Литература

Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М., Квантовая механика $$1-5

Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М., Механика (1988) $$ 1-5,40,43,44.

В.М. Галицкий Б.М. Карнаков В.И. Коган, Задачи по квантовой механике.

Лаврентьев Шабат, Методы теории функций комплексного переменного.

ТФКП. Повторение

Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций. 1972,

Задачи 1.06, 1.09, 1.11, 1.13, 1.16, 1.20, 1.21. (сделать к 11.09.12)

Линейные операторы

Задача **1**

Доказать равенство:

$$\begin{aligned} &a)\ [x, \partial_x^2] = -2\partial_x, \\ &b)\ [x, \partial_x^n] = -n\partial_x^{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

c) Пусть физические величины x и L обладают операторами $\widehat{x}$ и $\widehat{L}$ и одновременно не измеримы. Определить квантово-механический оператор, который бы соответствовал произведению этих физических величин.

Задача **2**. (Второе тождество Хаусдорфа)

Пусть операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ таковы, что

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{C}, \quad \text{где } \widehat{C} \ - \ \text{оператор},$$
$$[\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] = \alpha, \quad [\widehat{B}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] = \beta,$$

где α, β -числа. Используя метод, предложенный на занятии, доказать тождество

$$e^{\widehat{A}} e^{\widehat{B}} = e^{\widehat{A} + \widehat{B} + \frac{\widehat{C}}{2} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2}}. \tag{2}$$

Задача **3**

Разложением в интеграл Фурье доказать следующее равенство для δ-функции

$$\delta(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \tag{3}$$

Задача **4**

Найти базис, состоящий из собственных функций векторного оператора $\widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla$, где $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. (Собственная функция векторного оператора должна быть собственной для каждой компоненты оператора в отдельности.) Показать, что оператор обладает непрерывным спектром, состоящим из произвольно-направленных векторов $\mathbf{p}$ любой длины. Нормировать собственные функции стандартным условием $\int \Psi_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}'} d^3\mathbf{r} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

Ответ:

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{4}$$

Задача **5**

Оператор потенциальной энергии кулоновского взаимодействия представляется обычной функцией

$$U(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{r}, \quad \text{где } r = |\mathbf{r}|. \tag{5}$$

Найти матрицу этого оператора в базисе (4)

Ответ:

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2}. \tag{6}$$

Задача **6**

Найти собственные функции оператора:

$$\begin{aligned} &a)\ \widehat{a}_1 = x - d/dx, \\ &b)\ \widehat{a}_2 = x + d/dx, \\ &c)\ \widehat{a} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Проверить соотношение полноты для каждого набора собственных функций из a), b).

Ответ:

$$a)\ \Psi_f(x) = C \exp\left[\frac{(x-f)^2}{2}\right],$$
$$b)\ \ \Psi_f(x) = C \exp\left[-\frac{(x-f)^2}{2}\right],$$

где f-любое комплекснозначное число $f = f_1 + if_2$.

$$c)\ \lambda = 0, \quad \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$
$$\lambda = 1, \quad \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 7 Сферические функции Лежандра, соответствующие полному моменту импульса $L = 1$ определяются соотношением

$$Y_{1,0} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta,$$
$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi},$$

Убедиться в том, что они правильно нормированы и ортогональны друг другу.

(сделать к 15.09.12)