

### Литература

Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М., Квантовая механика §§11,12,13,15,16,17

Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М., Механика (1988) §§ 1-5,40,43,44.

Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций. 1972,

Задачи 17.07, 17.11, 17.06(1), 17.13, 21.01, 28.03(1,3,4) 28.05 (1,5), 28.07(12), 28.25(1,2,11,14)

### Гейзенберговское представление

#### Задача 1

Исходя из определения самосопряженного оператора:

$$\int \psi^* \hat{A} \varphi dq = \int (\hat{A}^\dagger \psi)^* \varphi dq$$

доказать, что  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ .

Обобщить результат:  $(A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n)^\dagger = A_n^\dagger A_{n-1}^\dagger \dots A_2^\dagger A_1^\dagger$ .

#### Задача 2

Пусть состояние одномерной системы задано волновой функцией в координатном представлении:

$$\psi(x) = \frac{C}{x^2 + a^2} \quad (1)$$

а) Найти константу  $C$  из условия нормировки  $\int \psi^* \psi dx = 1$

б) Найти  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$  и среднеквадратичное отклонение  $\delta \bar{x}^2$ ,  $\delta \bar{p}^2$ .

в) Найти волновую функцию  $a(p)$  в импульсном представлении, а также вероятность  $\omega(p)dp$  системе иметь импульс в интервале от  $[p, p + dp]$ .

д) Используя полученные результаты, проверить соотношение неопределенности. Для вычисления интегралов пользуйтесь теоремой о вычетах. Ответ:

$$a) C = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}$$

$$b) \bar{x} = 0, \quad \bar{p} = 0 \quad \delta \bar{x}^2 = \frac{3a^2}{2}, \quad \delta \bar{p}^2 = \frac{\hbar^2}{2a^2}$$

$$c) a(p) = \sqrt{\frac{2\pi a}{L}} e^{-|p|a/\hbar}, \quad \omega(p)dp = \frac{a}{\hbar} e^{-2|p|a/\hbar}$$

#### Задача 3

Рассмотрим задачу о движении частицы в поле тяжести. Направим ось  $x$  вверх. Тогда гамильтониан

системы примет вид:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \alpha \hat{x}, \quad \alpha = mg.$$

Получить выражения для операторов импульса и координаты в гейзенберговской форме:  $\hat{x}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{x} e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ,  $\hat{p}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{p} e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ .

Ответ:

$$\hat{p}(t) = \hat{p} - tmg,$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{\hat{p}}{m}t - \frac{gt^2}{2}.$$

#### Задача 4

Тоже для задачи об одномерном осцилляторе:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (2)$$

Ответ:

$$\hat{p}(t) = \hat{p} \cos \omega t - m\omega x \sin \omega t,$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x} \cos \omega t + \frac{\hat{p}}{m\omega} \sin \omega t.$$

#### Задача 5

Рассмотрим одномерный осциллятор, описываемый гамильтонианом (2). Пусть  $\psi_n$  - его собственная функция, соответствующая собственному значению энергии  $E_n$ . Рассмотрим состояния, описываемые волновыми функциями  $\psi_x = \hat{x}\psi_n$  и  $\psi_p = \hat{p}\psi_n$ . Зададимся вопросом, какому состоянию системы они соответствуют. Для этого подействуем гамильтонианом на состояние  $\psi_x$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_x &= \hat{H}\hat{x}\psi_n = [\hat{H}, \hat{x}]\psi_n + \hat{x}\hat{H}\psi_n = \\ &= -\frac{i\hbar\hat{p}}{m}\psi_n + E_n\hat{x}\psi_n = -\frac{i\hbar}{m}\psi_p + E_n\psi_x. \end{aligned}$$

Видно, что под действием гамильтониана состояния  $\psi_x$  и  $\psi_p$  перемешиваются. Можно подобрать линейные комбинации состояний  $\psi_x$  и  $\psi_p$ , которые будут собственными функциями гамильтониана (2). Их будет две. Найти обе. Каким собственным энергиям будут соответствовать данные состояния?

#### Задача 6

Галицкий: 1.26, 1.16

(сделать к 06.10.12)