Программа курса “введение в теорию солитонов”
август 2000 г.

1. Пуассоново многообразие, пуассонова структура, тождество Якоби. Примеры: Стандартная скобка, постоянная скобка, скобка Ли-Пуассона. Функции Казимира. Симплектические листы. [1], [2], [3], [4].

2. Гамильтониан, гамильтонов поток. Инвариантность пуассоновой структуры отностительно действия гамильтоновых потоков. [1], [2], [3], [4].

3. Симплектическое многообразие, сиплектическая структура. Связь с пуассоновой структурой. Теорема Лиувилля об интегральных инвариантах. Теорема о сохранении фазового объема. Локально гамильтоновы векторные поля. [3].

4. Интегралы гамильтоновой системы в инволюции. Теорема Лиувилля об интегрируемости.

1. Структура поверхностей уровня набора законов сохранения в предположений компактности и невырожденности.

2. Линеаризация в квадратурах (локальная формулировка без предположения о глобальной структуре).

3. Переменные действие-угол.

[3], [2].

5. Примеры бесконечномерных скобок Пуассона. Ультралокальные скобки Пуассона. Скобка Гарднера-Захарова-Фаддеева. Скобка Ленарда-Магри. Понятие бигамильтоновой системы. Два гамильтовых представления для уравнения Кортевега-Де Фриза (KdV). Иерархия KdV (высшие уравнения KdV). [1], [5], [6], [7], [8].

6. Полуцелые степени оператора Шредингера. Представление Лакса для уравнения KdV. [9], [5], [7], [8].

7. Преобразование рассеяния для одномерного стационарного оператора Шредингера с убывающими на бесконечности коэффициентами. Непрерывный и дискретный спектр. Иерархия KdV в терминах данных рассеяния. Гамильтонианы высших KdV как коэффициенты асимптотики данных рассеяния. Инволютивность высших KdV. [5], [7], [8], [10].

8. Обратная задача рассеяния для одномерного стационарного оператора Шредингера с убывающими на бесконечности коэффициентами:

решение в терминах задачи Римана о факторизации. Сведение задачи Римана к системе сингулярных интегральных уравнений. Формула, выражающая потенциал через данные рассеяния и волновую функцию.

[5], [7], [8].

9. Безотражательные потенциалы – многосолитонные решениия KdV. Явные формулы. [5], [7], [8].

10. Одномерный стационарный оператор Шредингера с периодическими коэффициентами. Зонная структура спектра. Понятие конечнозонного потенциала. Аналитические свойства блоховской функции. Риманова поверхность блоховской функции. Спектр задачи Дирихле. [5], [11].

11. Базис циклов на римановой поверхности. Голоморфные дифференциалы на гиперэллиптической римановой поверхности. Матрица Римана. Билинейные соотношения Римана. Основные свойства матрицы Римана. [12], [2], [5], [14].

11. Преобразование Абеля. Θ-функции Римана многих переменных: Определение, свойства периодичности, нули. [13], [14], [15], [16].

12. Явные формулы для собственной функции конечнозонного оператора Шредингера (функции Бейкера-Ахиезера). Формула Итса-Матвеева для конечнозонных решений KdV. [5], [13], [16], [14].

Дополнительная литература – [17] -[23].

Список литературы

[1] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков. *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория.* Успехи Математических Наук, 1989, т. 44, вып. 6(270), с. 29-98.

[2] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М. Наука.

[3] В.И.Арнольд. “Математические методы классической механики”. М. Наука, 1974.

[4] Л.Д,Ландау, Е.М.Лифшиц. “Теоретическая физика, том I. Механика”. М.: Наука, 1973.

[5] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский “Теория солитонов. Метод обратной задачи”. М. Наука, 1980.

[6] Л.А.Фаддеев, Л.Д.Тахтаджан. “Гамильтонов подход в теории солитонов”. М. Наука, 1986.

[7] Ф.Калоджеро, А.Дегасперис. “Спектральное преобразование и солитоны”. М.Мир, 1985.

[8] М.Абловиц, Х.Сигур. “Солитоны и метод обратной задачи”. М. Мир, 1987.

[9] И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий, *Дробные степени операторов и гамильтоновы системы*, Функц. анализ и его прил., **10**, 4, 13-29 (1976).

[10] М.Рид, Б.Саймон. “Методы современной математической физики”, М. Мир, 1977.

[11] Б.А.Дубровин, В.Б.Матвеев, С.П.Новиков, *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Вриза, конечнозонные линейные операторы и Абелевы многообразия*, УМН, **31**, 1, 56-136 (1976).

[12] Дж.Спрингер. “Введение в теорию римановых поверхностей”. М.:Издательсьво иностранной литературы, 1960.

[13] Б.А.Дубровин, *Тета-функции и нелинейные уравнения*, УМН, **36**, вып.2, 11-80 (1981).

[14] D.Mamford. “Tata lectures on theta” I, II.Birkhauser, 1983.

[15] J.D.Fay. “Theta functions on Riemann surfaces”. Lect. Notes. Math., vol 352, Springer-Verlag, 1973.

[16] E.D.Belokolos, A.I.Bobenko, V.Z.Enol’skii, A.R.Its, V.B.Matveev. “Algebro-Gemetric Approach to nonlinear Integrable Equations”. Springer-Verlag, 1994.

[17] Ф.Рисс, Б. Секефальви-Надь. “Лекции по функциональному анализу”, М. Мир, 1979.

[18] А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. “Элементы теории функций и функционального ананлиза”, М. Наука, 1976.

[19] У.Рудин. “Функциональный анализ”, М. Мир, 1975.

[20] Л.Д.Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния*, Современные проблемы математики, т.3, М.: ВИНИТИ (1974).

[21] В.И.Арнольд. “Обыкновенные дифференциальные уравнения”. М. Наука, 1975.

[22] В.И.Арнольд. “Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений”. М. Наука, 1978.

[23] К.Шадан, П. Сабатье, “Обратные задачи в квантовой теории рассеяния”, М. Мир, 1980.