Задачи по курсу естественонаучного содержания – весна 2018 г.

1. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли $so(2,1)$.

2. Доказать гамильтоновость уравнения $u_t = u'u''' + (u'')^2$.

3. Заменой переменной $v = f(u)$ привести к постоянной скобку $\{u(x), u(y)\} = (u(x) + u(y))\,\delta'(x-y)$.

4. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$.

5. На двойственном пространстве к какой алгебре Ли возникает скобка $\{u(x), u(y)\} = \delta'(x-y)$?

6. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли $so(4)$.

7. Гамильтониан h_2 порождает КдФ в первой скобке. Вычислить уравнение порождаемое им во второй.

8. Привести к постоянному виду (локально) скобку, задаваемую формой площади $\omega = \frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$

9. Доказать гамильтоновость уравнения $u_{tt} - u_{xx} = V'(u)$.

10. Привести к постоянному виду (локально) скобку, задаваемую формой площади $\omega = \frac{dx\wedge dy}{(1-x^2-y^2)^2}$

11. Доказать гамильтоновость нелинейного уравнения Шредингера $iq_t = q_{xx} + 2q^2\bar{q}$ в скобке $\{q(x), \bar{q}(y)\} = i\delta(x-y)$, $\{q(x), q(y)\} = 0$, $\{\bar{q}(x), \bar{q}(y)\} = 0$,

12. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$
где $\vec{X} \in \mathbb{R}^2$, A - постоянная матрица. Для каких матриц A это уравнение гамильтоново в постоянной скобке?

13. Рассмотрим движение частицы в поле притягивающего центра, сила притяжения к которому обратно пропорциональна квадрату расстояния до него (задача Кеплера) с гамильтонианом
$$H = \frac{(p_1)^2 + (p_2)^3 + (p_3)^2)}{2m} + \frac{\alpha}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}, \quad \alpha < 0$$

и канонической скобкой

$$\{p_j, x^i\} = \delta^i_j, \quad \{x^i, x^j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Проверить, что у этой системы есть 7 интегралов движения – гамильтониан H, 3 компоненты вектора момента $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$$

и 3 компоненты **вектора Лапласа** $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \frac{\vec{p} \times \vec{M}}{m} + \frac{\alpha \vec{x}}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}.$$

14. Проверить, что Интегралы задачи Кеплера имеют следующие скобки Пуассона

$$\{H, M_j\} = \{H, W_j\} = 0,$$

$$\{M_1, M_2\} = M_3,\ \{M_2, M_3\} = M_1,\ \{M_3, M_1\} = M_2,$$

$$\{W_1, W_2\} = -\frac{2}{m} H M_3,\ \{W_2, W_3\} = -\frac{2}{m} H M_1,\ \{W_3, W_1\} = -\frac{2}{m} H M_2,$$

$$\{M_i, W_i\} = 0,$$

$$\{M_1, W_2\} = -\{M_2, W_1\} = W_3,$$

$$\{M_2, W_3\} = -\{M_3, W_2\} = W_1,$$

$$\{M_3, W_1\} = -\{M_1, W_3\} = W_2.$$

Зафиксируем $H = c$. Тогда компоненты векторов $\vec{M}$, $\vec{W}$ образуют замкнутую 6-мерную алгебру Ли.

15. Вычислить эту алгебру при $c < 0$.

16. Вычислить эту алгебру при $c = 0$.

17. Вычислить эту алгебру при $c > 0$.