Лекция 4.
2 марта 2004 г.

Пусть M – пуассоново многообразие, $h^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}$ – матрица скобок Пуассона координатных функций. Если H – некоторая функция на M. Гамильтоново векторное поле, порождаемое H, задается формулой

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x) = \{H, x^i\}. \tag{1}$$

Одна из ключевых теорем гамильтоновой механики:

Теорема 1 *Диффеоморфизмы, порождаемые гамильтоновыми векторными полями, сохраняют пуассонову структуру M.*

Для доказательства нам понадобится понятие **производной Ли.** Обычная производная функции $f(x)$ по вектору $\vec{v}$ в точке x_0 определяется следующим способом. Согласно одному из определений, вектор - это класс эквивалентности параметризованных кривых $\gamma(t)$ таких, что $\gamma(0) = x_0$. Две кривые $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ эквивалентны, если $\gamma_2(t) - \gamma_1(t) = o(t)$ при $t \to 0$. Тогда

$$L_v f(x) = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}. \tag{2}$$

При этом для вычисления производной в одной точке достаточно знать вектор $\vec{v}$ в ней и функцию $f(x)$ в некоторой окрестности.

Производную тензорного поля определить сложнее. Один из способов – ввести понятие **ковариантной производной**, что эквивалентно заданию связности на касательном расслоении. Как и в скалярном случае, для вычисления значения ковариантной производной в некоторой точке достаточно знать вектор, по которому мы дифференциируем в этой точке и тензорное поле в сколь угодно малой её окрестности. К сожалению, для общего гладкого многообразия связность можно выбрать бесконечным числом способов, и все они равноправны. Канонический выбор становится возможным только при наличии дополнительных структур. Так, например, на римановом многообразии существует единственная симметричная связность, согласованная с метрикой – связность Леви-Чивиты, однако при этом разным метрикам соответствуют разные связности.

Оказывается, если мы имеем не один вектор, а целое векторное поле, заданное в окрестности точки x_0, то возможно другое обобщение понятия производной функции на произвольные тензорные поля, которое не требует введения никаких дополнительных структур. Если у нас задано векторное поле $\vec{v}(x)$, то согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений оно порождает однопараметрическую группу локальных диффеоморфизмов $Y(x,t)$ окрестности точки x_0. Действительно, рассмотрим следующую систему:

$$\frac{dY^k}{dt} = v^k(Y). \tag{3}$$

Обозначим $Y^k(x,t)$ её решение с начальными условиями

$$Y^k(x,0) = x^k. \tag{4}$$

Тогда сдвиг за время t (мы считаем t достаточно малым) есть в точности отображение

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Y^1 = Y^1(x,t) \\ \dots \\ Y^n = Y^n(x,t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Пусть нас задано тензорное поле $T(x) = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}(x)$. Обозначим $T(x,t)$ его образ под действием отображения $Y(x,-t)$. Другими словами, диффеоморфизм $Y(x,t)$ отображает точку x_0 в точку $Y(x_0,t)$. При этом обратный диффеоморфизм переносит тензор $T(Y(x_0,t))$ в точку x_0:

$$T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}(x,t) = T^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_k}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_l}(Y(x,t)) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial Y^{\tilde{i}_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial Y^{\tilde{i}_k}} \frac{\partial Y^{\tilde{j}_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial Y^{\tilde{j}_l}}{\partial x^{j_l}} \tag{6}$$

Определение 1 *Предел*

$$L_{\vec{v}} T(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T(x,t) - T(x)}{t} \tag{7}$$

называется производной Ли тензорного поля $T(x)$ вдоль векторного поля $\vec{v}(x)$

Вычислим этот предел. При $t \to 0$

$$Y^{\tilde{j}}(x,t) = x^{\tilde{j}} + t v^{\tilde{j}}(x) + O(t^2). \tag{8}$$

Тем самым

$$\frac{\partial Y^{\tilde{j}}}{\partial x^j} = \delta^{\tilde{j}}_j + t \frac{\partial v^{\tilde{j}}(x)}{\partial x^j} + O(t^2), \tag{9}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial Y^{\tilde{i}}} = \delta^i_{\tilde{i}} - t\frac{\partial v^i(x)}{\partial x^{\tilde{i}}} + O(t^2). \tag{10}$$

Здесь мы использовали соотношение:

$$\partial_{Y^i} = \partial_{x^i} + O(t). \tag{11}$$

Кроме того

$$T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(Y(x,t)) = T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x) + v^l(x)\frac{\partial}{\partial x^l}T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x) + O(t^2) \tag{12}$$

Подставляя (9), (10) в (6) получаем:

$$T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x,t) - T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x) = t\left[v^l(x)\frac{\partial}{\partial x^l}T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x) - \sum_{m=1}^{k} T^{i_1\ldots i_{m-1} n i_{m+1}\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x)\frac{\partial v^{i_m}(x)}{\partial x^n} + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{l} T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_{m-1} n j_{m+1}\ldots j_l}(x)\frac{\partial v^n(x)}{\partial x^{j_m}}\right] + O(t^2)$$

Тем самым

$$(L_v T)^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x) = v^l(x)\frac{\partial}{\partial x^l}T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x) - \sum_{m=1}^{k} T^{i_1\ldots i_{m-1} l i_{m+1}\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x)\frac{\partial v^{i_m}}{\partial x^l} + \tag{14}$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_{m-1} l j_{m+1}\ldots j_l}(x)\frac{\partial v^l}{\partial x^{j_m}}$$

В частности, тензорное поля $T(x)$ инвариантно отностительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порождённой векторным полем $\vec{v}(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$L_{\vec{v}}T \equiv 0. \tag{15}$$

Пример 1 *Пусть $\vec{w}(x)$ – векторное поле. Тогда*

$$L_{\vec{v}}\vec{w} = [v, w], \tag{16}$$

где $[,]$ обозначает коммутатор векторных полей.

Доказательство Теоремы 1. Как было отмечено выше, достаточно проверить, что если v – гамильтоново векторное поле, порождаемое гамильтонианом H по формуле (1), то

$$L_{\vec{v}}h^{ij} = 0. \tag{17}$$

Убедимся, что это действительно так. По определению,

$$(L_{\vec{v}}h)^{ij}(x) =$$
$$= h^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial H(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^\beta} - h^{\alpha j}(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(h^{\beta i}(x)\frac{\partial H(x)}{\partial x^\beta}\right) - h^{i\alpha}(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(h^{\beta j}(x)\frac{\partial H(x)}{\partial x^\beta}\right) =$$
$$= h^{\beta\alpha}(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H(x)}{\partial x^\beta} - h^{\alpha j}(\vec{x})\frac{\partial h^{\beta i}(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H(x)}{\partial x^\beta} - h^{i\alpha}(\vec{x})\frac{\partial h^{\beta j}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H(x)}{\partial x^\beta} -$$
$$- h^{\alpha j}(x)h^{\beta i}(x)\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - h^{i\alpha}(\vec{x})h^{\beta j}(x)\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} =$$
$$= \left(h^{\beta\alpha}(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^\alpha} + h^{j\alpha}(x)\frac{\partial h^{\beta i}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + h^{i\alpha}(x)\frac{\partial h^{j\beta}(x)}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial H(x)}{\partial x^\beta} -$$
$$- \left(h^{j\alpha}(x)h^{i\beta}(x) - h^{i\alpha}(x)h^{j\beta}(x)\right)\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

Первая скобка равна 0 согласно тождеству Якоби, вторая скобка антисимметрична по α и β, поэтому будучи просуммирована по этим индексам с симметричной матрицей вторых производных дает 0.

Тем самым:

$$(L_{\vec{v}}h)^{ij}(x) = 0.$$

Теорема доказана.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение (см. [1]):

Теорема 2 *Пусть M – симплектическое многообразие, т.е. пуассоново многообразие с невырожденной структурой $h^{ij}(x)$. Пусть $\vec{v}(x)$ – векторное поле на M такое, что $(L_{\vec{v}}h)^{ij}(x) = 0$ (гамильтонова структура инвариантна относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порождаемой $\vec{v}(x)$). Тогда поле $\vec{v}(x)$* **локально гамильтоново**, *т.е. в окрестности любой из точек M существует функция $H(x)$ такая, что $\vec{v}(x)$ – гамильтоново векторное поле, порождаемое $H(x)$.*

Замечание 1 *Поле $\vec{v}(x)$ не обязательно гамильтоново, поскольку функция $H(x)$ не обязательно однозначно продолжается на всё M. Интересные примеры такого типа обсуждаются в обзоре [4].*

Список литературы

[1] В.И.Арнольд. “Математические методы классической механики”. М. Наука, 1974.

[2] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М.: Наука. 1986.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория ” УМН, **44**, 6, 30-98 (1989)

[4] С.П.Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса” УМН, **37**, 5, 3-49 (1982)