Лекция от 2020.03.25

1 Несколько примеров пуассоновых структур

На прошлой лекции мы упомянули, что есть два основных способа задания гамильтонова формализма:

1. Через пуассонову структуру – поле кососимметричных бивекторов (тензоров с двумя верхними индексами) $h^{ij} = h^{ij}(x)$,

$$h^{ji} = -h^{ij}, \quad \text{при всех} \quad x; \tag{1}$$

удовлетворяющих тождеству Якоби

$$h^{il}\,\frac{\partial h^{jk}}{\partial x^l} + h^{jl}\,\frac{\partial h^{ki}}{\partial x^l} + h^{kl}\,\frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l} = 0, \quad \text{для всех} \quad i,j,k. \tag{2}$$

2. Через симплектическую структуру – замкнутую 2-форму $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$. Здесь $\omega_{ij} = \omega_{ij}(x)$ – кососимметричое тензорное поле с двумя нижними индексами:

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij}, \quad \text{при всех} \quad x; \tag{3}$$

Условие замкнутости имеет вид:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0. \tag{4}$$

Как было доказано ранее, если h^{ij}–обратим в окрестности некоторой точки и $h^{ik}(x)$, $\omega^{ik}(x)$ – взаимно обратные матрицы

$$\omega_{ik} h^{kj} = \delta_i^j. \tag{5}$$

(несложно проверяется, что эти условия инвариантны относительно замен координат), то уравнения (2) и (4) эквивалентны друг другу.

На пуассоновом многообразии скобка Пуассона пары функций задается формулой:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} h^{ij}, \tag{6}$$

где тензорное поле $h^{ij} = h^{ij}(x)$ является базисным объектом.

На симплектическом многообразии также используется формула (6), однако в этом случае h^{ij} – тензорное поле поле, заданное формулой (5).

Замечание. Отметим, что если симплектическая структура ω вырождена, то использовать ее для определения гамильтоновой системы, крайне затруднительно. В то же время, вырожденные пуасоновы структуры естественно появляются в механике и физике.1

Замечание. Симплектическую форму можно естественно ограничивать на подмногообразия (в предположении, что после ограничения она остается невырожденной). В то же время, операция ограничения пуассоновой структуры на подмногообразие в общем случае не определена. Тем не менее, ситуация, когда фазовое пространство системы естественно определено как подмногогообразие пространства с пуассоновой структурой, встречается в ряде реальных задач (первый важный пример такого рода – классическая электродинамика). Для таких систем гамильтонов формализм строится с использованием модифицированных скобок Пуассона, называемых скобками Дирака.

1.1 Постоянная скобка

Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{R}^n$, на котором задан произвольный постоянный кососимметрический тензор с двумя верхними индексами $h^{ij} = -h^{ji}$. Поскольку

$$\frac{\partial h^{ij}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j, k,$$

тождество Якоби (4) автоматически выполнено.

Задача. Пусть тензор h^{ij} вырожден. Опишите симплектические листы и функции Казимира данной пуассоновой структуры.

1.2 Скобка Ли-Костанта-Кириллова-Березина

Пусть g – некоторая алгебра Ли, т.е. векторное пространство, снабженное дополнительной операцией – коммутатором $[,]$ со следующими свойствами:

1. Коммутатор является отображением $g \times g \to g$, т.е. каждой паре элементов $x, y \in g$ мы ставим в соответствие некоторый элемент пространства g, обозначаемый $[x, y]$.

2. Коммутатор кососимметричен относительно перестановки аргументов:
$$[y, x] = -[x, y]. \tag{7}$$

3. Коммутатор билинеен по своим аргументам (благодаря косой симметрии достаточно потребовать билинейности по одному из аргументов, билиненйность по оставшемуся сразу получается автоматически).
$$\begin{aligned} [\lambda x + \mu y, z] &= \lambda[x, z] + \mu[y, z], \\ [x, \lambda y + \mu z] &= \lambda[x, y] + \mu[x, z]. \end{aligned} \tag{8}$$

4. Для любой тройки элементов $x, y, z \in g$ выполнено тождество Якоби
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{9}$$

Естественный способ задать алгебру Ли – задать коммутаторы для всех пар базисных векторов. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис g. Коммутаторы пар базисных элементов снова разлагаются по этому базису:
$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k. \tag{10}$$
Для того, чтобы тензор c_{ij}^k определял структуру алгебры Ли, необходимо и достаточно, чтобы

1. Он был кососимметричным по нижним индексам:
$$c_{ji}^k == c_{ij}^k, \tag{11}$$

2. Он удовлетворял тождеству Якоби:
$$c_{il}^s c_{jk}^l + c_{jl}^s c_{ki}^l + c_{kl}^s c_{ij}^l = 0. \tag{12}$$

Величины c_{ij}^k называются структурными константами алгебры g.

Пример. Множество векторов в трехмерном пространстве, для которых коммутатор полагается равным векторному произведению, образуют алгебру Ли $so(3)$.

Рассмотрим g^* – двойственное пространство к алгебре Ли g. Тогда, по определению, любой элемент g имеет как бы две ипостаси:

1. Он является элементом g.

2. Он является линейной функцией на g^*.

В частности, базисные элементы $e_1,\ldots,\ e_n$ из g одновременно являются координатными функциями на g^*, которые мы обозначим $u^1,\ \ldots,\ u^n$ соответственно.

Для линейных функций на g^* скобка Пуассона задается следующим образом. Пусть имеется пара элементов x, y на g. Эти же объекты, но рассматриваемые как линейные функции на g^*, обозначим u_x, u_y соответственно. Положим:

$$\{u_x, u_y\} = u_{[x,y]}, \tag{13}$$

т.е. скобка Пуассона линейных функций u_x, u_y на g^* равна линейной функции, которая как элемент g является просто-напросто коммутатором элементов x и y. Для координатных функций мы имеем:

$$\{u^i, u^j\} = c_{ij}^k u^k, \tag{14}$$

т.е. тензор $h^{ij}(u)$, задающий пуассонову структуру, линеен по координатам:

$$h^{ij}(u) = c_{ij}^k u^k. \tag{15}$$

Пример Пусть g – алгебра Ли $so(3)$ с базисом e_1, e_2, e_3 и коммутатором

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3, [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1, [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2. \tag{16}$$

Соответствующая скобка Пуассона имеет вид

$$h^{12}(u) = -h^{21}(u) = u^3, h^{23}(u) = -h^{32}(u) = u^1, h^{31}(u) = -h^{13}(u) = u^2. \tag{17}$$

Простейшая функция Казимира этой скобки имеет вид $K = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$, общий Казимир записывается в виде $f(K)$, где $f(y)$ – произвольная функция одной переменной. Симплектические листы этой скобки – сферы $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = \mathrm{const}$,

Задача. Ограничение описанной скобки на линии уровня $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = \mathrm{const}$ невырождено при $\mathrm{const} > 0$.

1.3 Квадратичные скобки

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1,\ldots,x^n$, снабженное целочисленной кососимметрической матрицей $\Omega = \omega^{ij}$, $\omega^{ji} = -\omega^{ij}$, $\omega^{ij} \in \mathbb{Z}$.

Определим скобку Пуассона формулой:

$$\{x^i, x^j\} = \omega^{ij} x^i x^j \tag{18}$$

(в формуле (18) **нет суммирования по повторяющимся индексам.**). Другими словами,

$$h^{ij}(x) = \omega^{ij} x^i x^j. \tag{19}$$

Задача. Проверьте, что для скобки (18), (19) выполнено тождество Якоби.