Лекция 13
Перенормировки в квантовой электродинамике

Рассмотрим затравочное действие спинорной электродинамики в D измерениях:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^D x\, F_{0,\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + \int d^D x\, \bar{\psi}_0 (i\hat{\partial} - \mu^{(4-D)/2} e_0 \hat{A} - m_0) \psi_0. \tag{1}$$

Эффективное действие включает также слагаемое, фиксирующее калибровку:

$$S_{\text{eff}} = S - \frac{1}{2\lambda_0} \int d^D x\, (\partial_\mu A_0^\mu)^2. \tag{1$'$}$$

Здесь необходимо определить матрицы γ^μ. Определим их как матрицы $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ со свойствами:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \qquad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \tag{2}$$

В большую часть интересных с физической точки зрения формул входят только следы γ-матриц, которые однозначно определяются этими соотношениями.

Задача. *Показать, что* $\operatorname{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$. *Подсказка: использовать* γ^5.

Задача. *Показать, что*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} 1 &= 2^{D/2}, \\
\operatorname{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu &= 2^{D/2} g^{\mu\nu}, \\
\operatorname{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 2^{D/2} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}).
\end{aligned}$$

Вообще, имеет место аналог теоремы Вика:

$$\operatorname{tr} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}} \gamma^{\mu_{2n}} = 2^{D/2} {\sum_\sigma}' (-)^\sigma g^{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)}} \dots g^{\mu_{\sigma(2n-1)} \mu_{\sigma(2n)}}, \tag{3}$$

где сумма берется по всем перестановкам, отвечающим различным спариваниям.

Эти правила можно применять при вычислении следов в фермионных петлях. Кроме того, в любой размерности сохраняется калибровочная инвариантность теории. Следовательно, размерная регуляризация дает калибровочно-инвариантную регуляризацию квантовой электродинамики.

Нам нужно вычислить функциональный интеграл

$$Z[J, \zeta, \bar{\zeta}] = \int DA_0\, D\psi_0\, D\bar{\psi}_0\, e^{iS_{\text{eff}}[A_0, \psi_0, \bar{\psi}_0] + iZ_A^{-1/2}(J, A_0) - iZ_\psi^{-1/2}(\bar{\psi}_0, \zeta) + iZ_\psi^{-1/2}(\bar{\zeta}, \psi_0)}. \tag{4}$$

Здесь Z_A и Z_ψ — несущественные константы, которые мы зафиксируем ниже. Давайте сделаем в функциональном интеграле замену переменных

$$\psi_0(x) \to e^{-i\chi(x)} \psi_0(x), \qquad \bar{\psi}_0(x) \to e^{i\chi(x)} \bar{\psi}_0(x).$$

Это *не* калибровочное преобразование, хотя и похоже на него, поэтому действие нетривиально преобразуется при этом преобразовании. Якобиан такой замены равен, очевидно, единице, поэтому

$$Z[J, \zeta, \bar{\zeta}] = \int DA_0\, D\psi_0\, D\bar{\psi}_0\, e^{iS_{\text{eff}}[A_0, \psi_0, \bar{\psi}_0] + i\int d^D x\, \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 \cdot \partial_\mu \chi + iZ_A^{-1/2}(J, A_0) - iZ_\psi^{-1/2}(\bar{\psi}_0 e^{i\chi}, \zeta) + iZ_\psi^{-1/2}(\bar{\zeta}, e^{-i\chi} \psi_0)}. \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5) и считая $\chi(x)$ малым, получим

$$\int d^D x\, \langle \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu \psi_0(x) \partial_\mu \chi(x) - iZ_\psi^{-1/2} \bar{\psi}_0(x) \zeta(x) \chi(x) - iZ_\psi^{-1/2} \bar{\zeta}(x) \psi_0(x) \chi(x) \rangle_{J, \zeta, \bar{\zeta}} = 0.$$

Перекидывая производную по частям и учитывая произвольность $\chi(x)$, получим

$$\langle \partial_\mu j^\mu(x) + i\bar\psi(x)\zeta(x) + i\bar\zeta(x)\psi(x)\rangle_{J,\zeta,\bar\zeta} = 0, \qquad j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi, \tag{6}$$

где $\psi(x) = Z_\psi^{-1/2}\psi_0(x)$, $\bar\psi(x) = Z_\psi^{-1/2}\bar\psi_0(x)$. Это просто квантовая версия закона сохранения электрического заряда: $\partial_\mu j^\mu(x)$ отлично от нуля только в точках, где есть источники заряженных частиц ζ и $\bar\zeta$. Варьируя по ζ, $\bar\zeta$, легко найти, что

$$\langle(\partial_\mu j^\mu)(x) X(y,z)\rangle = -\left(\sum_i \delta(x-y_i) - \sum_j \delta(x-z_j)\right)\langle X(y,z)\rangle, \qquad X(y,z) = Y[A]\prod_i \psi(y_i)\prod_j \bar\psi(z_j), \tag{6$'$}$$

где $Y[A]$ — любой функционал от $A_\mu = Z^{-1/2}A_{0,\mu}$.

Рассмотрим теперь другую замену, связанную с калибровочным преобразованием,

$$\psi_0(x) \to e^{-ie_0\chi(x)}\psi_0(x), \qquad \bar\psi_0(x) \to e^{ie_0\chi(x)}\bar\psi_0(x), \qquad A_{0,\mu} \to A_{0,\mu} + \partial_\mu\chi.$$

В этом случае мы получим

$$\langle \lambda_0^{-1}\partial^2(\partial_\mu A_0^\mu) + Z_A^{-1/2}\partial_\mu J^\mu + ie_0\bar\zeta\psi + ie_0\bar\psi\zeta\rangle_{J,\zeta,\bar\zeta} = 0.$$

Но по определению эффективного действия $\Gamma[A,\psi,\bar\psi]$ имеем

$$J^\mu = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu}, \qquad \zeta = -\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\Gamma, \qquad \bar\zeta = -\frac{\delta}{\delta\psi}\Gamma,$$

где теперь A_μ, ψ, $\bar\psi$ — классические поля (т. е. средние в присутствии токов), а не переменные интегрирования. Отсюда

$$\frac{Z_A^{1/2}}{\lambda_0}\partial^2(\partial_\mu A^\mu) - Z_A^{-1/2}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu}\Gamma - ie_0\left(\frac{\delta}{\delta\psi}\Gamma\right)\psi - ie_0\bar\psi\left(\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\Gamma\right) = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя это m раз по $\psi(y_i)$ и n раз по $\bar\psi(z_j)$ $(m+n>0)$ и полагая $A=\psi=\bar\psi=0$, мы избавляемся от первого слагаемого и получаем набор *тождеств Уорда*

$$-iZ_A^{-1/2}\partial_\mu\Gamma(x;y;z) = e_0\left(\sum_i \delta(x-y_i) - \sum_j \delta(x-z_j)\right)\Gamma(y;z). \tag{7$'$}$$

Давайте рассмотрим теперь общий вид перенормировок в спинорной электродинамике:

$$S_{\text{eff}}[A,\psi,\bar\psi] = -\frac{Z_A}{4}\int d^Dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{Z_A}{2Z_\lambda\lambda}\int d^Dx\,(\partial_\mu A^\mu) + Z_\psi\int d^Dx\,\bar\psi(\hat\partial - Z_\alpha^{1/2}Z_A^{1/2}\mu^{(4-D)/2}e\hat A - Z_m m)\psi, \tag{8}$$

где константы перенормировки Z_A, Z_ψ, Z_α, Z_m, Z_λ определены так, чтобы

$$A_{0,\mu} = Z_A^{1/2}A_\mu, \qquad \psi_0 = Z_\psi^{1/2}\psi, \qquad \bar\psi_0 = Z_\psi^{1/2}\bar\psi, \qquad e_0^2 = Z_\alpha e^2, \qquad m_0 = Z_m m, \qquad \lambda_0 = Z_\lambda\lambda. \tag{9}$$

Теперь введем условия перенормировки. Определим точные пропагаторы $G(p)$, $D_{\mu\nu}(k)$ и вершинную функцию $\Gamma^\mu(p,p')$ равенствами

$$\langle\psi(x)\bar\psi(x')\rangle = \int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,G(p)e^{-ip(x-x')}, \tag{10a}$$

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(x')\rangle = \int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,D_{\mu\nu}(k)e^{-ip(x-x')}, \tag{10b}$$

$$\langle\psi(x)A^\mu(y)\bar\psi(x')\rangle = -e\int\frac{d^Dp\,d^Dp'}{(2\pi)^{2D}}\,G(p)D_{\mu\nu}(p'-p)\Gamma^\nu(p,p')G(p')e^{-ip(x-y)-ip'(y-x')}. \tag{10c}$$

Тогда можно принять условия перенормировки

$$G^{-1}(p) = -i(\hat{p} - m) + o(\hat{p} - M), \qquad \hat{p} \to M, \tag{11a}$$

$$D^{-1}(k) = i(g^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda^{-1})k^\mu k^\nu) + o(k^2 - M'^2), \qquad p^2 \to M'^2. \tag{11b}$$

$$\Gamma^\mu(p,p')\gamma^\mu + o(1), \qquad p^2, p'^2 \to M^2, \quad (p'-p)^2 \to M'^2. \tag{11c}$$

Обычно полагают $M = m$, $M' = 0$, однако в некоторых случаях удобны другие значения.

Подставляя теперь в (10c) простейшее тождество Уорда с $m = n = 1$, получаем

$$-i(p'-p)_\mu G(p)\Gamma^\mu(p,p')G(p') = G(p) - G(p')$$

или

$$-iZ_A^{-1/2}Z_\alpha^{-1/2}(p'-p)_\mu\Gamma^\mu(p,p') = G^{-1}(p') - G^{-1}(p). \tag{12}$$

При $p' \to p$ получаем

$$iZ_A^{-1/2}Z_\alpha^{-1/2}\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\mu} = \Gamma^\mu(p,p). \tag{12$'$}$$

Задача. *Получить для величины Γ'^μ, заданной соотношением*

$$\langle\psi(x)j^\mu(y)\bar{\psi}(x')\rangle = \int\frac{d^Dp\,d^Dp'}{(2\pi)^{2D}}\,G(p)\Gamma'^\mu(p,p')G(p')e^{-ip(x-y)-ip'(y-x')},$$

тождество, аналогичное (12):

$$-i(p'-p)_\mu\Gamma'^\mu(p,p') = G^{-1}(p') - G^{-1}(p).$$

Как связаны функции Γ^μ и Γ'^μ? (Они не совпадают.)

Из (12) и условий перенормировки (11) следует, что

$$Z_\alpha = Z_A^{-1}. \tag{13}$$

Сравнивая с действием (8), мы видим, что это условие эквивалентно отсутствию перенормировки калибровочного преобразования. Напишем соотношение (12) для неперенормированных функций:

$$-i(p'-p)_\mu\Gamma_0^\mu(p,p') = G_0^{-1}(p') - G_0^{-1}(p). \tag{12$''$}$$

Мы видим, что расходимости для Γ_0 полностью определяются расходимостями для G_0, и, следовательно, устраняются теми же самыми контрчленами. Поэтому произведение $Z_\alpha Z_A$ можно сделать конечным и положить единицы подходящим выбором констант.

Эффективное действие разбивается следующим образом:

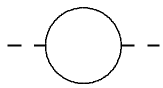
$$S_{\text{eff}}[A,\psi,\bar{\psi}] = S_{\text{eff},0}[A,\psi,\bar{\psi}] + S_{\text{eff},1}[A,\psi,\bar{\psi}] + S_{\text{eff,contr}}[A,\psi,\bar{\psi}].$$

Здесь

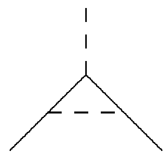
$$\begin{aligned}
S_{\text{eff},0}[A,\psi,\bar{\psi}] &= -\frac{1}{4}\int d^Dx\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\lambda}\int d^Dx\,(\partial_\mu A^\mu)^2 + \int d^Dx\,\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi,\\
S_{\text{eff},1}[A,\psi,\bar{\psi}] &= -e\int d^Dx\,\bar{\psi}\hat{A}\psi,\\
S_{\text{eff,contr}} &= -\frac{Z_A - 1}{4}\int d^Dx\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{Z_A Z_\lambda^{-1} - 1}{2\lambda}\int d^Dx\,(\partial_\mu A^\mu)^2\\
&\quad + \int d^Dx\,\bar{\psi}((Z_\psi - 1)i\hat{\partial} - (Z_\psi Z_m - 1)m)\psi\\
&\quad - (Z_\psi - 1)e\int d^Dx\,\bar{\psi}\hat{A}\psi.
\end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос о перенормировке в электродинамике наивно. Простейшие расходимости имеются в следующих диаграммах:

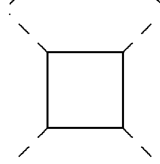
$I(D) = D - 3 \qquad I(4) = 1 \to 0$



$I(D) = D - 2, \qquad I(4) = 2$



$I(D) = D - 4 \qquad I(4) = 0$



$I(D) = D - 4 \qquad I(4) = 0$

В четырех измерениях вторая диаграмма фактически расходится логарифмически, а сумма диаграмм последнего типа конечна. Первая диаграмма требует двух контрчленов, вторая — одного, третья не вносит ничего нового из-за тождества Уорда. Теперь рассмотрим изменение индекса при изменении числа петель. Новые петли можно добавлять, добавляя фотонные линии. Добавление одной фотонной линии увеличивает число петель на одну ($\Delta I = D$), число фотонных пропагаторов — на один ($\Delta I = -2$) и число электронных пропагаторов — на два ($\Delta I = -2$). Следовательно, индекс расходимости меняется на $D - 4$. При $D > 4$ теория неперенормируема, при $D = 4$ — перенормируема, а при $D < 4$ — суперперенормируема.