Задачи занятия 13 апреля 2017 года.

Задача 1 *Пусть даны: p – некоторое отображение $S^3 \to S^2$ и f – некоторое отображение $S^2 \to S^2$. Выразите инвариант Хопфа отображения $f \circ p : S^3 \to S^2$ через инвариант Хопфа отображения p и степень отображения f.*

Задача 2 *Докажите для любого целочисленного $n \in \mathbb{Z}$ существование отображения $S^3 \to S^2$ с инвариантом Хопфа, равным n.*

Задача 3 *Постройте триангуляции пространств T^2, K^2, $\mathbb{R}P^2$. Здесь K^2 обозначает бутылку Клейна.*

Задача 4 *Используя триангуляции, вычислите следующие гомологии $H_k(S^1)$, $H_k(S^2)$, $H_k(S^3)$, $H_k(T^2)$, $H_k(K^2)$, $H_k(\mathbb{R}P^2)$.*

Задача 5 *Используя триангуляции, вычислите следующие когомологии $H^k(S^1)$, $H^k(S^2)$, $H^k(S^3)$, $H^k(T^2)$, $H^k(K^2)$, $H^k(\mathbb{R}P^2)$.*

Задача 6 *Для любой кончнопорожденной абелевой группы рассмотрим разложение в сумму конечной и свободной:*

$$G = \underbrace{\mathbb{Z}_{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{k_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_J}}_{G_{Fin}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{G_{Free}}$$

$$G = G_{Fin} \oplus G_{Free}$$

Докажите равенство для гомологий и когомологий с коэффициентми $\mathbb{Z}$ в предположении, что все гомологии и когомологии конечно порождены:

$$(H_k(X,\mathbb{Z}))_{Free} = \left(H^k(X,\mathbb{Z})\right)_{Free}, \quad (H_k(X,\mathbb{Z}))_{Fin} = \left(H^{k+1}(X,\mathbb{Z})\right)_{Fin}.$$

Можно считать, что пространство X допускает конечную триангуляцию.