I. Полезные формулы

Формула Хаусдорфа для операторов с c-числовым коммутатором $[A,B]=c$

$$e^Ae^B=e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{1}$$

Формула Адамара для произвольных операторов

$$e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}=B+\lambda[A,B]+\frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]]+... \tag{2}$$

Полиномы Эрмита

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{3}$$

β-функция Эйлера

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{4}$$

Зеркальное соотношение Эйлера

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \tag{5}$$

II. Когерентные состояния

На лекции были рассмотрены состояния, являющиеся собственными функциями оператора уничтожения a: $a|\varphi\rangle=\varphi|\varphi\rangle$, где φ - произвольное комплексное число.

Была также получена явная формула для такого состояния:

$$|\varphi\rangle=C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varphi a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle=Ce^{\varphi a^\dagger}|0\rangle, \tag{6}$$

где нормировочная константа C была опущена на лекции.

a. Используя тождество Хаусдорфа, найти нормировочную константу C.

A. Соотношение неопределённости

Чем примечателен класс когерентных состояний? Оказывается, эти состояния минимизируют соотношение неопределённости. А именно, в осцилляторе, находящимся в когерентном состоянии, неопределённость координаты и импульса связаны соотношением:

$$\langle(x-\bar{x})^2\rangle\langle(p-\bar{p})^2\rangle=\frac{1}{4}, \tag{7}$$

где x и p - операторы координаты и импульса частицы, а $\bar{x}=\langle x\rangle$ и $\bar{p}=\langle p\rangle$ - их средние значения. Откуда берутся соотношения неопределённости? Предположим, даны два некоммутирующих оператора физических наблюдаемых A и B. Как известно, операторы физических наблюдаемых должны быть самосопряжёнными, так что $A^\dagger=A$ и $B^\dagger=B$. Тот факт, что операторы не коммутируют означает, что соответствующие им физические наблюдаемые не могут одновременно иметь определённые значения (не существует базиса состояний, в котором оба оператора были бы одновременно диагональными). Итак, пусть операторы не коммутируют и их нетривиальный коммутатор: $[A,B]=iC$, где C - должен быть самосопряжённым. Обозначим соответствующие средние значения $\langle A\rangle=\bar{A}$, $\langle B\rangle=\bar{B}$, $\langle C\rangle=\bar{C}$. Тогда можно показать[1], что

$$\langle(A-\bar{A})^2\rangle\langle(B-\bar{B})^2\rangle\geq\frac{1}{4}\bar{C}^2. \tag{8}$$

Напомним как это делается. Пусть $|\Psi\rangle$ - произвольное нормированное состояние. Рассмотрим состояние:

$$|\Psi_1\rangle=(\alpha A_1+iB_1)|\Psi\rangle, \tag{9}$$

где $A_1=A-\bar{A}$ и $B_1=B-\bar{B}$. Имеем:

$$\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle=\alpha^2\langle A_1^2\rangle-\alpha\bar{C}+\langle B_1^2\rangle\geq 0, \tag{10}$$

где угловые обкладки $\langle A_1^2\rangle\equiv\langle\Psi|A_1^2|\Psi\rangle$ означают усреднение по состоянию $|\Psi\rangle$. Поскольку слева стоит квадратичный полином по α, то его дискриминант должен быть неположительным, так как полином всегда неотрицателен, т.е.

$$\langle A_1^2\rangle\langle B_1^2\rangle\geq\frac{\bar{C}^2}{4} \tag{11}$$

Равенство в (11) достигается, когда

$$(\alpha A_1+iB_1)|\Psi\rangle=0,\quad\text{или}$$
$$(\alpha A+iB)|\Psi\rangle=\varphi|\Psi\rangle, \tag{12}$$

где $\varphi=\alpha\bar{A}+i\bar{B}$. То есть когда состояние $|\Psi\rangle$ - собственное состояние оператора $\alpha A+iB$. В случае гармонического осциллятора

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2} \tag{13}$$

в качестве операторов A и B можно взять оператор координаты и импульса

$$A=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x,\quad B=\frac{p}{\sqrt{2m\omega}},\quad\alpha=1 \tag{14}$$

Тогда, собственное состояние оператора уничтожения

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\Big(x+\frac{i}{m\omega}p\Big) \tag{15}$$

есть состояние, минимизирующее соотношение неопределённости для координаты и импульса в осцилляторе.

b. Покажите, что вектор когерентного состояния, с собственным значением φ имеет в координатном представлении вид:

$$|\varphi\rangle = \text{const}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2}+\sqrt{2m\omega}x\varphi} \tag{16}$$

Состояние $|\varphi\rangle$ не является собственным вектором гамильтониана осциллятора и, следовательно, не является стационарным. Если, однако, позволить некоторым параметрам вектора $|\varphi\rangle$ зависеть от времени, то можно добиться, чтобы он удовлетворял полному уравнению Шредингера:

$$H|\varphi\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle \tag{17}$$

c. Найдите нормированный вектор когерентного состояния в координатном представлении, являющийся решением уравнения Шредингера. Найдите также плотность распределения частицы по координатам.

B. Осциллятор и полиномы Эрмита

d. Используя явный вид волновой функции осциллятора в координатном представлении

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2}x^2} H_n\left(x\sqrt{m\omega}\right) \tag{18}$$

и оператора уничтожения (15) показать, что

$$a\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x) \tag{19}$$

C. Базис когерентных состояний

e. Показать, что скалярное произведение любых 2 нормированных когерентных состояний равно

$$\langle\theta|\varphi\rangle = e^{-\frac{|\theta^2|}{2}-\frac{|\varphi^2|}{2}+\bar{\theta}\varphi} \tag{20}$$

Здесь черта над θ означает комплексное сопряжение. Оказывается, когерентные состояния образуют базис в фоковском пространстве. Тот факт, что существует ненулевое скалярное произведение любых двух векторов означает, что их просто слишком много. Такой базис называют переопределённым.

III. Вторичное квантование

f. Гамильтониан системы свободного бозонного газа в представлении вторичного квантования равен

$$H = \sum_p \varepsilon_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}, \tag{21}$$

где суммирование ведется по одночастичным состояниям с всевозможным импульсом $\mathbf{p}$. Используя выведенные на лекции коммутационные соотношения

$$[a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] = \delta_{\mathbf{pq}}, \tag{22}$$

найти гейзенберговское представление операторов рождения и уничтожения $a^\dagger_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}$:

$$a_{\mathbf{p}}(t) = e^{iHt}a_{\mathbf{p}}e^{-iHt}, \quad a^\dagger_{\mathbf{p}}(t) = e^{iHt}a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-iHt} \tag{23}$$

Убедиться в том, что для гейзенберговских операторов рождения и уничтожения также выполняются коммутационные соотношения

g. Найдите вид гейзенберговского представления оператора когерентного состояния $A = e^{\varphi a^\dagger}$ для гамильтониана осциллятора

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{24}$$

IV. Метод Лапласа

A. Решение уравнения Бесселя

h. * На семинаре мы разобрали полное решение задачи об осцилляторе. В частности, нами был разобран метод упрощения дифференциального уравнения. Оказалось, что если мы знаем приближенное асимптотическое решение дифференциального уравнения $\psi_{\text{as}}(x)$, то оказывается удобным поиск полного решения в виде $\psi_{\text{as}}\varphi(x)$, где на функцию $\varphi(x)$ получается более простое дифференциальное уравнение.

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0 \tag{25}$$

здесь ν - удобно считать произвольным положительным действительным параметром, а x - действительное.

Постройте решение данного уравнения в виде контурного интеграла. Выберете контур так, чтобы решение было ограниченным при $x \to 0$ и $x \to +\infty$. Деформируйте контур так, чтобы ответ был записан в виде интеграла по конечному или бесконечному прямолинейному отрезку. Нормируйте решение условием:

$$u(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad x \to 0 \tag{26}$$

Получите из данного интеграла хорошо известную асимптотику функции Бесселя при $x \to +\infty$

B. Решение уравнения Шредингера с одномерным Кулоном

Рассмотрим одномерное кулоновское взаимодействие вида

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x}, & x > 0, \\ +\infty, & x \leq 0 \end{cases} \tag{27}$$

i. Решая соответствующее уравнение Шредингера методом Лапласа, найдите уровни энергии в такой системе для частицы массой m.

V. Метод перевала

j. * Найти асимптотику интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-3}^{3} \cos(\lambda(x^3 + 3x))dx \tag{28}$$

и приближённо найти корни уравнения при $I(\lambda) = 0$ при $\lambda \gg 1$

VI. Ответы

a. $C = e^{-|\varphi|^2}$

b.

c. $\langle x|\varphi\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{ -\frac{\varphi_0^2}{2}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right) - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \sqrt{2m\omega}x\varphi_0 e^{-i\omega t}\right\}$, здесь $\varphi_0 = \varphi(0)$,

$P(x,t) = |\langle x|\varphi\rangle|^2$

$= \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{ -m\omega\left(x - \sqrt{2}m\omega\varphi_0 \cos\omega t\right)^2\right\}$

d.

e.

f. $a_{\mathbf{p}}(t) = a_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}$, $a^\dagger_{\mathbf{p}}(t) = a^\dagger_{\mathbf{p}} e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}$

g. $A(t) = e^{-i\omega\varphi t} e^{\varphi a^\dagger}$,

h. $J_\nu(x) = \frac{(2x)^\nu e^{-ix}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 dt e^{2ixt} t^{\nu - \frac{1}{2}} (1-t)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$,

i. $E_n = -\frac{m\alpha^2}{2n^2}$

j. $I(\lambda) = \frac{1}{15\lambda}\sin(36\lambda)$.

[1] В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган, Задачи по квантовой механике (1981).

[2] Л.Д. Ландау Е.М. Лифшиц, Квантовая механика $$13,16,23,61,64,65, (1989).

[3] Н.Г. де Брейн, Асимптотические методы в анализе Главы 4,5.