Задачи занятия 11 февраля 2016 года.

Задача 1 *Пусть на пространстве X задана топология, в которой открыты само X и пустое множество $\varnothing$. Опишите все непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \to X$.*

Задача 2 *Пусть на пространстве X задана топология, в которой открыты все подмножества (дискретная топология). Опишите все непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \to X$.*

Задача 3 *Рассмотрим топологию Зарисского в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$: множество замкнуто, если оно задано системой полиномиальных уравнений:*

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ p_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

k – любое целое число, $p_j(x_1, \dots, x_n)$ – некоторые многочлены от n переменных. Докажите, что это действительно топология. Теорему о многочленах Гильберта (любая система полиномиальных уравнений эквивалентна конечной).

Задача 4 *Докажите, что отрезок – связное множество.*

Задача 5 *Докажите, что открытый интервал $(0,1)$ гомеоморфен прямой $\mathbb{R}$.*

Задача 6 *Докажите, что если X и Y – компактные множества, то $X \times Y$ – компактно.*

Задача 7 *Проверьте, что $\pi_1(X.x_0)$ – действительно группа, а именно:*

1. *Определите единичный элемент.*

2. *Определите элемент, обратный к данному.*

3. *Докажите, что элемент группы не зависит от выбора параметризации пути, а именно: пусть задана непрерывная функция $\tau(t)$, отображающая отрезок $[0,1]$ в отрезок $[0,1]$ такая, что $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ (не обязательно монотонная). Тогда $\gamma(\tau(t)) \sim \gamma(t)$.*

4. *Проверьте, что умножение ассоциативно: $\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3) \sim (\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3$*