Задачи по курсу естественонаучного содержания – весна 2020 г.

1. Заменой переменных привести к каноническому виду (локально) скобку Пуассона на плоскости $\{x, y\} = x$.

2. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли $so(2,1)$.

3. Доказать гамильтоновость уравнения $u_t = u'u''' + (u'')^2$.

4. Заменой переменной $v = f(u)$ привести к постоянной скобку $\{u(x), u(y)\} = (u(x) + u(y))\,\delta'(x - y)$.

5. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{R})$.

6. На двойственном пространстве к какой алгебре Ли возникает скобка $\{u(x), u(y)\} = \delta'(x - y)$?

7. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли $so(4)$.

8. Гамильтониан h_2 порождает КдФ в первой скобке. Вычислить уравнение порождаемое им во второй.

9. Привести к постоянному виду (локально) скобку, задаваемую формой площади $\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$

10. Доказать гамильтоновость уравнения $u_{tt} - u_{xx} = V'(u)$.

11. Привести к постоянному виду (локально) скобку, задаваемую формой площади $\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1-x^2-y^2)^2}$

12. Доказать гамильтоновость обобщенного нелинейного уравнения Шредингера $iq_t = q_{xx} + 2q^2\bar{q} + \alpha q^5\bar{q}^4, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

13. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

    где $\vec{X} \in \mathbb{R}^2$, A - постоянная матрица. Для каких матриц A это уравнение гамильтоново в постоянной скобке?

14. Рассмотрим движение частицы в поле притягивающего центра, сила притяжения к которому обратно пропорциональна квадрату расстояния до него (задача Кеплера) с гамильтонианом

$$H = \frac{(p_1)^2 + (p_2)^3 + (p_3)^2)}{2m} + \frac{\alpha}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}, \quad \alpha < 0$$

и канонической скобкой

$$\{p_j, x^i\} = \delta^i_j, \quad \{x^i, x^j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Проверить, что у этой системы есть 7 интегралов движения – гамильтониан H, 3 компоненты вектора момента $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$$

и 3 компоненты **вектора Лапласа** $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \frac{\vec{p} \times \vec{M}}{m} + \frac{\alpha \vec{x}}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}.$$