{i}{2}[\sigma^3,\sigma^2]\varepsilon=\sigma^2-\varepsilon\sigma^1,$$
$$\sigma'^3=\sigma^3-\frac{i}{2}[\sigma^3,\sigma^3]\varepsilon=\sigma^3.$$

Это отвечает преобразованию координат

$$x'^1=x^1+\varepsilon x^2,$$
$$x'^2=x^2-\varepsilon x^1,$$
$$x'^3=x^3,$$

т. е. бесконечно малому повороту на угол ε вокруг оси z. Для конечного поворота на угол φ получаем, очевидно,

$$g(\varphi)=\exp\left(\frac{i}{2}\sigma^3\varphi\right)=\cos\frac{\varphi}{2}+i\sigma^3\sin\frac{\varphi}{2} \tag{7a}$$

(так как $(\sigma^3)^2 = 1$). Очевидно также, что общий поворот на угол φ вокруг оси $\boldsymbol{n}$ дается

$$g(\varphi, \boldsymbol{n}) = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma n}\,\varphi\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\boldsymbol{\sigma n}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{7b}$$

Рассмотрим поворот на угол 2π:

$$g(2\pi) = \exp(i\pi\sigma^3) = \cos\pi = -1.$$

Это значит, что непрерывному замкнутому пути из 1 в 1 на группе $SO(3)$ отвечает путь из $g = 1$ в $g = -1$ в спинорном представлении. Это значит, что $SO(3)$ получается факторизацией $SU(2)$ по дискретной подгруппе $\{\pm 1\}$.

Можно ввести *спиноры* ξ как объекты, компоненты которых преобразуются по правилу

$$\xi' = g\xi \qquad (\text{или } \xi'^{\alpha} = g^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\beta}).$$

Если мы введем $\bar{\xi} = \xi^{+} = \xi^{*T}$, то понятно, что

$$\bar{\xi}' = \bar{\xi} g^{-1}.$$

Поэтому величины

$$\bar{\eta}\xi, \quad \bar{\eta}\sigma^i\xi, \quad \bar{\eta}\sigma^i\sigma^j\xi, \ldots$$

преобразуются как скаляр, вектор, тензор второго ранга и т. д. соответственно. Например,

$$(\bar{\eta}\sigma^i\xi)' = \bar{\eta}'\sigma^i\xi' = \bar{\eta}g^{-1}\sigma^i g\xi = \bar{\eta}\sigma'^i\xi = \lambda^i{}_j\bar{\eta}\sigma^j\xi$$

Величина $\bar{\xi}\xi = |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2$ положительно определена и может рассматриваться как плотность вероятности спинорного поля $\xi(x)$.

2. Спинорное представление группы Лоренца $O(1,3)$. Давайте обобщим спиноры на представления группы Лоренца. Это несвязная группа, состоящая из четырех компонент, связанных двумя преобразованиями:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (\text{пространственная инверсия}), \\ T &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{обращение времени}). \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим связную компоненту, содержащую единицу. Любой ее элемент Λ представим в виде $\Lambda = e^A$, где A — матрица из алгебры $o(1,3)$, т. е. удовлетворяющая условию

$$g_{\mu\rho}a^{\rho}{}_{\nu} = -a^{\rho}{}_{\mu}g_{\rho\nu}.$$

Построим базис в этой алгебре:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & -1 \\ & & 0 & \\ & 1 & & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор J_i генерирует повороты вокруг оси i (т. е. малый поворот на угол ε есть $1+\varepsilon J_i$), а оператор K_i порождает буст вдоль оси i.

Генераторы J_i, K_i удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= -\varepsilon_{ijk} J_k, \\ [K_i, K_j] &= -\varepsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k. \end{aligned} \tag{9}$$

Введем новые генераторы

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{K}),$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{K})$$

с соотношениями

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= -\varepsilon_{ijk} A_k, \\ [B_i, B_j] &= -\varepsilon_{ijk} B_k, \\ [A_i, B_j] &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Это значит, что алгебра $o(1,3)_{\mathbf{C}}$ распадается в прямую сумму $su(2)_{\mathbf{C}} \oplus su(2)_{\mathbf{C}}$, а связная компонента группы $O(1,3)$ представляет собой некоторое вещественное подмногообразие в группе $SU(2)_{\mathbf{C}} \otimes SU(2)_{\mathbf{C}}$. Мы можем применить теорию представлений для $su(2)$. Представления $o(1,3)$ нумеруются парами чисел (j, j'). В частности можно рассмотреть два представления:

$$\begin{aligned} &(1/2, 0): \quad \pi(\boldsymbol{A}) = \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \pi(\boldsymbol{B}) = 0 \quad \text{или} \quad \pi(\boldsymbol{J}) = -i\pi(\boldsymbol{K}) = \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \\ &(0, 1/2): \quad \pi(\boldsymbol{A}) = 0, \quad \pi(\boldsymbol{B}) = \frac{i}{2}\sigma \quad \text{или} \quad \pi(\boldsymbol{J}) = i\pi(\boldsymbol{K}) = \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{11}$$

Спиноры из первого представления обычно обозначают $\xi = (\xi^\alpha)$, а спиноры из второго представления — $\eta = (\eta_{\dot\alpha})$.

Общее преобразование Лоренца (из связной компоненты) с угловыми переменными $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &\xrightarrow{(1/2,0)} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\varphi}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\theta}\right) \xi, \\ \eta &\xrightarrow{(0,1/2)} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\varphi}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\theta}\right) \eta. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь система K' движется относительно K со скоростью $\operatorname{th}\theta$ в направлении $\boldsymbol{\theta}$ и повернута на угол φ вокруг оси $\boldsymbol{\varphi}$. Все векторы записаны в системе K.

Рассмотрим теперь пространственную инверсию P. Понятно, что она оставляет неизменным псевдовектор $\boldsymbol{J}$ и обращает вектор $\boldsymbol{K}$. Это значит, что

$$\boldsymbol{A} \stackrel{P}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{B}, \qquad (1/2, 0) \stackrel{P}{\longleftrightarrow} (0, 1/2).$$

Удобно положить

$$(\xi^P)_{\dot\alpha} = \xi^\alpha. \tag{13}$$

Аналогично при обращении времени

$$\boldsymbol{J} \xrightarrow{T} -\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{K} \xrightarrow{T} \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{A} \stackrel{T}{\longleftrightarrow} -\boldsymbol{B}.$$

Это отображение вообще не является автоморфизмом алгебры, и это логично, так как при обращении времени волновые функции заменяются на комплексно-сопряженные.

Мы видим, что "элементарным" представлением $O(1,3)$ является представление $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$, т. е. следует рассмотреть пару

$$\psi=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},$$

называемую *биспинором.* Компоненты ξ и η принято называть *правой* и *левой* соответственно.

Пусть теперь волновая функция ψ_0 описывает неподвижную частицу. Из P-инвариантности имеем $\xi_0=\pm\eta_0$. Это соответствует нерелятивистскому случаю, когда для описания частицы достаточно одного спинора. Рассмотрим сначала P-*четные* состояния $\xi_0=\eta_0$. Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся со скоростью $-\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{n}\,\mathrm{th}\,\theta$, в которой частица имеет энергию $\varepsilon=m\,\mathrm{ch}\,\theta$ и импульс $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{n}\,\mathrm{sh}\,\theta$. В этой системе

$$\begin{aligned}\xi_{\boldsymbol{p}}&=e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\theta}}\xi_0=\left(\mathrm{ch}\,\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{\sigma n}\,\mathrm{sh}\,\frac{\theta}{2}\right)\xi_0=\frac{\varepsilon+m+\boldsymbol{\sigma p}}{\sqrt{2m(\varepsilon+m)}}\xi_0,\\ \eta_{\boldsymbol{p}}&=e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma\theta}}\xi_0=\left(\mathrm{ch}\,\frac{\theta}{2}-\boldsymbol{\sigma n}\,\mathrm{sh}\,\frac{\theta}{2}\right)\xi_0=\frac{\varepsilon+m-\boldsymbol{\sigma p}}{\sqrt{2m(\varepsilon+m)}}\xi_0,\end{aligned}\tag{14}$$

Легко видеть, что

$$\xi_{\boldsymbol{p}}=\frac{\varepsilon+\boldsymbol{\sigma p}}{m}\eta_{\boldsymbol{p}},\qquad\eta_{\boldsymbol{p}}=\frac{\varepsilon-\boldsymbol{\sigma p}}{m}\xi_{\boldsymbol{p}}.$$

Эти соотношения можно записать, введя матрицы 4×4

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix},\quad\gamma^i=\begin{pmatrix}&-\sigma^i\\ \sigma^i&\end{pmatrix},\tag{15}$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\qquad\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0=(\gamma^\mu)^+.\tag{16}$$

Имеем

$$(\gamma p-m)\psi_{\boldsymbol{p}}=0.$$

Заменяя $p_\mu\to i\partial_\mu$, получаем *уравнение Дирака*

$$(i\gamma\partial-m)\psi(x)=0.\tag{17}$$

Это уравнение описывает свободную частицу спина 1/2. Ему удовлетворяют плоские волны ($p^0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$)

$$\psi_p(x)=\psi_pe^{-ipx}=\frac{\gamma p+m}{\sqrt{2m(\varepsilon+m)}}\psi_0e^{-ipx},\qquad\psi_0=\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_0\end{pmatrix}\tag{18a}$$

и

$$\psi_{-p}(x)=\psi_{-p}e^{ipx}=-\frac{\gamma p-m}{\sqrt{2m(\varepsilon+m)}}\psi_0'e^{ipx},\qquad\psi_0'=\begin{pmatrix}\xi_0\\ -\xi_0\end{pmatrix}.\tag{18b}$$

Последнее выражение описывает P-*нечетные* состояния. Это частный случай общей теоремы, что фермион и антифермион имеют противоположную четность.

Удобно ввести также матрицу

$$\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix},\qquad\gamma^\mu\gamma^5=-\gamma^5\gamma^\mu,\qquad(\gamma^5)^2=-1.\tag{19}$$

которая меняет знак η, но не меняет ξ. Она позволяет выделять киральные компоненты

$$\psi_R=\begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}=\frac{1+\gamma^5}{2}\psi,\qquad\psi_L=\begin{pmatrix}0\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1-\gamma^5}{2}\psi.$$

Явно проверяется, что преобразование Лоренца $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ дается

$$\psi \to g\psi = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\Sigma\varphi}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha\theta}\right)\psi, \tag{20}$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \\ & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \\ & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}.$$

Можно явно проверить, что если элемент g имеет вид (20), то

$$g^{-1}\gamma^\mu g = \lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{21}$$

Задача. *Проверить (достаточно проверить для бесконечно малых преобразований).*

Введем *дираковски сопряженный спинор*

$$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0.$$

Легко проверить, что

$$\bar{\psi}'\psi, \quad \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^\nu\psi, \ldots$$

являются скаляром, вектором, тензором второго ранга и т. д. соответственно. Достаточно проверить, что $\bar{\psi}'\psi$ — скаляр. Остальное проверяется так же как для $SO(3)$ и матриц Паули. Действительно, $\bar{\psi}$ преобразуется в $(g\psi)^+\gamma^0 = \psi^+g^+\gamma^0 = \psi^+\gamma^0g^{-1}$, что доказывает утверждение.

Отметим также теорему, что

$$\gamma^\mu, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\ (\mu < \nu), \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\ (\mu < \nu < \rho), \quad \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

образуют полный базис в алгебре $M(4, \mathbf{C})$. На этой теореме можно построить всю теорию 4-спиноров по аналогии с теорией 3-спиноров. Таким же образом получаем (21), где мы можем потребовать, чтобы $g \in SL(4, \mathbf{C})$. Тогда g определяется по Λ с точностью до знака. Отсюда следует, что спинорное представление для $O(1,3)$ двузначно. Однозначным представлением обладает группа $SL(2, \mathbf{C})$, из которой $O(1,3)$ получается факторизацией по $\{\pm 1\}$.