

## Лекция 9. Излучение гравитационных волн

Михаил Лашкевич

# Запаздывающее решение и запаздывающая функция Грина

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

# Запаздывающее решение и запаздывающая функция Грина

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

- 1 Постоянный «продольный» вклад  $\psi_{00} = AR^{3-d}$ ,  $\psi_{0i} = B^{ij} \partial_j R^{3-d}$ ,  
 $\psi_{ij} = 0$ .

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

- 1 Постоянный «продольный» вклад  $\psi_{00} = AR^{3-d}$ ,  $\psi_{0i} = B^{ij} \partial_j R^{3-d}$ ,  $\psi_{ij} = 0$ .
- 2 Переменный запаздывающий вклад  $\psi_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})R^{3-d}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ),  $M_{0\nu} + M_{i\nu}n^i = 0$ . Этот вклад может быть приведен к поперечному бесследовому виду ( $M_{0\nu} = 0$ ,  $M_{ij}X^j = 0$ ,  $M_{ii} = 0$ ) и неотличим от гравитационной волны.

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

- 1 Постоянный «продольный» вклад  $\psi_{00} = AR^{3-d}$ ,  $\psi_{0i} = B^{ij} \partial_j R^{3-d}$ ,  $\psi_{ij} = 0$ .
- 2 Переменный запаздывающий вклад  $\psi_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})R^{3-d}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ),  $M_{0\nu} + M_{i\nu}n^i = 0$ . Этот вклад может быть приведен к поперечному бесследовому виду ( $M_{0\nu} = 0$ ,  $M_{ij}X^j = 0$ ,  $M_{ii} = 0$ ) и неотличим от гравитационной волны.

Явное вычисление мы выполним для нерелятивистских частиц в размерности  $d = 4$ , но начнем с общего случая.

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

- 1 Постоянный «продольный» вклад  $\psi_{00} = AR^{3-d}$ ,  $\psi_{0i} = B^{ij} \partial_j R^{3-d}$ ,  $\psi_{ij} = 0$ .
- 2 Переменный запаздывающий вклад  $\psi_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})R^{3-d}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ),  $M_{0\nu} + M_{i\nu}n^i = 0$ . Этот вклад может быть приведен к поперечному бесследовому виду ( $M_{0\nu} = 0$ ,  $M_{ij}X^j = 0$ ,  $M_{ii} = 0$ ) и неотличим от гравитационной волны.

Явное вычисление мы выполним для нерелятивистских частиц в размерности  $d = 4$ , но начнем с общего случая.

Нас будет интересовать **запаздывающее** решение, то есть решение  $\psi_{\mu\nu}(x)$ , зависящее только от значений  $T_{\mu\nu}(x')$  при  $t' < t$ .

# Запаздывающее решение и запаздывающая функция Грина

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

- 1 Постоянный «продольный» вклад  $\psi_{00} = AR^{3-d}$ ,  $\psi_{0i} = B^{ij} \partial_j R^{3-d}$ ,  $\psi_{ij} = 0$ .
- 2 Переменный запаздывающий вклад  $\psi_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})R^{3-d}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ),  $M_{0\nu} + M_{i\nu}n^i = 0$ . Этот вклад может быть приведен к поперечному бесследовому виду ( $M_{0\nu} = 0$ ,  $M_{ij}X^j = 0$ ,  $M_{ii} = 0$ ) и неотличим от гравитационной волны.

Явное вычисление мы выполним для нерелятивистских частиц в размерности  $d = 4$ , но начнем с общего случая.

Нас будет интересовать **запаздывающее** решение, то есть решение  $\psi_{\mu\nu}(x)$ , зависящее только от значений  $T_{\mu\nu}(x')$  при  $t' < t$ .

Такое решение можно записать в виде

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -16\pi G \int_{-\infty}^t dt' \int d^{d-1}x' G^R(t - t', |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) T_{\mu\nu}(t', \mathbf{r}'), \quad (1)$$

где **запаздывающая функция Грина**  $G^R(t, \mathbf{r})$ ,

# Запаздывающее решение и запаздывающая функция Грина

Рассмотрим систему движущихся частиц в конечном объеме и изучим вынужденное гравитационное поле на больших расстояниях  $R = \sqrt{X^i X^i}$  с учетом запаздывания. На больших расстояниях будет два вклада:

- 1 Постоянный «продольный» вклад  $\psi_{00} = AR^{3-d}$ ,  $\psi_{0i} = B^{ij} \partial_j R^{3-d}$ ,  $\psi_{ij} = 0$ .
- 2 Переменный запаздывающий вклад  $\psi_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})R^{3-d}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ),  $M_{0\nu} + M_{i\nu}n^i = 0$ . Этот вклад может быть приведен к поперечному бесследовому виду ( $M_{0\nu} = 0$ ,  $M_{ij}X^j = 0$ ,  $M_{ii} = 0$ ) и неотличим от гравитационной волны.

Явное вычисление мы выполним для нерелятивистских частиц в размерности  $d = 4$ , но начнем с общего случая.

Нас будет интересовать **запаздывающее** решение, то есть решение  $\psi_{\mu\nu}(x)$ , зависящее только от значений  $T_{\mu\nu}(x')$  при  $t' < t$ .

Такое решение можно записать в виде

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -16\pi G \int_{-\infty}^t dt' \int d^{d-1}x' G^R(t - t', |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) T_{\mu\nu}(t', \mathbf{r}'), \quad (1)$$

где **запаздывающая функция Грина**  $G^R(t, \mathbf{r})$ , то есть решение уравнения

$$\square G^R(t, \mathbf{r}) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (2)$$

с начальным условием

$$G^R(t, \mathbf{r}) = 0 \text{ при } t < r. \quad (3)$$

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Это решение **недоопределено**, поскольку имеет особенность на «массовой поверхности»  $k^2 = 0$  и интеграл (4) неоднозначен.

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Это решение **недоопределено**, поскольку имеет особенность на «массовой поверхности»  $k^2 = 0$  и интеграл (4) неоднозначен. Иными словами, надо выбрать, как контур интегрирования по переменной  $k^0$  обходит полюсы  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$ .

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Это решение **недоопределено**, поскольку имеет особенность на «массовой поверхности»  $k^2 = 0$  и интеграл (4) неоднозначен. Иными словами, надо выбрать, как контур интегрирования по переменной  $k^0$  обходит полюсы  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$ .

Потребуем, чтобы интеграл обращался в нуль при  $t < 0$ .

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Это решение **недоопределено**, поскольку имеет особенность на «массовой поверхности»  $k^2 = 0$  и интеграл (4) неоднозначен. Иными словами, надо выбрать, как контур интегрирования по переменной  $k^0$  обходит полюсы  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$ .

Потребуем, чтобы интеграл обращался в нуль при  $t < 0$ . Множитель  $e^{-ik^0 t}$  стремится к нулю при  $t < 0$ , если  $\text{Im } k^0 \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

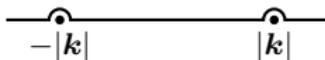
Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Это решение **недоопределено**, поскольку имеет особенность на «массовой поверхности»  $k^2 = 0$  и интеграл (4) неоднозначен. Иными словами, надо выбрать, как контур интегрирования по переменной  $k^0$  обходит полюсы  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$ .

Потребуем, чтобы интеграл обращался в нуль при  $t < 0$ . Множитель  $e^{-ik^0 t}$  стремится к нулю при  $t < 0$ , если  $\text{Im } k^0 \rightarrow +\infty$ . Если мы выберем контур, который обходит полюсы **сверху**, интеграл по нему обратится в нуль при  $t < 0$ :

$k^0$



Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (4)$$

С другой стороны,

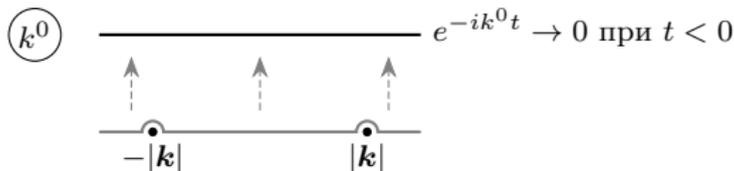
$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}. \quad (5)$$

Подставляя это в уравнение  $\square G^R(x) = \delta(x)$ , получаем

$$(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (6)$$

Это решение **недоопределено**, поскольку имеет особенность на «массовой поверхности»  $k^2 = 0$  и интеграл (4) неоднозначен. Иными словами, надо выбрать, как контур интегрирования по переменной  $k^0$  обходит полюсы  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$ .

Потребуем, чтобы интеграл обращался в нуль при  $t < 0$ . Множитель  $e^{-ik^0 t}$  стремится к нулю при  $t < 0$ , если  $\text{Im } k^0 \rightarrow +\infty$ . Если мы выберем контур, который обходит полюсы **сверху**, интеграл по нему обратится в нуль при  $t < 0$ :



При  $t > 0$  мы сдвигаем контур вниз



При  $t > 0$  мы сдвигаем контур вниз

The diagram illustrates the contour deformation in the complex plane for the retarded Green's function. A horizontal real axis is shown. On the left, a pole is marked with a circled  $k^0$ . To its right, a branch cut is indicated by a dashed line with a downward arrow, labeled  $-|k|$ . Further right, another branch cut is indicated by a dashed line with a downward arrow, labeled  $|k|$ . Two circular contours with arrows pointing clockwise are shown: one centered at the pole and another centered at the branch cut  $|k|$ . A solid horizontal line represents the contour path, which is shifted downwards for  $t > 0$ . The expression  $e^{-ik^0 t} \rightarrow 0$  при  $t > 0$  is written to the right of the axis.

$$e^{-ik^0 t} \rightarrow 0 \text{ при } t > 0$$

При  $t > 0$  мы сдвигаем контур вниз

и интеграл сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left( \operatorname{res}_{\omega=-|\mathbf{k}|} + \operatorname{res}_{\omega=|\mathbf{k}|} \right) \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|}. \quad (7)$$

При  $t > 0$  мы сдвигаем контур вниз

$e^{-ik^0 t} \rightarrow 0$  при  $t > 0$

и интеграл сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left( \operatorname{res}_{\omega=-|\mathbf{k}|} + \operatorname{res}_{\omega=|\mathbf{k}|} \right) \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|}. \quad (7)$$

В четном числе измерений  $d$  интеграл можно взять и функция  $G^R(x)$  имеет носитель на световом конусе  $x^2 = 0$ ,  $t \geq 0$  (кроме  $d = 2$ ). В нечетном числе измерений носитель содержит внутренность светового конуса:  $x^2 \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .

При  $t > 0$  мы сдвигаем контур вниз

$e^{-ik^0 t} \rightarrow 0$  при  $t > 0$

и интеграл сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left( \operatorname{res}_{\omega=-|\mathbf{k}|} + \operatorname{res}_{\omega=|\mathbf{k}|} \right) \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|}. \quad (7)$$

В четном числе измерений  $d$  интеграл можно взять и функция  $G^R(x)$  имеет носитель на световом конусе  $x^2 = 0$ ,  $t \geq 0$  (кроме  $d = 2$ ). В нечетном числе измерений носитель содержит внутренность светового конуса:  $x^2 \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . При  $d = 4$  запаздывающая функция Грина имеет простой вид

$$G^R(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r}. \quad (8)$$

При  $t > 0$  мы сдвигаем контур вниз

$e^{-ik^0 t} \rightarrow 0$  при  $t > 0$

и интеграл сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left( \operatorname{res}_{\omega=-|\mathbf{k}|} + \operatorname{res}_{\omega=|\mathbf{k}|} \right) \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|}. \quad (7)$$

В четном числе измерений  $d$  интеграл можно взять и функция  $G^R(x)$  имеет носитель на световом конусе  $x^2 = 0$ ,  $t \geq 0$  (кроме  $d = 2$ ). В нечетном числе измерений носитель содержит внутренность светового конуса:  $x^2 \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . При  $d = 4$  запаздывающая функция Грина имеет простой вид

$$G^R(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r}. \quad (8)$$

Соответственно, для гравитационных потенциалов имеем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (9)$$

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Будем рассматривать гравитационные потенциалы в **волновой зоне**, то есть на большом расстоянии  $R$  от системы:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ , где  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя,  $\lambda$  — характерная длина волны.

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Будем рассматривать гравитационные потенциалы в **волновой зоне**, то есть на большом расстоянии  $R$  от системы:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ , где  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя,  $\lambda$  — характерная длина волны. В этом случае мы можем заменить  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$  в знаменателе на  $R$ .

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Будем рассматривать гравитационные потенциалы в **волновой зоне**, то есть на большом расстоянии  $R$  от системы:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ , где  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя,  $\lambda$  — характерная длина волны. В этом случае мы можем заменить  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$  в знаменателе на  $R$ . Однако в числителе такая замена приведет к ошибке из-за запаздывания.

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Будем рассматривать гравитационные потенциалы в **волновой зоне**, то есть на большом расстоянии  $R$  от системы:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ , где  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя,  $\lambda$  — характерная длина волны. В этом случае мы можем заменить  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$  в знаменателе на  $R$ . Однако в числителе такая замена приведет к ошибке из-за запаздывания. В волновой зоне имеем  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \simeq R - \mathbf{n}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad M_{\mu\nu}(t, \mathbf{n}) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + \mathbf{n}\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (10)$$

Величины  $M_{\mu\nu}$  не преобразуются как компоненты тензора.

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Будем рассматривать гравитационные потенциалы в **волновой зоне**, то есть на большом расстоянии  $R$  от системы:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ , где  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя,  $\lambda$  — характерная длина волны. В этом случае мы можем заменить  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$  в знаменателе на  $R$ . Однако в числителе такая замена приведет к ошибке из-за запаздывания. В волновой зоне имеем  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \simeq R - \mathbf{n}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad M_{\mu\nu}(t, \mathbf{n}) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + \mathbf{n}\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (10)$$

Величины  $M_{\mu\nu}$  не преобразуются как компоненты тензора.

Для удобства давайте расположим «приемник» на оси  $x^1$ :  $\mathbf{R} = R\partial_1$ . Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) \equiv M_{\mu\nu}(t, \partial_1) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + x^1, \mathbf{r}). \quad (11)$$

Здесь изменим обозначения:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ :

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -4G \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (9)$$

Будем рассматривать гравитационные потенциалы в **волновой зоне**, то есть на большом расстоянии  $R$  от системы:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ , где  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя,  $\lambda$  — характерная длина волны. В этом случае мы можем заменить  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$  в знаменателе на  $R$ . Однако в числителе такая замена приведет к ошибке из-за запаздывания. В волновой зоне имеем  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \simeq R - \mathbf{n}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad M_{\mu\nu}(t, \mathbf{n}) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + \mathbf{n}\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (10)$$

Величины  $M_{\mu\nu}$  не преобразуются как компоненты тензора.

Для удобства давайте расположим «приемник» на оси  $x^1$ :  $\mathbf{R} = R\partial_1$ . Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) \equiv M_{\mu\nu}(t, \partial_1) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + x^1, \mathbf{r}). \quad (11)$$

Чтобы упростить вычисление этих величин, воспользуемся законами сохранения энергии и импульса.

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}).$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}).$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}).$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}).$$

Положим

$$T_{\nu}^{-} = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}, \quad M_{\nu}^{-}(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t). \quad (12)$$

Это соответствует координатам светового конуса  $x^{\pm} = x^0 \pm x^1$ .

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}).$$

Положим

$$T_\nu^- = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}, \quad M_\nu^-(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t). \quad (12)$$

Это соответствует координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ . Отсюда получаем

$$\dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}). \quad (13)$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}).$$

Положим

$$T_\nu^- = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}, \quad M_\nu^-(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t). \quad (12)$$

Это соответствует координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ . Отсюда получаем

$$\dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}). \quad (13)$$

Отсюда имеем сохранение величин  $M_\nu^-$ :

$$\dot{M}_\nu^- = \int d^3x \dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \int d^3x \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}).$$

Положим

$$T_\nu^- = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}, \quad M_\nu^-(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t). \quad (12)$$

Это соответствует координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ . Отсюда получаем

$$\dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}). \quad (13)$$

Отсюда имеем сохранение величин  $M_\nu^-$ :

$$\dot{M}_\nu^- = \int d^3x \dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \int d^3x \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

В самом деле,  $M_\nu^- = P_\nu$ , просто поверхность интегрирования была выбрана  $x^- = \text{const}$ . Переходя к поверхности  $t = \text{const}$ , имеем

$$M_0^- = \int d^3x T_0^0(t, \mathbf{r}) = M, \quad M_i^- = 0. \quad (15)$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}).$$

Положим

$$T_\nu^- = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}, \quad M_\nu^-(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t). \quad (12)$$

Это соответствует координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ . Отсюда получаем

$$\dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}). \quad (13)$$

Отсюда имеем сохранение величин  $M_\nu^-$ :

$$\dot{M}_\nu^- = \int d^3x \dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \int d^3x \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

В самом деле,  $M_\nu^- = P_\nu$ , просто поверхность интегрирования была выбрана  $x^- = \text{const}$ . Переходя к поверхности  $t = \text{const}$ , имеем

$$M_0^- = \int d^3x T_0^0(t, \mathbf{r}) = M, \quad M_i^- = 0. \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{0\nu}(R\partial_1) + \psi_{1\nu}(R\partial_1) = -\frac{4GM}{R}\eta_{0\nu}. \quad (16)$$

Это продольный вклад, который не устраняется остаточным калибровочным преобразованием. Но этот вклад отвечает постоянному полю  $\omega = 0$ , а не гравитационной волне.

Из уравнения непрерывности имеем

$$T_{0\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t+x^1, \mathbf{r}).$$

Положим

$$T_\nu^- = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}, \quad M_\nu^-(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t). \quad (12)$$

Это соответствует координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ . Отсюда получаем

$$\dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}). \quad (13)$$

Отсюда имеем сохранение величин  $M_\nu^-$ :

$$\dot{M}_\nu^- = \int d^3x \dot{T}_\nu^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \int d^3x \partial_k T_{k\nu}(t+x^1, \mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

В самом деле,  $M_\nu^- = P_\nu$ , просто поверхность интегрирования была выбрана  $x^- = \text{const}$ . Переходя к поверхности  $t = \text{const}$ , имеем

$$M_0^- = \int d^3x T_0^0(t, \mathbf{r}) = M, \quad M_i^- = 0. \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{0\nu}(R\partial_1) + \psi_{1\nu}(R\partial_1) = -\frac{4GM}{R}\eta_{0\nu}. \quad (16)$$

Это продольный вклад, который не устраняется остаточным калибровочным преобразованием. Но этот вклад отвечает постоянному полю  $\omega = 0$ , а не гравитационной волне. Нас будут интересовать компоненты  $M_{ab}$  отвечающие поперечному полю.

Умножим уравнение сохранения импульса

$$\dot{T}_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) \quad (13a)$$

на  $x^i$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i$$

Умножим уравнение сохранения импульса

$$\dot{T}_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) \quad (13a)$$

на  $x^i$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i = \int d^3x (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r})) x^i$$

Умножим уравнение сохранения импульса

$$\dot{T}_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) \quad (13a)$$

на  $x^i$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i &= \int d^3x (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r})) x^i \\ &= \int d^3x \partial_k (T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i) - \int d^3x T_{ij}(t + x^1, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Умножим уравнение сохранения импульса

$$\dot{T}_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) \quad (13a)$$

на  $x^i$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i &= \int d^3x (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r})) x^i \\ &= \int d^3x \partial_k (T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i) - \int d^3x T_{ij}(t + x^1, \mathbf{r}) \\ &= \int df_{0k} T_{ki}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i - M_{ij} \end{aligned}$$

Умножим уравнение сохранения импульса

$$\dot{T}_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) \quad (13a)$$

на  $x^i$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i &= \int d^3x (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r})) x^i \\ &= \int d^3x \partial_k (T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i) - \int d^3x T_{ij}(t + x^1, \mathbf{r}) \\ &= \int d^3x \partial_k T_{ki}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i - M_{ij} \\ &= -M_{ij}. \end{aligned}$$

Умножим уравнение сохранения импульса

$$\dot{T}_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) \quad (13a)$$

на  $x^i$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i &= \int d^3x (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r})) x^i \\ &= \int d^3x \partial_k (T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i) - \int d^3x T_{ij}(t + x^1, \mathbf{r}) \\ &= \int d^3x \partial_k T_{ki}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i - M_{ij} \\ &= -M_{ij}. \end{aligned}$$

Симметризуя по  $i, j$ , получаем

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r}) x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i). \quad (17)$$

Итак,

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i). \quad (17)$$

Итак,

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i). \quad (17)$$

Теперь возьмем уравнение при  $\nu = +$  (то есть полусумму 0 и 1)

$$\dot{T}_+^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k+}(t + x^1, \mathbf{r}), \quad (13b)$$

умножим на  $x^i x^j$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\partial_0^2 \int d^3x \overbrace{2T_{++}^-}^{T_+^-}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j$$

Итак,

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t+x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t+x^1, \mathbf{r})x^i). \quad (17)$$

Теперь возьмем уравнение при  $\nu = +$  (то есть полусумму 0 и 1)

$$\dot{T}_+^-(t+x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k+}(t+x^1, \mathbf{r}), \quad (13b)$$

умножим на  $x^i x^j$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\partial_0^2 \int d^3x \underbrace{2T_{++}^-}_{T_+^-}(t+x^1, \mathbf{r})x^i x^j = \partial_0 \int d^3x (\partial_k T_{+k}(t+x^1, \mathbf{r}))x^i x^j$$

Итак,

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i). \quad (17)$$

Теперь возьмем уравнение при  $\nu = +$  (то есть полусумму 0 и 1)

$$\dot{T}_+^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k+}(t + x^1, \mathbf{r}), \quad (13b)$$

умножим на  $x^i x^j$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0^2 \int d^3x \overbrace{2T_{++}^-}^{T_+^-}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j &= \partial_0 \int d^3x (\partial_k T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r}))x^i x^j \\ &= \partial_0 \int d^3x \partial_k (T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j) \\ &\quad - \partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i) \end{aligned}$$

Итак,

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i). \quad (17)$$

Теперь возьмем уравнение при  $\nu = +$  (то есть полусумму 0 и 1)

$$\dot{T}_+^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k+}(t + x^1, \mathbf{r}), \quad (13b)$$

умножим на  $x^i x^j$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0^2 \int d^3x \overbrace{2T_{++}^-}^{T_+^-}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j &= \partial_0 \int d^3x (\partial_k T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r}))x^i x^j \\ &= \partial_0 \int d^3x \partial_k (T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j) \\ &\quad - \partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i) = M_{ij}. \end{aligned}$$

Итак,

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i). \quad (17)$$

Теперь возьмем уравнение при  $\nu = +$  (то есть полусумму 0 и 1)

$$\dot{T}_+^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k+}(t + x^1, \mathbf{r}), \quad (13b)$$

умножим на  $x^i x^j$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\begin{aligned} \partial_0^2 \int d^3x \overbrace{2T_{++}^-}^{\text{red}}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j &= \partial_0 \int d^3x (\partial_k T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r}))x^i x^j \\ &= \cancel{\partial_0 \int d^3x \partial_k (T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j)} \\ &\quad - \partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r})x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r})x^i) = M_{ij}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$M_{ij}(t) = \partial_0^2 \int d^3x 2T_{++}(t + x^1, \mathbf{r})x^i x^j. \quad (18)$$

Как и раньше, определим две компоненты:  $h_+ = \frac{1}{2}(h_{22} - h_{33}) = \frac{1}{2}(\psi_{22} - \psi_{33})$   
и  $h_\times = h_{23} = \psi_{23}$ .

Как и раньше, определим две компоненты:  $h_+ = \frac{1}{2}(h_{22} - h_{33}) = \frac{1}{2}(\psi_{22} - \psi_{33})$  и  $h_\times = h_{23} = \psi_{23}$ . Тогда

$$h_+(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_+(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad h_\times(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_\times(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad (19)$$

Как и раньше, определим две компоненты:  $h_+ = \frac{1}{2}(h_{22} - h_{33}) = \frac{1}{2}(\psi_{22} - \psi_{33})$  и  $h_\times = h_{23} = \psi_{23}$ . Тогда

$$h_+(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_+(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad h_\times(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_\times(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \partial_0^2 \int d^3x T_{++}(t + x^1, \mathbf{r})((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \partial_0^2 \int d^3x T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) \cdot 2x^2x^3. \end{aligned} \quad (20)$$

# Нерелятивистский предел

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел, в котором  $|T_{0i}|, |T_{ij}| \ll |T_{00}|$  и компоненты тензора энергии-импульса медленно меняются со временем, точнее почти не меняются на интервале времен  $\sim r_{\text{ист}}$ .

## Нерелятивистский предел

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел, в котором  $|T_{0i}|, |T_{ij}| \ll |T_{00}|$  и компоненты тензора энергии-импульса медленно меняются со временем, точнее почти не меняются на интервале времен  $\sim r_{\text{ист}}$ . Тогда мы можем положить

$$T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4} T_{00}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4} \rho(t, \mathbf{r}).$$

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел, в котором  $|T_{0i}|, |T_{ij}| \ll |T_{00}|$  и компоненты тензора энергии-импульса медленно меняются со временем, точнее почти не меняются на интервале времен  $\sim r_{\text{ист}}$ . Тогда мы можем положить

$$T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4} T_{00}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4} \rho(t, \mathbf{r}).$$

Получаем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \frac{1}{4} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) ((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) x^2 x^3. \end{aligned} \tag{21}$$

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел, в котором  $|T_{0i}|, |T_{ij}| \ll |T_{00}|$  и компоненты тензора энергии-импульса медленно меняются со временем, точнее почти не меняются на интервале времен  $\sim r_{\text{ист}}$ . Тогда мы можем положить

$$T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4} T_{00}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4} \rho(t, \mathbf{r}).$$

Получаем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \frac{1}{4} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) ((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) x^2 x^3. \end{aligned} \tag{21}$$

Удобно выразить их через **квадрупольный момент** плотности энергии

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) (3x^i x^j - r^2 \delta_{ij}). \tag{22}$$

Квадрупольный момент имеет нулевой след:  $D_{ii}(t) = 0$ .

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел, в котором  $|T_{0i}|, |T_{ij}| \ll |T_{00}|$  и компоненты тензора энергии-импульса медленно меняются со временем, точнее почти не меняются на интервале времен  $\sim r_{\text{ист}}$ . Тогда мы можем положить

$$T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4} T_{00}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4} \rho(t, \mathbf{r}).$$

Получаем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \frac{1}{4} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) ((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) x^2 x^3. \end{aligned} \tag{21}$$

Удобно выразить их через **квадрупольный момент** плотности энергии

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) (3x^i x^j - r^2 \delta_{ij}). \tag{22}$$

Квадрупольный момент имеет нулевой след:  $D_{ii}(t) = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} h_+(t, R\partial_1) &= -\frac{G}{3R} (\ddot{D}_{22}(t-R) - \ddot{D}_{33}(t-R)), \\ h_\times(t, R\partial_1) &= -\frac{2G}{3R} \ddot{D}_{23}(t-R). \end{aligned} \tag{23}$$

Из формулы  $t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}$  найдем плотность потока энергии:

$$t^{01}(t + R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right). \quad (24)$$

Из формулы  $t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}$  найдем плотность потока энергии:

$$t^{01}(t+R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right). \quad (24)$$

Для потока энергии в телесный угол имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t+R, R\partial_1) R^2 d\omega = \frac{G}{36\pi} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right) d\omega. \quad (25)$$

Из формулы  $t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}$  найдем плотность потока энергии:

$$t^{01}(t+R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right). \quad (24)$$

Для потока энергии в телесный угол имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t+R, R\partial_1) R^2 d\omega = \frac{G}{36\pi} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right) d\omega. \quad (25)$$

Здесь мы «откатали» время назад, чтобы узнать потери энергии системой в момент времени  $t$ .

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат.

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций.

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций. Формулу (25) можно записать в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (26)$$

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций. Формулу (25) можно записать в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (26)$$

где

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций. Формулу (25) можно записать в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (26)$$

где

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}. \quad (28)$$

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций. Формулу (25) можно записать в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (26)$$

где

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}. \quad (28)$$

► Формула (26) верна для **любой** пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям.

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций. Формулу (25) можно записать в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (26)$$

где

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}. \quad (28)$$

► Формула (26) верна для **любой** пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Перепишем (26) для произвольного  $\mathbf{n}$  в виде

$$dI(t, \mathbf{n}) = \frac{G}{72\pi} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} E_{ijkl}(\mathbf{n}) do, \quad E_{ijkl}(\mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 e_{ij}^{(s)}(\mathbf{n}) e_{kl}^{(s)}(\mathbf{n}). \quad (29)$$

Мы хотим «освободиться» от специальной системы координат. В качестве первого шага освободимся от специального выбора базисных поляризаций. Формулу (25) можно записать в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (26)$$

где

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}. \quad (28)$$

► Формула (26) верна для **любой** пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Перепишем (26) для произвольного  $\mathbf{n}$  в виде

$$dI(t, \mathbf{n}) = \frac{G}{72\pi} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} E_{ijkl}(\mathbf{n}) do, \quad E_{ijkl}(\mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 e_{ij}^{(s)}(\mathbf{n}) e_{kl}^{(s)}(\mathbf{n}). \quad (29)$$

Найдем  $E_{ijkl}(\mathbf{n})$ .

Из свойств тензоров  $e^{(s)}$  легко находим

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl}n_i = 0,$$
$$E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}.$$

Из свойств тензоров  $e^{(s)}$  легко находим

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl}n_i = 0, \\ E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}.$$

Из второго свойства находим

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ + E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) \\ + E_4 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (30)$$

Из свойств тензоров  $e^{(s)}$  легко находим

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl}n_i = 0, \\ E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}.$$

Из второго свойства находим

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ + E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) \\ + E_4 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (30)$$

Из остальных свойств получаем

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Из свойств тензоров  $e^{(s)}$  легко находим

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl}n_i = 0, \\ E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}.$$

Из второго свойства находим

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ + E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) \\ + E_4 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (30)$$

Из остальных свойств получаем

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Окончательно находим для интенсивности

$$dI(\mathbf{n}) = \frac{G}{36\pi} \left( \frac{1}{4} (\ddot{D}_{ij} n_i n_j)^2 + \frac{1}{2} \ddot{D}_{ij}^2 - \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ik} n_j n_k \right) d\omega. \quad (32)$$

Из свойств тензоров  $e^{(s)}$  легко находим

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl}n_i = 0, \\ E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}.$$

Из второго свойства находим

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ + E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) \\ + E_4 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (30)$$

Из остальных свойств получаем

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Окончательно находим для интенсивности

$$dI(\mathbf{n}) = \frac{G}{36\pi} \left( \frac{1}{4} (\ddot{D}_{ij} n_i n_j)^2 + \frac{1}{2} \ddot{D}_{ij}^2 - \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ik} n_j n_k \right) d\omega. \quad (32)$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45} \ddot{D}_{ij}^2. \quad (33)$$

# Открытие гравитационно-волновых потерь

Для звездных систем эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для тесных систем по измерению систематического изменения периода их обращения. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором для системы из двух нейтронных звезд было первым подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии.

1. Взаимодействие со сплошной средой. Гравитационная волна вызывает изменение расстояния между точками:

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

1. Взаимодействие со сплошной средой. Гравитационная волна вызывает изменение расстояния между точками:

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

Если она идет через сплошную среду, это приводит к деформации среды

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j.$$

1. Взаимодействие со сплошной средой. Гравитационная волна вызывает изменение расстояния между точками:

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

Если она идет через сплошную среду, это приводит к деформации среды

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j.$$

Поэтому деформация связана с потенциалами:

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}h_{ij}, \quad h_{ii} = 0. \quad (34)$$

1. Взаимодействие со сплошной средой. Гравитационная волна вызывает изменение расстояния между точками:

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

Если она идет через сплошную среду, это приводит к деформации среды

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j.$$

Поэтому деформация связана с потенциалами:

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}h_{ij}, \quad h_{ii} = 0. \quad (34)$$

Мы предполагаем, что размер тела  $l$ , через которое проходит волна, достаточно велик, чтобы частоты собственных колебаний тела были много меньше частоты волны. Кроме того, мы будем считать, что скорость звука в среде много меньше скорости света. Тогда релаксацией среды можно пренебречь.

1. Взаимодействие со сплошной средой. Гравитационная волна вызывает изменение расстояния между точками:

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

Если она идет через сплошную среду, это приводит к деформации среды

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j.$$

Поэтому деформация связана с потенциалами:

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}h_{ij}, \quad h_{ii} = 0. \quad (34)$$

Мы предполагаем, что размер тела  $l$ , через которое проходит волна, достаточно велик, чтобы частоты собственных колебаний тела были много меньше частоты волны. Кроме того, мы будем считать, что скорость звука в среде много меньше скорости света. Тогда релаксацией среды можно пренебречь.

Упругие свойства твердой изотропной среды определяются законом Гука

$$\sigma_{ij} = K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \right). \quad (35)$$

1. Взаимодействие со сплошной средой. Гравитационная волна вызывает изменение расстояния между точками:

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

Если она идет через сплошную среду, это приводит к деформации среды

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j.$$

Поэтому деформация связана с потенциалами:

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}h_{ij}, \quad h_{ii} = 0. \quad (34)$$

Мы предполагаем, что размер тела  $l$ , через которое проходит волна, достаточно велик, чтобы частоты собственных колебаний тела были много меньше частоты волны. Кроме того, мы будем считать, что скорость звука в среде много меньше скорости света. Тогда релаксацией среды можно пренебречь.

Упругие свойства твердой изотропной среды определяются законом Гука

$$\sigma_{ij} = K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \right). \quad (35)$$

Так как плотность среды при прохождении гравитационной волны не меняется, переменная часть тензора энергии-импульса определяется сдвигами:

$$\Delta T_{ij} = -\Delta \sigma_{ij} = \mu h_{ij}. \quad (36)$$

В результате уравнение движения волн имеет вид

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \mu \psi_{ij} = 0. \quad (37)$$

В результате уравнение движения волн имеет вид

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G\mu\psi_{ij} = 0. \quad (37)$$

**Задача 1.** Найдите закон дисперсии и групповую скорость волны в твердой среде.

---

В результате уравнение движения волн имеет вид

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G\mu \psi_{ij} = 0. \quad (37)$$

**Задача 1.** Найдите закон дисперсии и групповую скорость волны в твердой среде.

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + 16\pi G\mu, \quad \mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} < 1. \quad (38)$$

В результате уравнение движения волн имеет вид

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G\mu \psi_{ij} = 0. \quad (37)$$

**Задача 1.** Найдите закон дисперсии и групповую скорость волны в твердой среде.

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + 16\pi G\mu, \quad \mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} < 1. \quad (38)$$

В космосе этот эффект может реализовываться при прохождении гравитационной волны через межзвездный газ. В бесстолкновительном газе имеет место закон  $pL = \text{const}$ , где  $p$  — давление в некотором направлении, а  $L$  — масштаб в этом же направлении. Тогда для газа со средним давлением  $p$  имеем

$$\Delta T_{ij} = -p u_{ij} = \frac{p}{2} h_{ij}. \quad (39)$$

Таким образом, межзвездный газ ведет себя как твердая среда с модулем сдвига  $\mu = p/2$ .

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \quad (40)$$

где  $\eta, \zeta$  — коэффициенты вязкости.

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \quad (40)$$

где  $\eta, \zeta$  — коэффициенты вязкости. Имеем

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \eta \dot{\psi}_{ij} = 0. \quad (41)$$

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \quad (40)$$

где  $\eta, \zeta$  — коэффициенты вязкости. Имеем

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \eta \dot{\psi}_{ij} = 0. \quad (41)$$

Задача 2. Найдите закон дисперсии для гравитационной волны в жидкости.

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \quad (40)$$

где  $\eta, \zeta$  — коэффициенты вязкости. Имеем

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \eta \dot{\psi}_{ij} = 0. \quad (41)$$

**Задача 2.** Найдите закон дисперсии для гравитационной волны в жидкости.

$$\omega^2 + 16\pi i G \eta \omega = \mathbf{k}^2. \quad (42)$$

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \quad (40)$$

где  $\eta, \zeta$  — коэффициенты вязкости. Имеем

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \eta \dot{\psi}_{ij} = 0. \quad (41)$$

**Задача 2.** Найдите закон дисперсии для гравитационной волны в жидкости.

$$\omega^2 + 16\pi i G \eta \omega = \mathbf{k}^2. \quad (42)$$

Это значит, что частота имеет отрицательную мнимую часть, что отвечает поглощению.

## 2. Генерация гравитационной волны электромагнитной волной

Рассмотрим электромагнитную волну, движущуюся в направлении  $x^1$  и поляризованную в плоскости  $(x^1, x^2)$ . Ее тензор энергии-импульса равен

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^- . \quad (43)$$

## 2. Генерация гравитационной волны электромагнитной волной

Рассмотрим электромагнитную волну, движущуюся в направлении  $x^1$  и поляризованную в плоскости  $(x^1, x^2)$ . Ее тензор энергии-импульса равен

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^- . \quad (43)$$

Он не содержит поперечных компонент, поэтому электромагнитная волна не порождает гравитационной.

## 2. Генерация гравитационной волны электромагнитной волной

Рассмотрим электромагнитную волну, движущуюся в направлении  $x^1$  и поляризованную в плоскости  $(x^1, x^2)$ . Ее тензор энергии-импульса равен

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^-. \quad (43)$$

Он не содержит поперечных компонент, поэтому электромагнитная волна не порождает гравитационной. Чтобы это изменить, включим внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_{\text{внеш}} = H_{\perp} \partial_2 + H_{\parallel} \partial_3$ .

## 2. Генерация гравитационной волны электромагнитной волной

Рассмотрим электромагнитную волну, движущуюся в направлении  $x^1$  и поляризованную в плоскости  $(x^1, x^2)$ . Ее тензор энергии-импульса равен

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^- . \quad (43)$$

Он не содержит поперечных компонент, поэтому электромагнитная волна не порождает гравитационной. Чтобы это изменить, включим внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_{\text{внеш}} = H_{\perp} \partial_2 + H_{\parallel} \partial_3$ .

**Задача 2.** Найдите компоненты  $T_{23}$  и  $T_{22} - T_{33}$  тензора энергии-импульса электромагнитной волны во внешнем поперечном магнитном поле. Какова будет частота генерируемой гравитационной волны?

---

## 2. Генерация гравитационной волны электромагнитной волной

Рассмотрим электромагнитную волну, движущуюся в направлении  $x^1$  и поляризованную в плоскости  $(x^1, x^2)$ . Ее тензор энергии-импульса равен

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^-. \quad (43)$$

Он не содержит поперечных компонент, поэтому электромагнитная волна не порождает гравитационной. Чтобы это изменить, включим внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_{\text{внеш}} = H_{\perp} \partial_2 + H_{\parallel} \partial_3$ .

**Задача 2.** Найдите компоненты  $T_{23}$  и  $T_{22} - T_{33}$  тензора энергии-импульса электромагнитной волны во внешнем поперечном магнитном поле. Какова будет частота генерируемой гравитационной волны?

$$T_{23} = -H_{\perp} E_0 \cos \omega x^- + \text{const},$$

$$\frac{1}{2}(T_{22} - T_{33}) = H_{\parallel} E_0 \cos \omega x^- + \text{const}.$$