Задачи 2009-2010 учебного года.

Задача 1 *Пусть X, Y – пара компактных пространств, $f : X \to Y$ непрерывное взаимнооднозначное отображение. Докажите, что $f^{-1} : Y \to X$ также непрерывно. Постройте контрпример для некомпактного случая.*

Определим пространство l^2 как множество бесконечных последовательностей вещественных чисел $\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x^j)^2 < \infty.$$

норма в l^2 задается формулой

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (x^j)^2}.$$

Последовательность $\vec{x}_k$ элементов пространства l^2, где $\vec{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n, \ldots)$ называется **последовательностью Коши**, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что для $\forall k, l > N$ $\|\vec{x}_k - \vec{x}_l\| < \varepsilon$.

Задача 2 *Докажите, что пространство l^2* **полно***, т.е. любая последовательность Коши имеет предел.*

Задача 3 *Докажите, что в стандартной топологии, задаваемой нормой в l^2 единичный шар в пространстве l^2*

$$\|\vec{x}\| \leq 1$$

некомпактен.

Введем **слабую топологию на l^2**. В качестве **предбазы** возьмем следующий набор множеств: для любой тройки $\vec{x}_j$, $\vec{y}_j$, ε_j, где $\vec{x}_j$, $\vec{y}_j \neq \vec{0}$ – пара векторов из l^2, $\varepsilon_j > 0$ – вещественное число, U_j задается неравенством $|(\vec{y}_j, \vec{x} - \vec{x}_j)| < \varepsilon_j$, где

$$(\vec{y}, \vec{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} y^j x^j.$$

В качестве **базы** топологии возьмем всевозможные конечные пересечения множеств U_j. Открытыми множествами назовем всевозможные объединения множеств из базы.

Задача 4 *Докажите, что в слабой топологии l^2 единичный шар в пространстве l^2 компактен.*

Задача 5 *Постройте отображение из области $\mathbb{R}^n$ в область $\mathbb{R}^n$ с якобианом, отличным во всех точках от 0, но не являющееся взаимнооднозначным.*

Задача 6 *Докажите, что пространство $\mathbb{R}P^n$ неориентируемо при четном n и ориентируемо при нечетном.*

Задача 7 *Постройте вложение компактного многообразия в евклидово пространство $M^n \to \mathbb{R}^N$ такое, что его образ* **глобально** *не задается системой уравнений*

$$\begin{cases} \phi_1(y^1, \ldots, y^N) = 0 \\ \\ \phi_{N-n}(y^1, \ldots, y^N) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $f : M^m \to N^n$ – гладкое отображение из гладкого многообразия в гладкое многообразие, причем в локальных координатах

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^m) \\ \\ y^n = f^n(x^1, \ldots, x^m) \end{cases}.$$

Точка $x \in M$ называется **регулярной**, если ранг якобиана в ней максимален:

$$\mathrm{r}k \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = \min(m, n).$$

Точка, в которой ранг меньше максимального, называется **особой**.

Задача 8 *Проверьте, что данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора локальых систем координат.*

Точка $y \in N$ называется **регулярной**, если все ее прообразы регулярны. Эквивалентно, образы всех особых точек из M – особые точки N.

В многообразии M особые точки могут занимать целые области. Однако согласно **Лемме Сарда** множество особых точек в N всегда имеет меру 0.

Задача 9 *Пусть* $f : M^n \to N^n$ *– гладкое отображение компактного многообразия в компактное многообразие той же размерности. Докажите, что число прообразов регулярной точки всегда конечно. Постройте контрпример для некомпактного случая.*

Задача 10 *Рассмотрим отображение* $f : S^3 \to S^2$*. Докажите, что инвариант Хопфа можно задать следующей формулой: Пусть* ω *– форма объема на* S^2*, нормированная условием*

$$\int\limits_{S^2} \omega = 1,$$

ее прообраз на S^3 *обозначим* ω^**,* v *– 1-форма на* S^3 *такая, что*

$$dv = \omega^*.$$

Тогда инвариант Хопфа задается формулой

$$h = \int\limits_{S^3} v \wedge \omega^*$$

Задача 11 *Постройте двулистное накрытие над сферой с 2 ручками. Над сферой с n ручками.*

Задача 12 *Постройте накрытие над букетом двух окружностей, отвечающее подгруппе-коммутанту группы* π_1*. То же для n окружностей.*

Задача 13 *Пусть* A *– целочисленная 2x2 матрица с ненулевым детерминантом. Тогда отображение*

$$A : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

задает накрытие $T^2 \to T^2$*,* $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$*.*

1. *Вычислите число листов этого накрытия.*

2. *При разных* $|\det A|$ *эти накрытия не эквивалентны.*

3. *Все накрытия с* $|\det A| = 2$ *эквивалентны.*

4. *Все накрытия с* $|\det A| = 6$ *эквивалентны.*

5. *Постройте два неэквивалентных накрытия с* $|\det A| = 4$.

6. *Дайте полную классификацию таких накрытий.*

Задача 14

Постройте накрытие S^3 *над трехмерным многообразием с группой* $\mathbb{Z}_n$.

Задача 15

Опишите все двумерные алгебры Ли.

Задача 16 *Докажите, что ядро формы Картана-Киллинга – идеал алгебры.*