Лекция 3
Корреляционные функции в конформных моделях.

Рассмотрим конформную теорию с центральным зарядом $c<1$ или $c>25$. Пусть $\phi(x)$ — первичное поле размерности
$$\Delta=\tfrac{1}{16}\big(5-c\pm\sqrt{(c-1)(c-25)}\big).$$
В этом случае имеется нулевой вектор
$$|\chi\rangle=\left(L_{-2}-\frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^2\right)|\Delta\rangle.$$
Это значит, что поле $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению
$$\left(\mathcal{L}_{-2}-\frac{3}{2(2\Delta+1)}\mathcal{L}_{-1}^2\right)\phi(z)=0. \tag{1}$$
Легко проверить, что
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-1}\phi(x)&=\oint\frac{dw}{2\pi i}\,T(w)\phi(z)=[L_{-1},\phi(x)]=\partial\phi(x),\\ \mathcal{L}_{-1}^2\phi(x)&=\oint\frac{dw}{2\pi i}\,T(w)\partial\phi(z)=[L_{-1},\partial\phi(x)]=\partial[L_{-1},\phi(x)]=\partial^2\phi(x).\end{aligned}$$
Несколько сложнее ситуация с $\mathcal{L}_{-2}$. В $\mathcal{L}_{-2}\phi$ дает вклад регулярная часть операторного разложения, так что это — новый оператор. Обойдем эту трудность следующим образом. Рассмотрим корреляционную функцию $\langle\mathcal{L}_{-2}\phi(x)\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle$, где $\Phi_i(x_i)$ — первичные поля размерностей Δ_i, и попробуем утащить контур интегрирований на бесконечность, протаскивая его через полюсы второго порядка в точках x_i. С помощью операторных разложений для $T(w)\Phi(x_i)$ получим
$$\begin{aligned}\langle\mathcal{L}_{-2}\phi(x)\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle&=\oint\frac{dw}{2\pi i(w-z)}\langle T(w)\phi(x)\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle\\ &=-\sum_{i=1}^N\oint_{C_i}\frac{dw}{2\pi i(w-z)}\left(\frac{\Delta_i}{(w-z_i)^2}+\frac{1}{w-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\langle\phi(x)\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle\\ &=\sum_{i=1}^N\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\langle\phi(x)\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle\end{aligned}$$
Мы видим, что существование нуль-вектора приводит к дифференциальному уравнению для корреляционной функции:
$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{2(2\Delta+1)}{3}\sum_{i=1}^N\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right\}\langle\phi(x)\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle=0 \tag{2}$$
Давайте воспользуемся этим дифференциальным уравнением, чтобы найти операторные разложения первичных полей. Пусть $z\to z_i$. В этом пределе уравнение примет вид
$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{2(2\Delta+1)}{3}\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right\}\phi(x)\Phi_i(x_i)=0$$
Будем решать уравнение в виде $(z-z_i)^{-\lambda}$. Тогда мы получим уравнение на λ:
$$\lambda(\lambda+1)=\frac{2(2\Delta+1)}{3}(\Delta_i+\lambda).$$

У нас есть два решения:

$$\lambda_\pm = \frac{4\Delta - 1}{6} \pm \sqrt{\frac{(4\Delta-1)^2}{36} + \frac{2\Delta_i(2\Delta+1)}{3}}.$$

Прежде чем интерпретировать это решение, введем удобную параметризацию. Положим

$$c = 1 - 12\alpha_0, \qquad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 2}. \tag{3}$$

Конформные размерности Δ_i запишем в виде

$$\Delta_i = \Delta(\alpha_i) = \frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i - 2\alpha_0), \qquad \Delta = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0).$$

Тогда решение уравнения для Δ имеет простой вид

$$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_\pm.$$

Тогда

$$\lambda = \Delta + \Delta_i - \Delta_i',$$

причем

$$\alpha_{i\pm}' = \alpha_i \pm \alpha. \tag{4}$$

Это значит, что в операторное разложение $\phi(x)\Phi_i(x_i)$ входят слагаемые, пропорциональные

$$z^{\Delta+\Delta_i-\Delta_{i\pm}'}\Phi_{i\pm}'(x_i),$$

где Φ_i' — поля размерности $\Delta_{i\pm}'$. Символически это можно записать так:

$$[\phi]\cdot[\Phi] \sim [\Phi_+] + [\Phi_-]. \tag{5}$$

Рассмотрим более подробно случай свободного фермиона $c = 1/2$ ($\alpha_0 = 1/2\sqrt{6}$, $\alpha_+ = 2\sqrt{2/3}$, $\alpha_- = -\sqrt{3/2}$, $\Delta(-\frac{1}{2}\alpha_+) = 1/2$, $\Delta(-\frac{1}{2}\alpha_-) = 1/16$). Мы знаем, что в теории есть поля ψ размерности $(1/2, 0)$ и $\bar\psi$ размерности $(0, 1/2)$. В операторном разложении $\psi(z')\psi(z)$ согласно (5), (4) могут возникнуть поля размерностей $(0,0)$ и $(5/3, 0)$. Поле размерности 0 действительно присутствует. Поле размерности $(5/3, 0)$ выпадает. В операторном разложении $\psi(z')\bar\psi(\bar z)$ может быть первичное поле только размерности $(1/2, 1/2)$ (поле $\varepsilon = \psi\bar\psi$), так как поле $\bar\psi$ удовлетворяет уравнению $\partial\bar\psi = 0$, имеющему только одно решение — константу по z.

Пусть теперь $\sigma(x)$ — поле размерности $1/16$, которое тоже удовлетворяет уравнению второго порядка. Рассмотрим операторное произведение $\psi(z')\sigma(x)$. Если мы примем ψ за ϕ, а σ за Φ, то мы получим, что в этом операторном произведении могут быть первичные поля размерности $1/16$ и $35/48$. Если мы наоборот примем ψ за Φ, а σ за ϕ, то получим, что допустимы размерности $1/16$ и $63/48$. Это значит, что в операторном произведении может возникнуть только поле размерности $1/16$. Обозначим это поле через $\mu(x)$. Итак, мы получили операторное разложение

$$\psi(z')\sigma(x) \sim (z'-z)^{-1/2}(\mu(x) + O(z'-z)).$$

Отметим, что это значит, что поля ψ и σ не взаимно-локальны. При обходе z' вокруг z по замкнутому контуру знак операторного произведения (и соответствующих корреляционных функций) меняется. В пространстве Минковского это значит, что если поля $\psi(x'^1)$ и $\sigma(x^1)$ (взятые в один и тот же момент времени) коммутируют, скажем, при $x'^1 < x^1$, то они антикоммутируют при $x'^1 > x^1$. Однако если положить

$$\bar\psi(\bar z')\mu(x) \sim (\bar z' - \bar z)^{-1/2}(\sigma(x) + O(\bar z' - \bar z)),$$

то $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ будут бесспиновыми полями размерности $(1/16, 1/16)$, каждое из которых взаимно-локально с $\varepsilon(x)$. Рассмотрим произведение $\sigma(x_1)\psi(z_2)\sigma(x_3)$. Если x_1 обходит вокруг x_2 и x_3, то произведение меняет знак. Но последние два оператора дают $\mu(x)$ в операторном произведении. Это значит, что $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ не взаимно-локальны. Естественно предположить операторную алгебру

$$\psi(z')\sigma(x) = C(z'-z)^{-1/2}\mu(x) + O((z'-z)^{1/2}), \tag{6a}$$
$$\bar\psi(\bar z')\sigma(x) = C^*(\bar z'-\bar z)^{-1/2}\mu(x) + O((\bar z'-\bar z)^{1/2}), \tag{6b}$$
$$\psi(z')\mu(x) = C'(z'-z)^{-1/2}\sigma(x) + O((z'-z)^{1/2}), \tag{6c}$$
$$\bar\psi(\bar z')\mu(x) = C'^*(\bar z'-\bar z)^{-1/2}\sigma(x) + O((\bar z'-\bar z)^{1/2}), \tag{6d}$$
$$\sigma(x')\sigma(x) = C_1|x'-x|^{-1/4} + C_2|x'-x|^{3/4}\varepsilon(x) + O((z'-z)^{7/8}, (\bar z'-\bar z)^{7/8}), \tag{6e}$$
$$\begin{aligned}\mu(x')\sigma(x) = {}& C_3(z'-z)^{3/8}(\bar z'-\bar z)^{-1/8}\psi(z)\\ &+ C_4(z'-z)^{-1/8}(\bar z'-\bar z)^{3/8}\bar\psi(\bar z) + O((z'-z)^{7/8}, (\bar z'-\bar z)^{7/8}),\end{aligned} \tag{6f}$$
$$\mu(x')\mu(x) = C_1'|x'-x|^{-1/4} + C_2'|x'-x|^{3/4}\varepsilon(x) + O((z'-z)^{7/8}, (\bar z'-\bar z)^{7/8}), \tag{6g}$$

Коэффициенты C, C', $C_1, \ldots$ называются *структурными константами* теории (ниже мы дадим более аккуратное и общее определение структурных констант). Вычисление структурных констант составляет основное содержание конформной теории поля.

Прежде всего, найдем рецепт вычисления первых производных от четырехточечных корреляционных функций для $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$. Вообще говоря, из Мебиус-инвариантности имеем для произвольной корреляционной функции G:

$$\sum \partial_i G = 0, \qquad \sum (z_i\partial_i + \Delta_i)G = 0, \qquad \sum (z_i^2\partial_i + 2\Delta_i z_i)G = 0.$$

Подставляя сюда $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = 1$, $z_4 = Z$, получим

$$\begin{aligned}&(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \partial_4)G = 0,\\ &(z\partial_2 + \partial_3 + Z\partial_4)G = -(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)G,\\ &(z^2\partial_2 + \partial_3 + Z^2\partial_4)G = -(2z\Delta_2 + 2\Delta_3 + 2Z\Delta_4)G.\end{aligned}$$

Из второго уравнения видим, что в ведущем порядке $Z\partial_4 G = -2\Delta_4 G$. После этого остальные уравнения легко решить в пределе $Z \to \infty$:

$$\begin{aligned}&\partial_1 G = -(1-z)\partial G + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4)G,\\ &\partial_3 G = -z\partial G - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4)G,\\ &\partial_4 G = 0.\end{aligned}$$

Вооружившись этим приемом, обратимся к четырехточечным корреляционным функциям.

Рассмотрим четырехточечную корреляционную функцию

$$\langle\sigma(x_4)\sigma(x_3)\sigma(x_2)\sigma(x_1)\rangle = \left(\frac{|x_1-x_2|\cdot|x_3-x_4|}{|x_1-x_3|\cdot|x_2-x_4|}\right)^{1/4} Y(z,\bar z),$$

где

$$z = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}.$$

Уравнение второго порядка на эту функцию имеет вид

$$\left(\frac{4}{3}\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right)\frac{d}{dz}\right) Y(z,\bar z) = 0.$$

Имеется такое же уравнение по $\bar{z}$. Забудем временно о $\bar{z}$. Будем искать аналитическое решение этого уравнения $F(z)$. Исключим сингулярности в точках $x=0$ и $x=1$ заменой

$$F(z) = z^{-1/8}(1-z)^{-1/8}u(z).$$

Уравнение примет вид

$$z(1-z)u'' + (\tfrac{1}{2} - x)u' + \tfrac{1}{16}u = 0.$$

Это частный случай гипергеометрического уравнения. В данном частном случае его можно решить с помощью замены переменных:

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{4}\right) u(z) = 0, \qquad z = \sin^2\theta.$$

Имеется два линейно-независимых решения

$$\begin{aligned} F_1(z) &= z^{-1/8}(1-z)^{-1/8}\cos\tfrac{1}{2}\theta, \\ F_2(z) &= z^{-1/8}(1-z)^{-1/8}\sin\tfrac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

В пределе $z \to 0$ имеем

$$\begin{aligned} F_1(z) &= z^{-1/8}(1+O(z)), \\ F_2(z) &= \tfrac{1}{2}z^{3/8}(1+O(z)). \end{aligned} \tag{7}$$

Найдем решение $Y(z,\bar{z})$ такое, что при обходе x вокруг точки 0 функция остается однозначной. Это решение имеет вид

$$Y(z,\bar{z}) = X_1 F_1(z)\overline{F_1(z)} + X_2 F_2(z)\overline{F_2(z)}. \tag{8}$$

Решение все еще зависит от двух произвольных постоянных X_1 и X_2. Очевидно, что $Y(1-z, 1-\bar{z})$ удовлетворяет тому же уравнению. Выразим решения $F_i(z)$ через $F_i(1-z)$. При $z \to 1$ имеем

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{(1-z)^{-1/8}}{\sqrt{2}} - \frac{(1-z)^{3/8}}{2\sqrt{2}} + O((1-z)^{7/8}), \\ F_2(z) &= \frac{(1-z)^{-1/8}}{\sqrt{2}} + \frac{(1-z)^{3/8}}{2\sqrt{2}} + O((1-z)^{7/8}). \end{aligned}$$

Сравнивая с (7), получаем

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1(1-z) + F_2(1-z)), \\ F_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1(1-z) - F_2(1-z)). \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим это в (8):

$$\begin{aligned} Y(z,\bar{z}) = {} & \frac{X_1+X_2}{2}F_1(1-z)\overline{F_1(1-z)} + \frac{X_1+X_2}{2}F_2(1-z)\overline{F_2(1-z)} \\ & + \frac{X_1-X_2}{2}F_1(1-z)\overline{F_2(1-z)} + \frac{X_1-X_2}{2}F_2(1-z)\overline{F_1(1-z)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Чтобы корреляционная функция была однозначна по отношению к обходу z вокруг 1, необходимо, чтобы последние два члена равнялись нулю. Следовательно, $X_2 = X_1$. Кроме того, нормируем $\sigma(x)$ условием

$$\langle \sigma(x')\sigma(x) \rangle = \frac{1}{|x'-x|^{1/4}}.$$

Отсюда $X_1 = 1$. Итак

$$Y(z,\bar{z}) = |F_1(z)|^2 + |F_2(z)|^2 = |F_1(1-z)|^2 + |F_2(1-z)|^2 = |z(1-z)|^{-1/4}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\bar{\theta}). \tag{11}$$

Рассмотрим опять предел $z \to 0$. Из (7) и (11) получаем

$$Y(z,\bar{z}) = |x|^{-1/4} + \frac{1}{4}|x|^{3/4} + \cdots.$$

Чтобы понять смысл этого разложения, запишем[a]

$$\begin{aligned}\langle\sigma(\infty,\infty)\sigma(1,1)\sigma(z,\bar{z})\sigma(0,0)\rangle &\simeq \langle(C_1 + C_2\varepsilon(\infty,\infty))(C_1|x|^{-1/4} + C_2|x|^{3/4}\varepsilon(0,0))\rangle \\ &= C_1^2|x|^{1/4} + C_2^2|x|^{3/4}\langle\varepsilon(\infty,\infty)\varepsilon(0,0)\rangle \\ &= C_1^2|x|^{1/4} + C_2^2|x|^{3/4},\end{aligned}$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = 1/2$.

Теперь рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle\mu(x_4)\mu(x_3)\sigma(x_2)\sigma(x_1)\rangle = (|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - x_4|)^{-1/4}\tilde{Y}(z,\bar{z}).$$

Поскольку $\mu(x)$ имеет ту же размерность, что и $\sigma(x)$, функция $\tilde{Y}(z,\bar{z})$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $Y(z,\bar{z})$. Это значит, что она выражается через те же самые решения $F_i(z)$. Однако $\tilde{Y}$ должна быть однозначной при обходе вокруг 0 менять знак при обходе z вокруг 1. Первое условие выполняется тем же способом:

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = \tilde{X}_1 F_1(z)\overline{F_1(z)} + \tilde{X}_2 F_2(z)\overline{F_2(z)}. \tag{12}$$

Чтобы выполнить второе условие, надо потребовать, чтобы в (10) занулялись первые два слагаемых, а не последние. Это значит, что $\tilde{X}_2 = -\tilde{X}_1$. Та же нормировка дает $\tilde{X}_1 = 1$. Отсюда

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = |F_1(z)|^2 - |F_2(z)|^2 = F_1(1-z)\overline{F_2(1-z)} + F_2(1-z)\overline{F_1(1-z)} = |x(1-x)|^{-1/4}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\bar{\theta}), \tag{13}$$

В пределе $z \to 0$

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = |z|^{-1/4} - \frac{1}{4}|z|^{3/4} + \cdots$$

и мы получаем $C'_1 = 1 = C_1$, $C'_2 = -C_2 = -1/2$. В пределе $z \to 1$ имеем

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = \tfrac{1}{2}(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8} + \tfrac{1}{2}(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8} + \cdots.$$

Сравнивая с

$$\begin{aligned}\langle\mu(\infty,\infty)\mu(1,1)\sigma(z,\bar{z})\sigma(0,0)\rangle &\simeq \langle(C_3\psi(\infty) + C_4\bar{\psi}(\infty)) \\ &\quad\times (C_3(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8}\psi(1) + C_4(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8}\bar{\psi}(1))\rangle \\ &= C_3^2(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8}\langle\psi(\infty)\psi(1)\rangle \\ &\quad + C_4^2(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8}\langle\bar{\psi}(\infty)\bar{\psi}(1)\rangle \\ &= C_3^2(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8} - C_4^2(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8},\end{aligned}$$

получаем $C_3 = 1/\sqrt{2}$, $C_4 = i/\sqrt{2}$.

Чтобы найти все структурные константы, осталось вычислить корреляционные функции

$$\begin{aligned}G(z) &= \langle\sigma(\infty,\infty)\psi(1)\psi(z)\sigma(0,0)\rangle, \\ G'(z) &= \langle\mu(\infty,\infty)\psi(1)\psi(z)\mu(0,0)\rangle.\end{aligned}$$

Наличие в каждом корреляторе двух полей разной размерности приводит к двум уравнениям второго порядка. Если сложить их с подходящими коэффициентами, то вторые производные сократятся и получится одно уравнение первого порядка. Выводить такое уравнение довольно громоздко, поэтому мы

[a] По определению $\phi(\infty,\infty) = \lim_{Z\to\infty} Z^{2\Delta}\bar{Z}^{2\bar{\Delta}}\sigma(Z,\bar{Z})$. При выводе формулы надо использовать инверсию.

найдем эти корреляторы более простым способом. Давайте рассмотрим сначала обычный коррелятор $\langle\psi(z')\psi(z)\rangle$. Давайте разложим $\psi(z)$ по целым степеням z:

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} b_n z^{-n-1/2}, \qquad \{b_m, b_n\} = \delta_{m+n,0}.$$

Введем вакуум $|0\rangle$ условием

$$b_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0).$$

Тогда

$$\langle 0|\psi(z')\psi(z)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^n z'^{-n-1} = \frac{1}{z'-z}.$$

Теперь мы хотим рассмотреть вакуум $|\sigma\rangle$, порожденный оператором $\sigma(0)$, т. е. такой, при обходе вокруг которого знак фермиона меняется. Для этого надо разложить фермион по полуцелым степеням z:

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n z^{-n-1/2}, \qquad \{c_m, c_n\} = \delta_{m+n,0}.$$

Потребуем, чтобы

$$c_n|\sigma\rangle = 0 \quad (n > 0).$$

Учитывая, что $c_0^2 = \frac{1}{2}\{c_0, c_0\} = \frac{1}{2}$, получаем

$$\langle\sigma|\psi(z')\psi(z)|\sigma\rangle = \frac{1}{2(zz')^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1/2} z'^{-n-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(zz')^{1/2}}\frac{z'+z}{z'-z}.$$

Очевидно, что

$$G(z) = \langle\sigma|\psi(1)\psi(z)|\sigma\rangle = \frac{1}{2z^{1/2}}\frac{1+z}{1-z}. \tag{14}$$

Отсюда $C = 1/\sqrt{2}$. Отсюда $|\mu\rangle = \sqrt{2}c_0|\sigma\rangle$ и $G'(z) = G(z)$, $C' = C$.

Подытожим все сказанное. Теорию свободного фермиона можно описать тремя наборами взаимно-локальных полей. Первый набор — фермионный набор $(1, \psi, \bar\psi, \varepsilon)$ и их потомки (соответствующие вторичные поля, порождаемые операторами $\mathcal{L}_n$):

$$\begin{aligned}
\psi(z')\psi(z) &= \frac{1}{z'-z} + 2T(z) + O(z'-z),\\
\bar\psi(z')\bar\psi(z) &= -\frac{1}{\bar z'-\bar z} - 2\bar T(\bar z) + O(z'-z),\\
\psi(z')\bar\psi(\bar z) &= \varepsilon(z,\bar z) + O(1),\\
\psi(z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{\bar\psi(\bar z)}{z'-z} + O(1),\\
\bar\psi(\bar z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{\psi(z)}{\bar z'-\bar z} + O(1),\\
\varepsilon(z',\bar z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{1}{|z'-z|^2} + 2T(z) + 2\bar T(\bar z) + O(z'-z, \bar z'-\bar z).
\end{aligned} \tag{15}$$

В первых двух и в последней строчках для полноты картины выписаны сублидирующие члены, содержащие тензор энергии-импульса. Другой набор, связанный с параметром порядка модели Изинга, имеет вид $(1, \sigma, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(z',\bar z')\sigma(z,\bar z) &= \frac{1}{|z'-z|^{1/4}} + \frac{1}{2}|z'-z|^{3/4}\varepsilon(z,\bar z) + O(1),\\
\varepsilon(z',\bar z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{1}{|z'-z|^2} + O(1),\\
\varepsilon(z',\bar z')\sigma(z,\bar z) &= \frac{1/2}{|z'-z|}\sigma(z,\bar z) + O(1).
\end{aligned} \tag{16}$$

Третий набор $(1, \mu, \varepsilon)$ содержит параметр беспорядка модели Изинга. Его операторные разложения совершенно аналогичны и получаются заменой $\sigma \to \mu$, $\varepsilon \to -\varepsilon$. Каждый из этих наборов вполне описывает модель.

Здесь выписаны только операторные разложения для первичных полей, поскольку операторные разложения их потомков однозначно определены этими разложениями и разложениями с тензором энергии-импульса.

Эти три набора устанавливают эквивалентность между моделью свободных фермионов и моделью Изинга в критической точке в скейлинговом пределе. Вне критической точки эти наборы дают различное описание в терминах частиц. Например, выше критической точки поле σ описывает скалярные нейтральные бозоны со взаимодействием, причем матрица рассеяния факторизуется на парные амплитуды рассеяния, равные -1. Можно показать, что статистика таких бозонов в точности воспроизводит статистику Ферми. Поле μ в этом случае имеет ненулевое среднее и не допускает интерпретации в терминах частиц. На самом деле в двумерном пространстве-времени вообще нельзя говорить о бозонах и фермионах. Одни и те же возбуждения можно рассматривать и как бозоны, и как фермионы, но с различной матрицей рассеяния. В случае факторизующейся матрицы рассеяния (интегрируемые модели) парная матрица рассеяния фермионов отличается от матрицы рассеяния бозонов знаком.