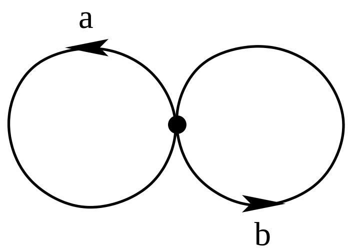
Задачи занятия 3 марта 2016 года.

Задача 1 *Докажите, что процесс ортогонализации Грама-Шмидта задает гомотопическую эквивалентность пространств*

$$GL(n,\mathbb{R}) \to O(n), \quad GL_+(n,\mathbb{R}) \to SO(n),$$

где $GL_+(n,\mathbb{R})$ *означает подгруппу* $n\times n$ *вещественных матриц с положительным определителем.*

Задача 2 *Рассмотрим восьмерку – букет двух окружностей* $X = S^1 \vee S^1$.



Обозначим a *и* b *генераторы* $\pi_1(X)$, *отвечающие обходам каждой их окружностей. Опишите накрытие, отвечающее подгруппе, порожденной* a.

Задача 3 *Пусть* X *то же, что и в предыдущей задаче. Коммутаннтом группы называется подгруппа, порожденная всеми элементами вида* $xyx^{-1}y^{-1}$, *где* x, y *– произвольные элементы группы. Опишите накрытие, отвечающее коммутанту.*

Задача 4 *Рассмотрим двумерный тор* T^2 *с базисными циклами* a, b *и подгруппу в* $\pi_1(T^2)$, *порожденную элементами*

$$x = n_1 a + m_1 b, \quad y = n_2 a + m_2 b,$$

где n_1, n_2, m_1, m_2 *– некоторые целые числа. Рассмотрим накрытие, отвечающее этой подгруппе. Когда оно имеет конечную площадь? Найти отношение площадей тора-накрытия и накрываемого тора.*

Задача 5 *Используя разбиение* S^n *на клетки, в котором к каждой размерности есть ровно две клетки, постройте клеточное разбиение* $\mathbb{R}P^n$.