Литература

Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М., Квантовая механика $$6,8,9,10.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М., Механика (1988) $$ 1-5,40,43,44.

Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций. 1972,

Задачи 3.02, 3.31, 3.79, 4.07(1-4)

Линейные операторы

Задача **1**

Найти коммутаторы операторов:

a) $[x_i, \widehat{p}_k]$, могут ли быть координата y и импульс p_z быть одновременно измеряны?

b) $[f(\mathbf{r}), \widehat{\mathbf{p}}]$,

c) $[e^{i\mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{p}}/\hbar}, \mathbf{r}]$.

d) Пусть $\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + i\widehat{p})$, найти $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]$,

e) Найти оператор $\mathbf{r}(t) = e^{i\widehat{H}t/\hbar}\mathbf{r}e^{-i\widehat{H}t/\hbar}$, где $\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m}$.

В задании *a*) индексы i, k нумерует x, y, z-компоненты пространства. Ответы:

$$
\begin{aligned}
&a)\ i\hbar\delta_{ik}\\
&b)\ -i\hbar\nabla f(\mathbf{r}),\\
&c)\ \mathbf{a}e^{i\mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{p}}},\\
&d)\ \hbar,\\
&e)\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{r} + \frac{\widehat{\mathbf{p}}}{m}t.
\end{aligned}
$$

Задача **2**

. Решить с помощью матричной экспоненты систему:

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1 - 2x_2,\\
\dot{x_1} &= x_1 - x_2.
\end{aligned}
$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$x(t) = e^{\widehat{A}t}x(0),$$

$$\text{где}\quad e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Задача **3***

. Найти вид опрераторов $\widehat{r^{-1}}$ и $\widehat{r^{-2}}$ в импульсном представлении в трехмерном пространстве. Проверить равенство:

$$\widehat{r^{-1}}\widehat{r^{-1}} = \widehat{r^{-2}}. \tag{1}$$

Используя метод, предложенный на занятии, доказать тождество

Ответ: Матрица (ядро) оператора

$$
\begin{aligned}
\widehat{r^{-1}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} &= \frac{1}{2\pi^2\hbar^2(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2},\\
\widehat{r^{-2}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} &= \frac{1}{4\pi\hbar^2|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|}.
\end{aligned}
$$

Для проверки соотношения (1) необходимо доказать, что

$$\widehat{r^{-2}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = \int d\mathbf{p}''\widehat{r^{-1}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}''}\widehat{r^{-1}}_{\mathbf{p}'',\mathbf{p}'} \tag{2}$$

Задача **4**

а) Записать принцип Мопертюи для свободного движения тела в однородном поле тяжести. Получить уровнение траектории в форме $z(x)$ где z-высота полета.

b) Записать уравнения Эйлера-Лагранжа и получить дифференциальное уравнение траектории.

c)* Решить уравнение и получить параболическую траекторию движения.

Задача **5**

Рассмотреть частицу в поле квазиупругой силы(одномерный осциллятор):

$$U(x) = \frac{m\omega^2x^2}{2}, \tag{3}$$

где m, ω масса и угловая частота осциллятора.

a) Получить Лагранжиан функцию Гамильтона.

b) Записать уравнения Гамильтона.

c) Записать уравнение Гамильтона-Якоби.

d)* Найти решение уравнений Гамильтона, удовлетворяющие уловиям: $x(0) = x_1$, $x(T) = x_2$. Для полученного решения вычислить действие: $S = \int_0^T L\,dt$. Убедиться, что

$$p = \frac{\partial S}{\partial x},\quad E = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4}$$

Ответ:

$$S = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}[(x_1^2 + x_2^2)\cos\omega T - 2x_1x_2]. \tag{5}$$

Задача **6**

(Галицкий, 1.20, 1.22)

(сделать к 22.09.12)