

Московский Институт Стали и Сплавов

Лекции по математическим методам физики
конденсированного состояния



Я.И. Родионов

Москва – 2011

Введение

В настоящем сборнике я собрал лекции, прочитанные мной студентам МИСиС и института теоретической физики Ландау. Выбор тем может показаться экстравагантным. Я, однако, не стремился к полноте освещения, а скорее хотел подробно рассказать те темы, с которыми сталкивался при работе и которые были мне интересны. Излагая материал, по возможности, элементарно, я постарался сохранить дух лекционной аудитории: атмосферу непосредственного контакта рассказчика и слушателя. На сколько мне это удалось - судить читателю.

Оглавление

Введение	i
Оглавление	ii
1 Математический экскурс	1
§1 Сведения из теории функций комплексного переменного	1
§2 Немного о Γ -функции.	3
§3 Расчёт бесконечных сумм	8
§4 Разложение функции на простые дроби	8
§5 Разложение функции в бесконечное произведение	11
§6 Расчёт бесконечных произведений	12
§7 Необычные бесконечные произведения	12
§8 Метод преобразования Меллина	15
§9 Гипергеометрическая функция	19
§10 Метод Лапласа	20
§11 Метод перевала	24
§12 Приложение. Семинар по эффекту Ааронова-Бома.	49
§13 Уравнения с линейными коэффициентами	53
§14 Примеры решения уравнений методом Лапласа	55
§15 Ответы	65
§16 Полезные формулы	65
§17 Когерентные состояния	66
§18 Конформные отображения и двумерная электростатика	71
2 Физические приложения	77
§1 Улучшенный метод ВКБ	77
§2 Кратко о вторичном квантовании	104
§3 Базис когерентных состояний	107
§4 Квантование простейших полей	107
§5 Семинар по квантованию кондактанса	107

ОГЛАВЛЕНИЕ

iii

§6	Линейный отклик и запаздывающая функция Грина . . .	123
§7	Функциональный интеграл в квантовой механике . . .	127
§8	Основы бозонизации	128
§9	Семинар по универсальному сопротивлению	134
§10	Семинар по фермиевской сингулярности	134
§11	Двугорбый потенциал. Инстантоны.	134
3	Решения	135
	Литература	145

Глава 1

Математический экскурс

В эту главу я включил изложение метода перевала и метод Лапласа решения линейных дифференциальных уравнений. В своем рассказе я решил не стремиться к математической строгости, думаю, она лишь мешает пониманию сути излагаемых методов. Те исключительные случаи, когда пренебрежение строгостью приводит к неправильным результатам, как правило, становятся предметами специальных исследований и при первом знакомстве забудем о них.

§1 Сведения из теории функций комплексного переменного

Напомним читателю несколько важных определений, с которыми мы будем работать. Нам будут часто попадаться функции, довольно простые по своей сути. Одна из таких функций:

Мероморфная функция - функция, единственными особенностями которой в открытой комплексной плоскости являются полюсы.

Под открытой комплексной плоскостью я подразумеваю комплексную плоскость без бесконечно удалённой точки. Такая плоскость обозначается C (комплексная плоскость с бесконечностью обозначается через \bar{C}). Например, $\sin z$, $\cos z$, $1/\sin z$, $1/(z - 1)$ - мероморфные функции. Причём первые две вообще не имеют полюсов

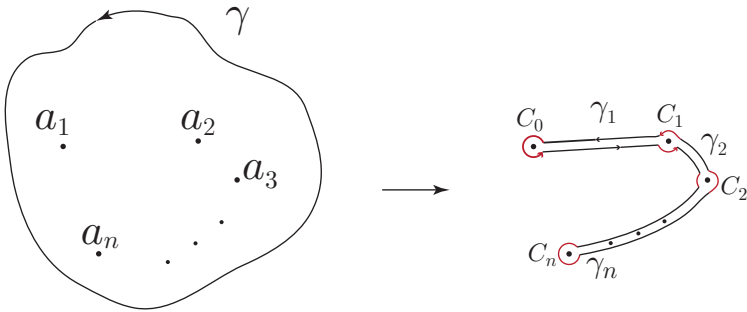


Рис. 1.1: Деформация контура $\gamma \rightarrow \gamma'$, доказывающая теорему Коши.

в S , то есть являются *целыми*. Оказывается, они наиболее полно поддаются исследованию. Для них справедлива теорема Коши.

Теорема Коши о вычетах Интеграл по замкнутому контуру от мероморфной функции равен сумме вычетов в полюсах функции внутри контура.

$$\int f(z) dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{res}_{z=a_i} f(z) \quad (1.1)$$

Наглядная геометрическая интерпретация теоремы становится понятной из 1.1. В самом деле, в силу аналитичности функции, интеграл не изменяется при деформации контура γ , не затрагивающей особых точек. Действительно, аналитическая функция $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ подчиняется условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.2)$$

Интеграл в комплексной плоскости разложим на два действительных интеграла.

$$\int f(z)_\gamma dz = \int_\gamma (U dx - V dy) + i \int_\gamma (V dy - U dx) \quad (1.3)$$

Тогда условия Коши-Римана 1.2 превращаются в теорему Остроградского-Гаусса для контурных интегралов в векторном анализе. Поэтому контур можно деформировать так как это указано на Рис. 1.1. Далее, интегралы вдоль участков $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

сокращаются, поскольку каждый из них проходится по одному разу в противоположных направлениях. В свою очередь, каждый интеграл вдоль маленькой окружности, обходящей полюс, равен вычету функции $f(z)$ в данной точке. Поясним это на примере. Рассмотрим какой-нибудь полюс a_i и рассчитаем интеграл вдоль окружности вокруг него. Пусть порядок полюса k . Тогда функция $f(z)$ может быть представлена в виде ряда Лорана по степеням $(z - a_i)$. Ряд будет состоять из регулярной части, положительным степеням, и сингулярной части $\psi(z)$, называемой также *главной*, по отрицательным степеням $(z - a_i)$. Регулярная часть ряда аналитична в точке a_i и не дает вклада в интеграл по замкнутой окружности. Запишем главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ с центром в точке a_i в виде

$$\psi(z) = \frac{c_{-n}}{(z - a_i)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - a_i)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a_i} \quad (1.4)$$

Заменяя $z = a_i + \varepsilon e^{i\varphi}$, где ρ - стремящийся к нулю радиус окружности, и φ - фаза комплексного числа, интегрируем:

$$\oint f(z) dz = \oint \psi(z) dz = 2\pi i c_{-1} \quad (1.5)$$

Коэффициент c_{-1} и является вычетом функции $f(z)$ в полюсе a_i . Принимая во внимание разложение 1.4, получаем формулу для вычета в полюсе порядка n

$$\operatorname{res}_{z=a_i} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a_i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z) (z - a_i)^n. \quad (1.6)$$

Поэтому справедлива теорема Коши.

Лемма Жордана Если на некоторой последовательности дуг окружностей $C_{R_n} : |z| = R_n$, $\operatorname{Im} z > -a$ ($R_n \rightarrow \infty$, a - фиксировано) функция $g(z)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg z$, то для любого положительного числа λ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (1.7)$$

§2 Немного о Γ -функции.

Представление Ганкеля для Γ -функции

Тождество Эйлера.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (1.8)$$

Вспомним определение Γ -функции.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.9)$$

Видно, что Γ -функция хорошо определена лишь тогда, когда её аргумент положителен $x > 0$ (для простоты сейчас мы считаем его действительным). Докажем, в таком случае, тождество сначала для случая

$$0 < x < 1, \quad (1.10)$$

а потом подумаем как его обобщить. Произведение запишем в виде повторного интеграла, который, тут же превратим в двойной:

$$I = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \iint_{R^+} e^{-(t+u)} t^{x-1} u^{-x} dt du \quad (1.11)$$

где R^+ обозначает положительный квадрант плоскости tu . Видно, что подынтегральное выражение

$$e^{-(t+u)} t^{x-1} u^{-x} dt du = e^{-(t+u)} \left(\frac{t}{u}\right)^x \frac{dt}{t} dx, \quad (1.12)$$

компонуется в форму, подсказывающую удобную замену переменных $p = t+u$, $q = t/u$. Непосредственно проверяется, что при отображении $(t, u) \rightarrow (p, q)$ положительный квадрант плоскости tu переходит в положительный квадрант плоскости pq . Действительно, для этого достаточно убедиться, что граница перейдет в соответствующую границу. Рассмотрим полуось u : $t = 0$, $u \geq 0$, тогда $p = u \geq 0$ и $q = 0$. Таким образом положительная полуось u переходит в положительную полуось p . Для того, чтобы понять во что перейдет полуось t , необходимо немного отступить от неё вправо и рассмотреть полуось t как предел t_ε : $u = \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $t \geq 0$. Тогда образ t_ε суть луч $q = p/\varepsilon - 1$, $p \geq \varepsilon$, совпадающий с положительной полуосью q , в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. Рис. 1.24). Далее, якобиан перехода равен

$$J = \frac{p}{(1+q)^2}$$

Тогда получим интеграл

$$I = \iint_{R^+} e^{-p} \frac{q^{x-1}}{1+q} dp dq. \quad (1.13)$$

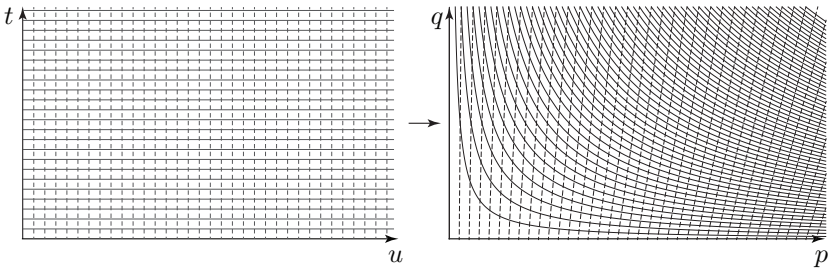


Рис. 1.2: Отображение $(t, u) \rightarrow (p, q)$.

Интеграл по p легко берется, в результате чего возникает одномерный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{q^{x-1}}{1+q} dq. \tag{1.14}$$

Видно, что он сходится в области 1.10. Для того, чтобы взять его необходимо рассмотреть контур на Рис. 1.3. Коротко напомним как это делается. Функция t^x не является однозначной функцией на комплексной плоскости t в силу того что аргумент комплексного числа t определен с точностью до $2\pi n$.

Чтобы сделать функцию однозначной, необходимо разрезать комплексную плоскость из точки ветвления $t = 0$. Учитывая пределы интегрирования в 1.14, нам необходим разрез $t, t \in [0, \infty]$. Тогда:

$$t^x = \begin{cases} |t|^x, & \text{на верхнем берегу} \\ |t|^x e^{2i\pi x}, & \text{на нижнем берегу} \\ |t|^x e^{i\pi x}, & \text{на отрицательной} \\ & \text{полуоси} \end{cases} \tag{1.15}$$

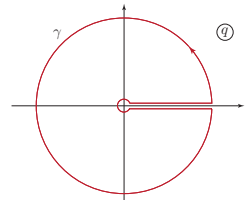


Рис. 1.3: Контур интегрирования

Интеграл по контуру γ рассчитывается единственным вычетом в простом полюсе $q = -1$.

$$I(e^{2\pi i(x-1)} - 1) = 2\pi i e^{i\pi(x-1)} \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{1.16}$$

Откуда и получаем окончательное выражение 1.8. Формула Эйлера нами доказана лишь для интервала 1.10. Сила комплексного анализа,

однако, в том, что соотношение нередко можно считать справедливым за область параметров, ограниченных выводом. Действительно, перепишем соотношение 1.8 в виде

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x) \sin \pi x} \quad (1.17)$$

Очень важно, что правая часть не теряет смысла и при отрицательных x (за исключением несущественного счётного множества нулей \sin). Определим теперь Γ -функцию на всей действительной оси следующим образом:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, & x > 0 \\ \frac{\pi}{\Gamma(1-x) \sin \pi x}, & x \leq 0, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad (1.18)$$

Таким образом, вторая строчка служит продолжением Γ -функции на отрицательную полуось. Ключевым моментом является то, что есть подмножество $0 < x < 1$, содержащее бесконечное число точек комплексной плоскости, на котором обе функции регулярны и совпадают. В этом случае построенное продолжение единственно. В комплексном анализе доказывается соответствующая теорема. В этом и состоит процедура аналитического продолжения. Она является мощным средством расчёта задач квантовой теории поля. Теперь я приведу ещё более удивительное аналитическое продолжение, связанное с другим знаменитым в математике именем.

Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t} t^{-z} dz \quad (1.19)$$

по контуру, представленному на Рис. 1.4(a). Заметим, что интеграл

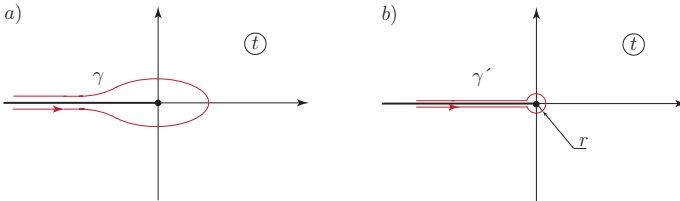


Рис. 1.4: Контур Ганкеля для Γ -функции.

хорошо определен для любых комплексных значений z . Если,

однако, мы на время ограничимся значениями $\operatorname{Re} z < 1$, то контур можно легко деформировать (см. Рис. 1.4(b)). При этом интеграл вдоль маленькой окружности ведет себя как r^{1-z} и стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. А интегралы вдоль участков прямых совпадают с точностью до постоянного множителя. Теперь обратим внимание на то, что при нецелых z функция t^{-z} не однозначна; для ее однозначного определения в комплексной плоскости необходимо сделать разрез. Единственный не пересекающий контура интегрирования разрез получается удалением отрицательной горизонтальной полуоси. Считая аргумент t на верхнем берегу разреза равным π , а на нижнем $-\pi$, получаем:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} \right) \int_r^\infty e^t t^{-z} dz \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1-z) \quad (1.20)$$

Вспомним теперь тождество Эйлера 1.8. Тогда

$$I(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \quad (1.21)$$

Таким образом мы можем написать:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^t t^{-z} dz \quad (1.22)$$

Это и есть тождество Ганкеля для Γ -функции. Поскольку изначально интеграл был хорошо определен для любых значений z , то и равенство 1.22 выполняется для всех z .

Аналитическое продолжение ζ -функции Римана. ζ -функция Римана определяется следующим рядом:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (1.23)$$

Нетрудно видеть, что стоящая справа сумма сходится лишь при $x > 1$. Таким образом ζ -функция определена лишь для $x > 1$. Можно ли придумать функцию, регулярную и при $x < 1$, такую, что она совпадает с 1.23 при $x > 1$. Оказывается да, можно. Следуя Риману[2], рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \quad (1.24)$$

Разлагая в ряд подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$$

получим

$$I(x) = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (1.25)$$

Таким образом интеграл 1.24 даёт интегральное представление ζ -функции Римана. Видно, что он, как и ζ -функция хорошо определен лишь при $x > 1$.

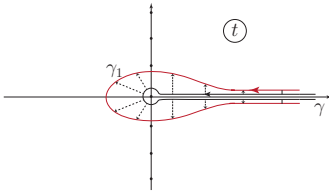


Рис. 1.5: Деформация контура интегрирования для интеграла 1.24

Возьмём теперь интеграл 1.24 методом теории функции комплексного переменного. Для этого рассмотрим его вдоль контура γ в плоскости комплексной переменной t (см. рис. 3.3). Теперь мы делаем следующий трюк. Значение интеграла не изменится если мы непрерывно сдеформируем контур так, что он не пройдет в опасной близости точки ветвления $t = 0$ (контур γ_1).

§3 Расчёт бесконечных сумм

Здесь мы сначала обсудим важную в приложениях задачу о разложении функции в ряд на простые дроби.

Нашей главной целью является изучение метода перевала, и, коль скоро речь пойдет об интегралах, давайте немного разогнёмся и докажем тождество Эйлера для Γ -функций. Мы им будем постоянно пользоваться в дальнейшем, так что уметь его доказывать просто наш долг.

§4 Разложение функции на простые дроби

Центральную роль здесь играет теорема Коши.

Теорема Коши Пусть мероморфная функция $f(z)$ растёт не быстрее чем степень z при $z \rightarrow \infty$, т.е. существует конечный предел

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z^p$, где $p \geq 0$ - целое. Для удобства будем считать, что функция не имеет полюса в точке $z = 0$ ¹

Тогда функцию $f(z)$ можно разложить в ряд на простые дроби:

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\}, \quad (1.26)$$

где $g_n(z)$ - главные части $f(z)$ в её полюсах a_n и

$$h(z) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad h_n(z) = \sum_{k=0}^p \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad (1.27)$$

Очевидно, что $h_n(z)$ и $h(z)$ являются просто кусками тейлоровских рядов функций $g_n(z)$ и $f(z)$ с центром в точке $z = 0$.

Доказательство

Ясно, что для доказательства нужно рассматривать интегралы типа Коши $\oint f(t)/(t-z)dt$ по замкнутому кругу большого радиуса $R \rightarrow \infty$. Однако функция $f(z)$ растет как z^p при $z \rightarrow \infty$ и нетрудно понять, что соответствующий интеграл разойдется как R^p на бесконечности. Теперь ясно, что нужно сделать. Мы рассмотрим модифицированный интеграл Коши

$$I(z) = \int_{C_R} \frac{f(t)}{(t-z)t^{p+1}} dz. \quad (1.28)$$

Такой интеграл равен нулю при $R \rightarrow \infty$. (Подынтегральное выражение убывает как $1/t^2$). Теперь давайте уясним что нам нужно получить в конце. Выпишем ряд Тейлора для функций $g_n(z)$. Пусть сама функция $g_n(z)$ имеет полюс порядка m_n в точке a_n . Тогда она выглядит следующим образом:

$$g_n(z) = \frac{c_{-m_n}^{(n)}}{(z-a_n)^{m_n}} + \frac{c_{-m_n+1}^{(n)}}{(z-a_n)^{m_n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(n)}}{(z-a_n)} = \quad (1.29)$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{-k}^{(n)}}{(z-a_n)^k} \quad (1.30)$$

¹ Если $z = 0$ является полюсом функции $f(z)$ с главной частью $g_0(z)$, то разложение 1.26 справедливо для функции $f(z) - g_0(z)$. Или же всегда можно избавиться от полюса в $z = 0$, рассматривая функцию $z^{m_0} f(z)$, где m_0 - порядок полюса.

Её ряд Тейлора степени p :

$$h_n(z) = \sum_{l=0}^p \left(\sum_{k=1}^{m_n} \frac{(-1)^k}{l!} \frac{c_{-k}^{(n)}}{a_n^{k+l}} \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!} \right) z^l \quad (1.31)$$

Таким образом, при доказательстве теоремы нам просто нужно воспроизвести структуру 1.29. Рассчитаем теперь интеграл $??$. Подынтегральное выражение имеет простой полюс в точке $t = z$, полюс порядка $p + 1$ в точке $t = 0$, и полюсы порядка m_n в точках a_n . Интеграл равен сумме вычетов во всех полюсах.

Рассмотрим вычеты в полюсах a_n .

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{t=a_n} \frac{f(t)}{t^{p+1}(t-z)} &= \\ &= \frac{1}{(m_n-1)!} \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}} \sum_{k=1}^{m_n} (t-a_n)^{m_n-k} c_{-k}^{(n)} \frac{1}{t^{p+1}(t-z)} \Big|_{t=a_n} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Перспектива $n - 1$ кратного дифференцирования в формуле 1.32 не выглядит довольно привлекательной. Мы упростим себе задачу сделав следующее преобразование:

$$\frac{1}{t^{p+1}(t-z)} = \frac{1}{tz^{p+1}} \frac{\left(\frac{z}{t}\right)^{p+1} - 1 + 1}{\left(1 - \frac{z}{t}\right)} = \frac{1}{z^{p+1}} \left(- \sum_{l=0}^p \frac{z^l}{t^{l+1}} + \frac{1}{t-z} \right) \quad (1.33)$$

Теперь можно выполнить дифференцирование в 1.32, воспользовавшись биномиальной формулой дифференцирования произведения 2-х функций. Будем иметь ввиду, что дифференцирование происходит в точке a_n . Поэтому при дифференцировании выживают только члены, содержащие $m_n - k$ дифференцирование. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}} \frac{(t-a_n)^{m_n-k}}{t^{l+1}} \Big|_{t=a_n} &= - \frac{(m_n-1)! (-1)^k (l+k-1)!}{(k-1)! l! a_n^{l+k}} \\ \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}} \frac{(t-a_n)^{m_n-k}}{t-z} \Big|_{t=a_n} &= - \frac{(m_n-1)!}{(z-a_n)^k}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{t=a_n} \frac{f(t)}{t^{p+1}(t-z)} \frac{1}{z^{p+1}} \left\{ \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{m_n} \frac{(-1)^k (l+k-1)! z^l}{(k-1)! l! a_n^{l+k}} - \frac{c_{-k}^{(n)}}{(z-a)^k} \right\} = \\ = \frac{1}{z^{p+1}} (h_n(z) - g_n(z)) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Самая сложная часть программы выполнена. Осталось рассчитать вычеты в других полюсах подынтегрального выражения 1.28. Рассчитаем полюс в точке $t = 0$.

$$\operatorname{res}_{t=0} \frac{f(t)}{t^{p+1}(t-z)} = -\frac{1}{z^{p+1}} \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0) z^k}{k!} = -\frac{h(z)}{z^{p+1}}. \quad (1.36)$$

Наконец, полюс в точке z даёт $f(z)/z^{p+1}$. Суммируя по всем полюсам a_n , окончательно получаем:

$$\frac{h(z)}{z^{p+1}} + \frac{1}{z^{p+1}} \sum_n (h_n(z) - g_n(z)) - \frac{h(z)}{z^{p+1}} + \frac{f(z)}{z^{p+1}}, \quad (1.37)$$

что совпадает с утверждением теоремы 1.26

§5 Разложение функции в бесконечное произведение

О сходимости бесконечных произведений

Пусть функция имеет конечную или бесконечную систему нулей в комплексной плоскости: $z = a_n$, $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Пример 1.

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

Задача 1.

$$f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}$$

§6 Расчёт бесконечных произведений

§7 Необычные бесконечные произведения

Об одном любопытном свойстве периодических функций

Эллиптические функции

θ -функция Якоби

Широко изучен класс функций, для которых члены разложения в ряд растут как степень аргумента. Такой вид имеет простейший из всех возможных рядов: ряд геометрической прогрессии

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}, \quad |s| < 1. \quad (1.38)$$

Рассмотрим теперь простейший изученный ряд, являющийся своего рода, дискретной версией интеграла Лапласа, для которого коэффициенты растут как степень степени:

$$\theta_0(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} s^k, \quad (1.39)$$

Здесь s - произвольное комплексное число, а h - параметр, модуль которого меньше единицы. Такой ряд получил название θ -функции Якоби. Множитель $(-1)^n$ - выделен для удобства и мог бы быть, в принципе, поглощен в переменную s . Оставим его всё же в явном виде. Для того, чтобы разложить θ -функцию в бесконечное произведение, попробуем отыскать её нули. Для этого перепишем сумму 1.39 выделив в ней явно чётные и нечётные по k слагаемые.

$$\theta_0(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h^{4k^2} s^{2k} - h^{4k^2+4k+1} s^{2k+1}), \quad (1.40)$$

Заменяем теперь во втором слагаемом 1.42 заменить $k \leftrightarrow -k$.

$$\theta_0(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^{4k^2} s^{2k} (1 - (sh)^{1-4k}), \quad (1.41)$$

Из последнего уравнения мы находим наш первый корень $s = 1/h$. Попробуем таким же способом найти остальные. Для этого

обратим внимание на то, что суммирование в определении θ -функции распространяется на все целые k . Поэтому мы можем не только менять k на $-k$, но так же и сдвигать переменную суммирования как нам заблагорассудится. Так и поступим. Во втором слагаемом формулы 1.42 сделаем замену $k \rightarrow -k + m$, где m любое целое число, и будем искать нуль функции в виде $s = h^\alpha$. Получим следующее выражение

$$\theta_0(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^{4k^2} s^{2k} (1 - h^{(2m+1)(2m+1+\alpha)-4k(2m+1+\alpha)}), \quad (1.42)$$

Видно, что если положить $\alpha = -(2m + 1)$, то правая часть последней формулы тождественно обращается в нуль. Таким образом мы находим бесконечный ряд нулей θ -функции

$$s_m = \frac{1}{h^{2m+1}}. \quad (1.43)$$

Тогда θ -функция должна быть пропорциональна бесконечному полиному, который, удобства ради, мы запишем в симметричном относительно замены $s \leftrightarrow 1/s$ виде

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1}s)(1 - h^{2k-1}s^{-1}) \quad (1.44)$$

Давайте всё же проверим, что данное бесконечное произведение действительно собирается в ряд 1.39 для θ -функции. То есть, найдем разложение функции 1 в ряд Лорана по s

$$f(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s^k. \quad (1.45)$$

Обратим внимание на то, что произведение 1 обладает определённой ключевой симметрией при замене $s \rightarrow h^2 s$. А именно,

легко видеть ¹, что

$$\theta_0(h^2s) = -\frac{1}{hs}f(s). \quad (1.46)$$

Тогда

$$f(h^2s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h^{2k} s^k = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{h} s^{k-1} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{h} s^k.$$

Откуда получаем рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = -a_k h^{2k+1} \quad (1.47)$$

Решая 1.47, получаем

$$a_k = (-1)^k h^{k^2} a_0 \quad (1.48)$$

То есть,

$$f(s) = a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} s^k \quad (1.49)$$

Таким образом, бесконечное произведение $f(s)$ действительно совпадает с θ -функцией Якоби с точностью до постоянного множителя a_0 , который нам предстоит вычислить.

¹ Действительно, сравнивая два разложения

$$\begin{aligned} f(s) &= (1 - hs) \left(1 - \frac{h}{s}\right) \cdot (1 - h^3s) \left(1 - \frac{h^3}{s}\right) \cdot (1 - h^5s) \left(1 - \frac{h^5}{s}\right) \cdot \dots \\ f(h^2s) &= (1 - h^3s) \left(1 - \frac{1}{hs}\right) \cdot (1 - h^5s) \left(1 - \frac{h}{s}\right) \cdot (1 - h^7s) \left(1 - \frac{h^3}{s}\right) \cdot \dots \end{aligned}$$

убеждаемся, что

$$f(h^2s) = \frac{1 - \frac{1}{hs}}{1 - hs} f(s) = -\frac{1}{hs} f(s).$$

§8 Метод преобразования Меллина

Теперь мы займемся построением асимптотик важного класса интегралов при малых значениях параметра

$$I(z) = \int_0^{\infty} g(zx)f(x)dx, \quad z \rightarrow 0. \quad (1.50)$$

Сложность состоит в том, что построить разложение в ряд по возрастающим степеням z даже для совсем незамысловатых интегралов оказывается необычайно тяжело. Рассмотрим, к примеру, связанный с теорией функций Бесселя интеграл:

$$I(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx}(x^2 + 1)^{\nu-1/2}dx \quad (1.51)$$

Пусть $\nu > 0$. Тогда видно, что интеграл расходится как $x^{2\nu}$. Мы делаем вывод, что разложение вокруг $z = 0$ содержит подводные камни. В данном случае легко понять, что положив $z = 0$ мы, тем самым, приближённо заменили $e^{-zx} \approx 1$. Это верно, только до тех пор пока zx не станет ~ 1 . То есть интеграл следует обрезать на $x \sim 1/z$ и тогда

$$I(z) \sim \frac{1}{z^{2\nu}}, \quad z \rightarrow 0. \quad (1.52)$$

Все же сделаем попытку разложить его. Коль скоро на малых z интеграл расходится, будем считать, что интеграл набирается в области $x \sim 1/z \gg 1$. Тогда разложим $(x^2 + 1)^{\nu-1/2}$ по обратным степеням x . Получим

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-zx} C_{\nu-1/2}^n x^{2\nu-1-2n} dx, \quad (1.53)$$

$$C_{\alpha}^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)n!}.$$

При этом ясно, что с некоторого n интегралы в сумме (1.53) начинают расходиться в точке 0. Это свидетельствует о том, что наше разложение по $1/x$ является неприменимым при $|x| < 1$. Мы, тем не менее, регуляризуем эти интегралы, считая их аналитическим продолжением аналогичных им сходящихся. При этом мы оправдываем свои действия тем, что исходный интеграл (1.50) является сходящимся и его значение не должно зависеть от схемы регуляризации промежуточных

вычислений. Итак,

$$I(z) = z^{-2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(2\nu - 2n)}{n!\Gamma(\nu - n + \frac{1}{2})} z^{2k},$$

Воспользовавшись формулой удвоения для Γ -функции¹, а также формулой аналитического продолжения (1.8) получим:

$$I(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2 \sin \pi\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \nu + 1)n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \quad (1.54)$$

Оказывается, в разложении функции $I(z)$ по возрастающим степеням z помимо сингулярного в $z = 0$ ряда (1.54), присутствует так же регулярная часть (по z^{2k}). Наша переупрощённая процедура привела к потере последней.

Как же получить полное разложение? Автору этих заметок не удалось найти внятного элементарного подхода к этой проблеме. Существует, однако, очень удобный метод, который позволяет без труда строить подобные разложения.

Преобразование Меллина

Рассмотрим функцию $f(x)$ и составим интеграл

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(x)x^{z-1} dx \quad (1.55)$$

Функция комплексного переменного $F(z)$ называется образом Меллина функции $f(x)$. Ясно, что сходимость интеграла (1.55) определяется поведением функции $f(x)$ при $x = 0$ и $x = \infty$. Пусть, например

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha}, & x \rightarrow 0 \\ x^{-\beta}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.56)$$

Тогда интеграл (1.55) сходится в полосе $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$. То есть указанная полоса является областью аналитичности функции $F(z)$. Если функция $f(x)$ спадает экспоненциально при больших z , то полоса аналитичности превращается в полуплоскость. В большинстве случаев, преобразование Меллина как раз удобно

¹ $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})$

тем, что полюсу сходимости образа часто удаётся расширить с помощью процедуры аналитического продолжения. Для того, чтобы преобразование Меллина имело практический смысл, необходимо уметь восстанавливать саму функцию $f(x)$ по её образу $F(z)$, т.е. необходимо построить обратное преобразование Меллина.

$$f(x) = \int_C dz F(z) g(x, z). \quad (1.57)$$

Здесь, $g(x, z)$ - неизвестное пока ядро обратного преобразования. Контур C должен принадлежать полюсе аналитичности $F(z)$, скажем $z = a + is$: $\alpha < s < \beta$.

Подставив $F(z)$ из (1.55) и переменив порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty dt f(t) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dz \frac{e^{z \ln t}}{t} g(x, z) = \\ &= \int_0^\infty dt f(t) \underbrace{\int_{-\infty}^\infty i \frac{e^{is \ln t}}{t} g(x, a + is) t^a ds}_{\delta(t-x)}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Вспомним полезное интегральное представление δ -функции:

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{isu} ds$$

А теперь заметим, что аргумент δ -функции всегда можно заменить на произвольную функцию от этого аргумента согласно формуле: $\delta(u) = h'(u)\delta(h(u))$, при условии, что $h(u) = 0$. Для нашей задачи удобно записать:

$$\delta(t-x) = \frac{1}{t} \delta(\ln(t/x)) = \frac{1}{2\pi t} \int_{-\infty}^\infty e^{is(\ln t - \ln x)} ds \quad (1.59)$$

Сопоставляя (1.58) и (1.59) получаем:

$$\begin{aligned} g(x, a + is) &= \frac{1}{2\pi i} e^{-is \ln x} \frac{1}{x^a} = \frac{1}{2\pi i} e^{-(a+is) \ln x} \Rightarrow \\ g(x, z) &= \frac{1}{2\pi i} e^{-z \ln x} = \frac{1}{2\pi i} x^{-z}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Итак, получаем, наконец, обратное преобразование Меллина:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z} dz. \quad (1.61)$$

Самый широко употребляемый результат, связанный с преобразованием Меллина связан с именем Парсеваля.

Формула Парсеваля

Докажем общий результат:

$$\int_0^{\infty} f(xt)g(t)t^{z-1} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)G(z-w)x^{-w} dw. \quad (1.62)$$

Здесь a принадлежит полосам сходимости образа Меллина f и g . Для доказательства разложим $f(xt)$ в интеграл Меллина:

$$f(xt) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)(xt)^{-w} dw. \quad (1.63)$$

Затем подставим это разложение в исходный интеграл:

$$\int_0^{\infty} f(xt)g(t)t^{z-1} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dw F(w)x^{-w} \underbrace{\int_0^{\infty} g(t)t^{z-w-1} dt}_{G(z-w)},$$

что и доказывает обобщённую формулу Парсеваля (1.62). В частном случае $z = 1$ получается обычная формула Парсеваля.

$$\int_0^{\infty} f(xt)g(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)G(1-w)x^{-w} dw. \quad (1.64)$$

Пример 2. Найди образ Меллина функции $f(x) = e^{-x}$

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1} dz = \Gamma(z) \quad (1.65)$$

Изначальная полоса аналитичности образа $0 < \operatorname{Re} z < \infty$ распространяется на всю комплексную плоскость с помощью процедуры аналитического продолжения Γ -функции.

§9 Гипергеометрическая функция

Рассмотрим уравнение:

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0 \quad (1.66)$$

и попытаемся найти его решение, регулярное в точке $z = 0$. Поскольку уравнение - второго порядка, то существует 2 линейно независимых решения. Будем отличать их поведением при $z \rightarrow 0$. Пусть одно решение стремится к 1 при $z \rightarrow 0$, а другое обращается в нуль как степень z : z^δ , где $\delta > 0$. Попробуем их построить.

Применим стандартный способ поиска в виде ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.67)$$

Подставляя ряд в исходное уравнение, имеем:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \left\{ \frac{n(n-1)}{z} (1-z) + (\gamma - [\alpha + \beta + 1]z) \frac{n}{z} - \alpha\beta \right\} \\ (\gamma - [\alpha + \beta + 1]z)a_1 - \alpha\beta a_1 z - \alpha\beta a_0 = 0$$

Далее, простая перегруппировка + смещение индекса суммирования на единицу даёт:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left\{ a_{n+1}(n+1)(n+\gamma) - a_n(n+\alpha)(n+\beta) \right\} z^n + \gamma a_1 - \alpha\beta a_0 = 0.$$

Откуда:

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} a_n, \quad n \geq 1, \quad a_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} a_0 \quad (1.68)$$

Учитывая начальное условие, получаем $a_0 = 1$ и решение принимает вид:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (1.69)$$

или в более коротких обозначениях:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \quad (1.70)$$

где скобки $()_n$ означают $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1) = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$.

$$f''z(1-z) + f'\{\gamma + 2\delta - [\alpha + \beta + 1 + 2\delta]z\} \\ + f\left\{\frac{\delta(\delta-1) + \delta\gamma}{z} - \delta(\delta-1) - \alpha\beta - \delta(\alpha + \beta + 1)\right\} = 0$$

Интегральное представление

(1.71)

Задача 2. Пользуясь интегральным представлением (??) и формулой Парсеваля, найти разложение гипергеометрической функции в ряд вблизи $z = 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) \\ + (1 - z)^{\gamma - \beta - \alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F(\gamma - \alpha, \beta - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - z)$$

(1.72)

§10 Метод Лапласа

Нулевое приближение

Метод Лапласа - есть метод оценки действительных интегралов вида:

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda f(x)} g(x) dx. \quad (1.73)$$

Сначала вспомним как решается простейший случай. А именно, когда функция $f(x)$ аналитична на отрезке $[a, b]$ и имеет максимум в какой-то внутренней его точке. При этом предположим, что функция $g(x)$ никаких особенностей в точке x_0 не имеет и $g(x_0) \neq 0$. В силу того, что $\lambda \gg 1$, функция $\exp(\lambda f(x))$ спадает вблизи максимума очень быстро и хорошо аппроксимируется первым неисчезающим членом ряда Тейлора (см. Рис. 1.240):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ e^{\lambda f(x)} \approx e^{\lambda f(x_0)} e^{\frac{\lambda}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}$$

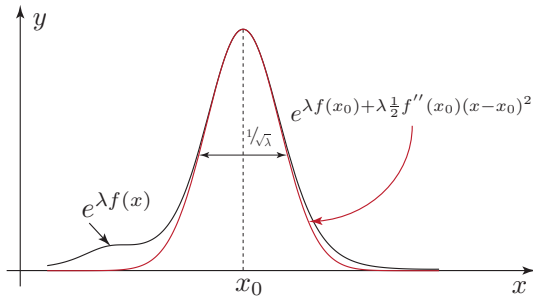


Рис. 1.6: Гауссова аппроксимация интеграла Лапласа.

И для интеграла (1.73) получается асимптотика:

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) + r(\lambda), \quad I_0(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda f''(x_0)}} e^{\lambda f(x_0)} g(x_0) \quad (1.74)$$

где $r(\lambda)$ остаточный член. Это и есть наиболее часто встречающийся в литературе результат.

Полный асимптотический ряд.

Давайте попробуем получить теперь более точное асимптотическое разложение. Дело в том, что в приложениях не всегда можно ограничиться первым неисчезающим членом асимптотики; нередко именно последующие члены имеют первостепенное значение. Таков, например, случай когда $g(x_0) = 0$. Оказывается, не составляет труда получить и полное асимптотическое разложение при больших λ . Здесь я буду следовать изложению книги [?]. Введем новую переменную интегрирования

$$f(x_0) - f(x) = \tau^2. \quad (1.75)$$

Тогда подынтегральное выражение преобразуется к виду:

$$e^{\lambda f(x)} g(x) dx = e^{\lambda f(x_0)} e^{-\lambda \tau^2} g(x(\tau)) x'(\tau) d\tau.$$

Разложим теперь функцию $\mathcal{G}(x) = g(x(\tau)) x'(\tau)$ в полный ряд Тейлора:

$$g(x(\tau)) x'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n. \quad (1.76)$$

Тогда интеграл (1.73) несложно взять

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= e^{\lambda f(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} \tau^{2k} d\tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} \tau^{2k} d\tau &= (-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\lambda f(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2\lambda)^k} \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем полный асимптотический ряд для интеграла (1.73):

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\lambda f(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \frac{(2k)!}{k! 4^k} \frac{1}{\lambda^k} \quad (1.77)$$

Ответ (1.77) выглядит довольно формально. Его связь с простой асимптотикой (1.74) можно проследить, найдя коэффициент c_0 в разложении (1.76). Разложим левую часть (1.75) в ряд до первого неисчезающего слагаемого. Получим

$$\begin{aligned} -\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots = \tau^2 &\Rightarrow \tau = \sqrt{-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0) + \dots}, \\ x'(\tau) = \sqrt{-\frac{2}{f''(x_0)} + \dots} &\Rightarrow c_0 = \sqrt{-\frac{2}{f''(x_0)} g(x_0)}. \end{aligned}$$

Последнее равенство и даёт связь полного асимптотического ряда (1.77) с простейшей асимптотикой (1.74).

Пример 3. Г-функция Эйлера

Найдем два первых члена асимптотического разложения $\Gamma(z)$, при $z \rightarrow \infty$. Для удобства преобразуем интеграл, определяющий Г-функцию

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t+z \ln t} \frac{dt}{t} \quad (1.78)$$

сделав подстановку $t = zs$. Тогда интеграл сведется к удобному для анализа выражению

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^{\infty} e^{z(\ln s - s)} \frac{ds}{s}. \quad (1.79)$$

Поведение интеграла будет определяться точками максимума функции $f(s) = \ln s - s$. Для данной функции существует всего одна такая точка $s = 1$. $f''(s)|_{s=1} = -1$. Если мы ограничимся разложением функции в экспоненте до второго порядка малости по $\varepsilon = s - 1$:

$$f(s) = -1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (1.80)$$

то получим просто формулу Стирлинга:

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z e^{-z}, \quad \text{Формула Стирлинга} \quad (1.81)$$

Найдем следующий член разложения. Согласно общей стратегии вводим замену переменных

$$\tau^2 = -1 - \ln s + s \quad (1.82)$$

Теперь разлагаем функцию $\varepsilon = s - 1$ по степеням τ . Сначала разлагаем τ по ε :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon^2}{3\sqrt{2}} + \frac{7}{36\sqrt{2}}\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (1.83)$$

Обратим внимание: чтобы получить первую исчезающую поправку нулевому приближению (1.74), придется раскладывать τ до третьего порядка по ε (что соответствует разложению $\ln s$ до 4 порядка в (1.82)). Первый член даёт нулевое приближение (формулу Стирлинга), а второй член исчезает при интегрировании. Обращаем ряд (1.83):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{2}\tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}\tau^3 + \mathcal{O}(\tau^4) \Rightarrow \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \frac{\sqrt{2}}{6}\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3). \end{aligned} \quad (1.84)$$

И тогда, по формуле (1.77) получаем более точную формулу Стирлинга:

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \quad (1.85)$$

Полный асимптотический ряд (1.77) подсказывает и общий вид остаточного члена при разложении по формуле Лапласа:

$$I(\lambda) = I_n(\lambda) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)\right) = I_n(\lambda) + r(\lambda), \quad (1.86)$$

$$r(\lambda) = I_n(\lambda) \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \quad (1.87)$$

где $I_n(\lambda)$ оценка, содержащая $n + 1$ первых членов асимптотического ряда.

Упражнения

Задача 3. Найти два первых члена асимптотического разложения функции Макдональда:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \cosh t - \nu t} dt, \quad x \rightarrow +\infty \quad (1.88)$$

Ответ:

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8} \frac{1}{x} \right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.89)$$

Задача 4. Найти два первых члена асимптотического разложения интеграла Лапласа в общем виде:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda f(x)} g(x) dx, \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (1.90)$$

Ответ:

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-f''\lambda}} \left(g - \frac{1}{4f''\lambda} \left[2g'' - 2g' \frac{f'''}{f''} + g \left(\frac{1}{3} \frac{f''''^2}{f''^2} - \frac{f^{(4)}}{2f''} \right) \right] \right), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (1.91)$$

§11 Метод перевала

Предварительные замечания Пусть теперь функция в экспоненте (1.73) - комплекснозначна $f = U + iV$, а интегрирование ведется по произвольному контуру γ в комплексной плоскости. (см. рис.1.7). Параметризацию контура зададим в виде $x(s), y(s)$, где s - текущая длина контура. Рассмотрим интеграл:

$$I(\lambda) = \int_{\gamma} g(z) e^{\lambda f(z)} dz \quad (1.92)$$

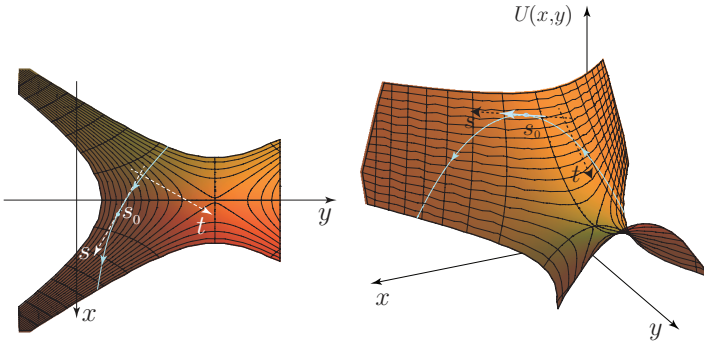


Рис. 1.7: Рельеф $U(x, y)$ и контур интегрирования.

где λ действительно и $\lambda \gg 1$. Поставим задачу найти асимптотику $I(\lambda)$. Предположим, что функция $U(x, y)$ при движении по контуру принимает максимальное значение в некоторой внутренней точке контура $s_0 : z(s_0)$, т.е. производная $U(s) = U(x(s), y(s))$ по направлению вдоль контура в точке z_0 обратилась в нуль $dU(x_0, y_0)/ds|_{s=s_0} = 0$. Казалось бы, интеграл должен по-прежнему определяться окрестностью z_0 . Применима ли здесь та же идея оценки, что и в случае действительном случае? Сделаем расчёт. Для простоты ограничимся первым неисчезающим членом в асимптотике. Схема расчёта будет аналогична действительной: мы разложим функции $U(s)$ и $V(s)$ в ряд по s вблизи точки s_0 до второго порядка малости по $s - s_0$. Затем проинтегрируем по s , расширив пределы интегрирования по s до бесконечности $s \in (-\infty, \infty)$. Тем самым мы пренебрежем отклонением контура от касательного направления в точке z_0 . Это кажется вполне оправданным по той же причине, что и в действительном случае: при $\lambda \gg 1$ величина подынтегрального выражения достаточно быстро спадает. Для удобства осуществим замену переменных $z = x + iy \rightarrow \zeta = s + it$:

$$z = z_0 + (s - s_0 + it)e^{i\alpha}, \tag{1.93}$$

где $\cos \alpha = \dot{x}(s_0)$ - угол наклона контура в точке z_0 . То есть мы проводим действительную ось $s = \text{Re} \zeta$ через точку z_0 , направив её по касательной к контуру γ в этой же точке, а мнимую ось $t = \text{Im} \zeta$ - перпендикулярно ей.

В новых переменных интегрирование происходит уже по

действительной оси s . Вблизи максимума:

$$\begin{aligned} f(s) &= U(s_0) + iV(s_0) + \frac{U''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + iV'(s_0)(s - s_0) \\ &= f(s_0) + \frac{U''(s_0)}{2} \left[(s - s_0) + i \frac{V'(s_0)}{U''(s_0)} \right]^2 + \frac{(V'(s_0))^2}{2U''(s_0)}. \end{aligned}$$

Выделив полный квадрат, получим оценку:

$$I_0(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda U''(s_0)}} \exp[\lambda f(s_0)] \exp\left[\frac{\lambda (V'(s_0))^2}{2U''(s_0)}\right] \quad (1.94)$$

Обратим внимание на первую странность. Для взятия гауссова интеграла мы вынуждены были сместить контур интегрирования с оси s : $s \rightarrow s_1 = s + iV'(x_0)/U''(x_0)$. Таким образом, контур интегрирования, дающий асимптотическую оценку 1.94 не проходит через точку экстремума(!) Видно, что ответ состоит из главной экспоненты $\exp \lambda f(s_0)$ и малого множителя $\exp \lambda \frac{(V'(x_0))^2}{2U''(x_0)}$ (вспомним, что $U''(x_0) < 0$).

Что вызывает сомнение в справедливости оценки (1.94)? Дело в том, что точка максимума функции $U(s)$ на контуре вовсе не является экстремумом для функции $V(s)$. Иными словами, если изменение $U(s)$ в окрестности максимума является величиной второго порядка малости, то изменение $V(s)$ может быть первого порядка малости в силу того, что в общем случае $V'(s_0) \neq 0$. Подынтегральное выражение $\exp \lambda f(z)$ в этом случае будет быстро осциллирующей функцией вблизи s_0 . Эти осцилляции могут нивелировать вклад от больших $U(s)$, обесценив этим саму идею метода Лапласа. Действительно, вполне возможно что осцилляции $V(s)$ в других частях пути интегрирования (где $U(s)$ не обязательно велика) будут малы. В этом случае интеграл будет набираться как раз в указанных частях интервала.

Глядя на выражение (1.94), становится ясно, что подтверждаются наши опасения. Изменяющаяся мнимая часть функции $f(s)$ приводит к большому множителю $\exp \lambda (V')^2 / 2U''$, подавляя вклад от действительной части. Рецепт проверки правильности результата (1.94) можно сформулировать так. Если (1.94) - наилучшая оценка, то величина остаточного члена в асимптотической формуле (1.86) минимальна. Интеграл в левой части остаётся неизменным при любых деформациях контура.¹ С другой стороны,

¹Имеются, конечно, ввиду деформации, не затрагивающие особых точек функции $g(z) \exp[\lambda f(z)]$.

если модуль остаточной части $r(\lambda)$ является минимальным из всех возможных, то сама часть при любых малых деформациях контура $s \rightarrow x + i\epsilon t(s)$, $\epsilon \rightarrow 0$ должна иметь экстремум на контуре. Следовательно $I_0(\lambda)$ так же должен иметь экстремум. Это означает, что изменение $I_0(\lambda)$ при малых деформациях контура должно быть второго порядка малости по ϵ . Представим разложение $I_0(\lambda)$ в ряд Тейлора по ϵ в следующем виде:

$$\frac{\delta I_0(\lambda)}{I_0(\lambda)} = \epsilon \Delta(\lambda) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Мы ожидаем, что $\Delta(\lambda) = 0$. Но расчёт ² даёт следующее асимптотическое разложение для $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \lambda V'(s_0) \cdot \text{const} + \mathcal{O}(1) \quad (1.95)$$

Поскольку в общем случае $V'(s_0) \neq 0$, то нашу асимптотику (1.94) можно улучшить простой деформацией контура. Это означает, что она не даёт верное приближённое значение интеграла (1.73). Как преодолеть эту трудность?

Точки перевала Прежде всего мы делаем любопытное наблюдение. Если нам удастся найти точку на контуре, в которой и $U'(s_0)$ и $V'(s_0)$ равны нулю *одновременно*, то асимптотика (1.94) останется справедливой. Существует очень широкий класс функций комплексной переменной, для которых такие точки существуют в комплексной плоскости. Действительно, это просто критические точки аналитических функций (то есть точки, в которых $f'(z) = 0$). Таким образом можно придумать выход из затруднения при расчёте асимптотики 1.73. При интегрировании мы деформируем контур так, чтобы он прошёл через критическую точку $z_0 = x_0 + iy_0$. В силу теоремы Коши значение интеграла не изменится. Теперь мы вспомним, что функция $U(x, y)$ не имеет максимумов и минимумов в комплексной плоскости. Все экстремальные точки $U(x, y)$ - точки перевала. В этом несложно убедиться с помощью условий Коши-Римана и критерия Сильвестра (см. задачу 6 и решение к ней).

Вопрос теперь состоит в том, в каком направлении пройти критическую точку? Ясно, одно: коль скоро мы вычисляем интеграл, ограничиваясь первыми исчезающими членами ряда Тейлора функции $f(z)$ вблизи z_0 то интеграл будет тем точнее вычисляться, чем быстрее функция $\text{Re } f(z) = U(z)$ спадает на контуре по обе стороны от точки z_0 . С другой стороны нам необходимо потребовать,

² см. Задачу 5 и решение к ней.

чтобы вблизи z_0 мнимая часть $\text{Im} f(z) = V(z)$ как можно меньше менялась вдоль контура. Решим сначала вторую задачу

Линии постоянства $V(x, y)$

Рассмотрим контур $\gamma(t)$ и аналитическую функцию $f(z)$. Каким условиям должен удовлетворять контур на комплексной плоскости, чтобы функция $\text{Im} f(z)$ оставалась неизменной при движении вдоль него? Ясно, что производная от $V(x, y)$ взятая по направлению вдоль $\gamma(t)$ должна обращаться в нуль в каждой его точке. Пусть $\mathbf{l} = (l_x, l_y)$ - касательный к контуру γ вектор. Производная функции $V(x, y)$ по направлению $\gamma(t)$ определяется выражением

$$\frac{\partial V}{\partial x} l_x + \frac{\partial V}{\partial y} l_y = 0 \quad (1.96)$$

Уравнению (1.96) можно удовлетворить, положив, например, $l_x = -\frac{\partial V}{\partial y}$ и $l_y = \frac{\partial V}{\partial x}$. В силу условий Коши-Римана (1.2) мы можем всегда сменить производные:

$$l_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad l_y = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (1.97)$$

Из (1.97) видно, что направление \mathbf{l} совпало с проекцией вектора нормали к поверхности рельефа функции $U(x, y)$ на плоскость xy (Вспомним, что вектор градиента к поверхности $z = U(x, y)$ имеет компоненты $(-\partial U/\partial x, -\partial U/\partial y, 1)$. Но ведь это есть не что иное как направление наискорейшего спуска (подъема) вдоль рельефа $U(x, y)$! В самом деле, геометрически, направление наискорейшего спада (подъема) $U(x, y)$ совпадает с линией пересечения вертикальной плоскости, содержащий вектор нормали с горизонтальной плоскостью (см. рис. 1.8).

Итак, линии $\text{Im} f(x, y) = \text{const}$ - являются линиями наискорейшего спуска функции $\text{Re} f(x, y)$.

Мы приходим к очень красивому обобщению метода Лапласа. Оказывается, условия неизменности вдоль контура $V(x, y)$ и наискорейшего спада $U(x, y)$ являются *взаимобеспечивающими*.

Направление наискорейшего спуска

Теперь мы готовы вычислить угол, под которым контур интегрирования должен проходить перевал, чтобы $\text{Re} f(z)$ спадала максимально быстро. Рассмотрим структуру функции $f(z)$ вблизи

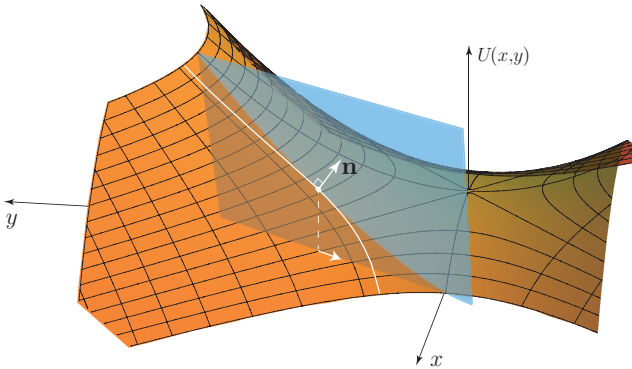


Рис. 1.8: Контуры интегрирования в комплексной плоскости. Γ_1 - не проходит через седловую точку. Γ_2 - проходящий через седловую точку.

перевала z_0 . Пусть $f'(z_0) = 0$, но $f''(z_0) \neq 0$ Такие точки перевала мы будем называть перевалами 1-го порядка¹

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots =$$

$$f(z_0) + \frac{|f''(z_0)|}{2!} e^{i \arg f''(z_0) + 2i\varphi} \rho^2 + \dots, \quad (1.98)$$

где мы ввели величину $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$. Здесь φ - угол, под которым контур проходит перевал. Линия наибольшего спада (подъема) $\operatorname{Re} f(z)$ даётся условием $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$. Но уже из непосредственного вида разложения (1.98) легко угадать нужное направление. Действительно, легко сообразить, что условие, которое даст наибольший спад $\operatorname{Re} f(z)$ при заданном удалении ρ от точки перевала будет просто

$$\arg f''(z_0) + 2\varphi_d = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$\varphi_d = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg f''(z_0) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{наискорейший спад} \quad (1.99)$$

¹Случай когда $f''(z_0) \neq 0$ и более старшие производные обращаются в нуль будет рассмотрен нами позже, см. раздел...

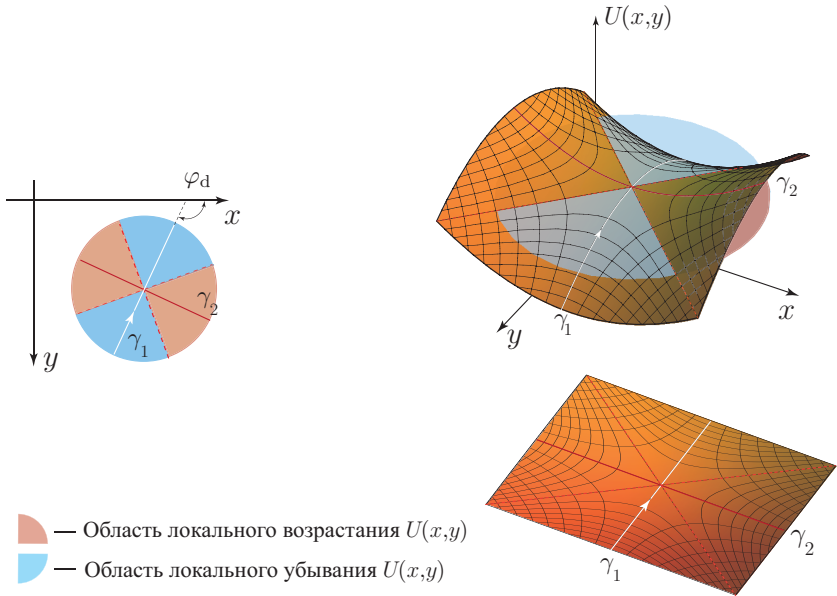


Рис. 1.9: Поведение $U(x, y)$ в окрестности седловой точки.

γ_1 - контур наибоыстрейшего спада.

γ_2 - контур наибоыстрейшего подъема.

Аналогично, приходим к направлениям, дающим наискорейший подъем от точки перевала:

$$\begin{aligned} \arg f'''(z_0) + 2\varphi_u &= 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \\ \varphi_u &= -\frac{1}{2}\arg f'''(z_0) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{наискорейший подъем} \end{aligned} \quad (1.100)$$

Видно, что направления наискорейшего спуска φ_d сдвинуты относительно направлений наискорейшего подъема φ_u на угол $\pi/2$. Оба условия (1.99)-(1.100) удовлетворяют уравнению постоянства $\text{Im}f(z)$ в окрестности точки z_0 :

$$\sin(\arg f'''(z_0) + 2\varphi) = 0, \quad \text{линии локального постоянства } \text{Im}f(z), \quad (1.101)$$

как и должно быть. На рис. 1.9 показан рельеф функции $\text{Re}f(z)$ вблизи точки перевала и соответствующие контуры. Также указаны границы

постоянства $\operatorname{Re} f(z)$, даваемые очевидным из (1.98) уравнением

$$\cos(\arg f''(z_0) + 2\varphi) = 0, \text{ линии локального постоянства } \operatorname{Re} f(z). \quad (1.102)$$

Построение асимптотики Теперь мы готовы изложить сам алгоритм вычисления. Положим сначала, что функция $f(z)$ имеет всего одну критическую точку z_0 . Мы деформируем контур так, чтобы он прошёл через седловую точку z_0 в направлении наискорейшего спуска, определяемого уравнением (1.99). Далее, подставляем разложение (1.98) вместо функции $f(z)$ в первоначальный интеграл (1.92). После этого интеграл фактически становится гауссовым и легко берется заменой $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}} e^{\lambda f(z_0) + i\varphi} g(z_0) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right). \quad (1.103)$$

Пример 4. Асимптотика функции Бесселя

Используя интегральное представление

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} \frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

где γ - контур Ганкеля (см. рис. 1.4(a)), найти асимптотику функции Бесселя $J_\nu(z)$, при $z \rightarrow +\infty$. Точки перевала даются нулями производной функции $f(t) = (t - 1/t)/2$.

$$f'(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right), \Rightarrow t_0 = \pm i. \quad (1.104)$$

Направление наискорейшего спуска φ определяется уравнением (1.99) $\arg f''(t_0) + 2\varphi = \pi + 2\pi n$.

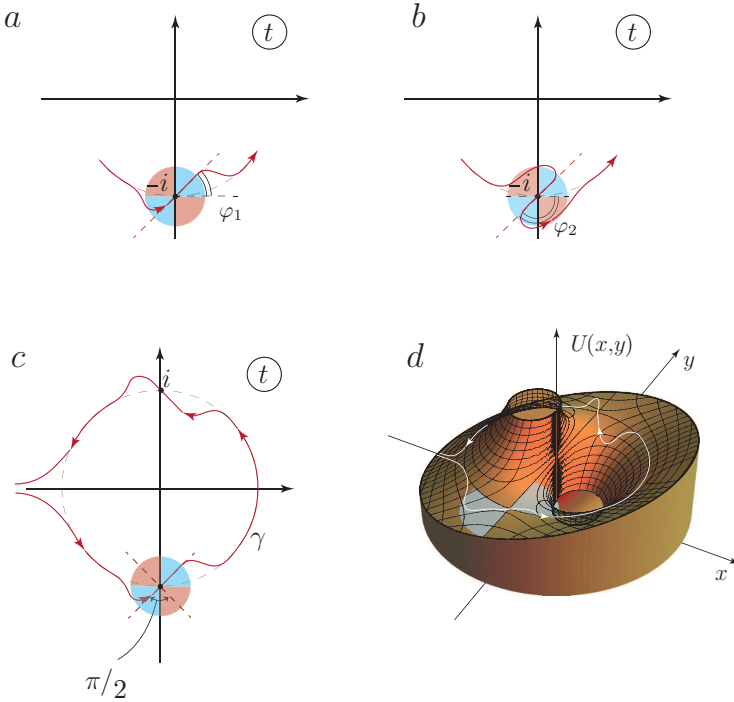
$$f''(t) = -\frac{1}{t^3}, \Rightarrow \begin{cases} \arg f''(-i) = \frac{\pi}{2}, \\ \arg f''(i) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1.105)$$

Рассмотрим перевальную точку $t_0 = -i$ Тогда получаем два возможных направления наискорейшего спуска:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}. \quad (1.106)$$

Соответствующие деформации контура Ганкеля представлены на рисунках 1.10(a) и (b). И без анализа рельефа поверхности $U(x, y) =$

Контуры интегрирования для интегрального представления функции Бесселя.



- Область локального возрастания $U(x,y)$
- Область локального убывания $U(x,y)$

- a) Деформация контура, соответствующая направлению $\varphi = \pi/4$.
- b) Деформация контура, соответствующая направлению $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.
- c) Полная деформация контура Ганкеля γ .
- d) Рельеф функции $U(x, y) = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]$, $t = x + iy$

Рис. 1.10

$\operatorname{Re}f(z)$ выбор $\varphi = \pi/4$ представляется более естественным, т.к. в таком случае направление наискорейшего спуска совпадет с общим направлением движения вдоль контура. Но всё же давайте на данном простом примере убедимся, что контур, соответствующий углу $\varphi = \pi$ (рис. 1.10(b) действительно не подходит. В дальнейшем нам нужно будет решать этот вопрос для многих задач и не лишним будет обсудить его уже сейчас.

Как уже упоминалось, линиям наискорейшего подъема отвечает уравнение-близнец $1.100 \arg f''(t_0) + 2\varphi = 2\pi n$. В точке $t = -i$ это направление задается углом $\varphi = -\pi/4$ и отмечено на рис. 1.10(c) коричневым пунктиром. Линии уровня $U(x, y)$, то есть линии, вдоль которых $U(x, y)$ меняет свое поведение с убывания на возрастание, даются условием $\arg f''(t_0) + 2\varphi = \pi/2 + \pi n$. В точке $t = -i$ это направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Соответствующие области провалов и возвышений функции $U(x, y)$ над перевалом изображены голубыми и красными секторами. Видим, что контур на рис. 1.10(b) обязательно проходит через область, где $U(x, y)$ возвышается над перевалом. Однако суть метода как раз и состоит в том, что точка перевала является точкой максимума функции $U(x, y)$ на всём контуре интегрирования. Следовательно, такой контур не удовлетворяет нашей цели и мы останавливаемся на направлении $\varphi = \pi/4$, рис. 1.10(a).

Аналогично, для точки $z = i$ направление наискорейшего спада будет даваться углом $z = 3\pi/4$. Одинаковый по порядку величины вклад будут вносить обе перевальные точки. Тогда асимптотика будет определяться их суммой.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{iz + \frac{3\pi i}{4} - i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} + \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-iz + \frac{\pi i}{4} + i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} \right) \quad (1.107)$$

Перегруппировав члены в (1.107) мы получаем

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.108)$$

Пример 5.

Асимптотика полиномов Лежандра при больших порядковых n

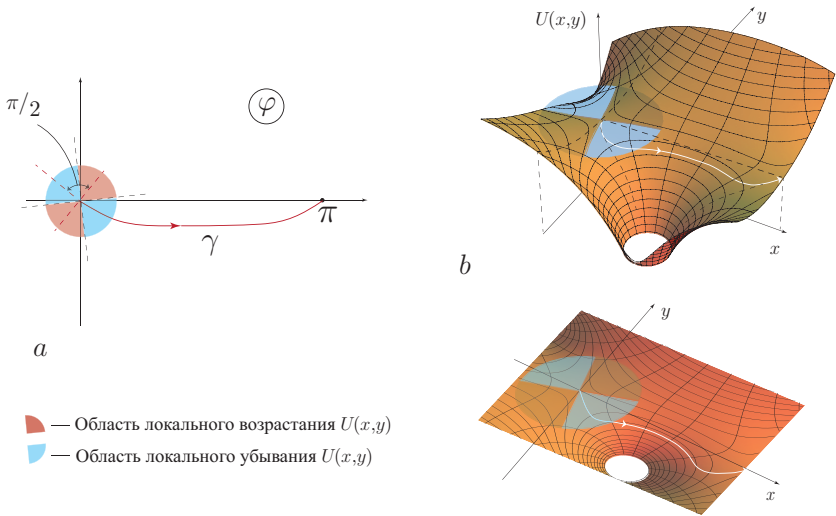


Рис. 1.11: Рельеф функции $U(x, y) = \operatorname{Re} \left[\ln(\cos \theta + i \sin \theta \cos z) \right]$ и контур интегрирования для полиномов Лежандра.

Интегральное представление для полиномов Лежандра выглядит следующим образом

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi]^n d\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Найти $P_n(\cos \theta)$ при $n \gg 1$.

Решение Перепишем представление следующим образом.

$$P_n(x) = \int_0^\pi \exp \{ n \ln(\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi) \} d\varphi = \int_0^\pi \exp \{ n f(\varphi) \} d\varphi.$$

$$f'(z) = -\frac{i \sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi} = 0 \quad (1.109)$$

Итак, подынтегральное выражение имеет 2 точки перевала: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, соответствующие двум решениям уравнения $\sin \varphi = 0$. Остальные решения брать нельзя. Это интуитивно ясно уже из того факта, что не существует очевидной деформации контура, которая

провела бы его через все перевалы $z = \pi n$. Если точки перевала лежат далеко от контура, очень велика вероятность, что деформируя контур мы наверняка пройдем через области рельефа $f(z)$ лежащие выше самого перевала, что делает саму процедуру бессмысленной. Точки $\varphi = 0, \pi$ лежат на границе контура интегрирования. Граничное положение точек перевала не вносит по-существу, никаких изменений в сам метод. В точке $z = 0$ контур лишь спускается с вершины перевала, подъем лежит за областью интегрирования. Таким образом в соответствующий гауссов интеграл даёт вклад лишь половина контура и его вклад уменьшается в 2 раза. Тоже касается и точки $z = \pi$, где контур проходит половину соответствующую подъему к перевалу.

$$f''(0) = -i \sin \theta e^{-i\theta}, \quad \arg f''(0) = -\theta - \frac{\pi}{2},$$

$$f''(\pi) = i \sin \theta e^{i\theta}, \quad \arg f''(\pi) = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

И соответствующие уравнения для направлений β контура наименьшего спуска дают

$$\varphi = 0: \quad \beta_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4} + \pi n_1,$$

$$\varphi = \pi: \quad \beta_2 = -\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n_2.$$

Какое n выбрать в каждом случае? Общее правило говорит о том, что нужно стараться выбирать углы такими, чтобы они в целом соответствовали движению вдоль контура. Ясно тогда, что для точки $\varphi = 0$ следует выбрать $n_1 = -1$, а для точки $\varphi = \pi$ значение $n_2 = 0$. Для наглядности я изобразил контур на рис. ??(а) для острого угла θ . Построение рельефа функции $U(x, y) = \operatorname{Re} \left[\ln(\cos \theta + i \sin \theta \cos z) \right]$ подтверждает наше предположение (рис. 1.11(b)). Итак, имеем

$$\beta_1 = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$\beta_2 = -\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Теперь все готово для окончательного расчета. В обеих точках, $|f''(0)| = |f''(\pi)| = \sin \theta$. Тогда интеграл дается суммой двух вкладов:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sin \theta}} \left(e^{i(n+\frac{1}{2})\theta - i\frac{\pi}{4}} + e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta + i\frac{\pi}{4}} \right)$$

Здесь я учел, что каждый перевал вносит лишь половину стандартного вклада. Собирая экспоненты в косинус и пользуясь формулами приведения, получаем наконец окончательное выражение

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

Полный асимптотический ряд для точки перевала.

До сих пор при оценке контурного интеграла мы искали лишь первый неисчезающий член асимптотики. Но нетрудно найти и общее выражение полного асимптотического ряда для такого интеграла. Мы будем действовать в полной аналогии с действительным случаем. Пусть имеется интеграл типа (1.92). Предположим, что функция $f(z)$ имеет в точке z_0 седло первого порядка (случай седла более высокого порядка рассматривается аналогично). Сделаем замену переменных

$$f(z_0) - f(z) = \tau^2. \quad (1.110)$$

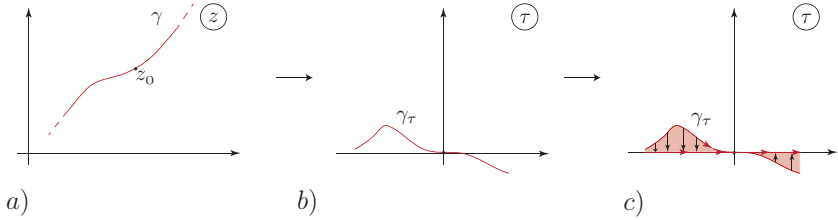
Преобразование (1.110) теперь не просто замена, как это было в действительном случае (1.75), а конформное отображение плоскости z на плоскость τ . Функция $\tau(z)$ вообще говоря многозначна и нам необходимо выбрать соответствующую регулярную ветвь. Для того чтобы пояснить выбор, установим как выглядит наше конформное отображение вблизи точки z_0 . Разложим, как всегда, левую часть (1.110) в ряд Лорана вблизи z_0 . Тогда получим

$$-f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots = \tau^2 \quad (1.111)$$

Направление φ наискорейшего спада определяется соотношением (1.99). Параметризуя контур вблизи z_0 так же, как это было сделано при выводе (1.99): $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, получим

$$|f''(z_0)|\rho^2 + \dots = \tau^2. \quad (1.112)$$

Последнее уравнение говорит нам о том, что контур γ в плоскости z вблизи перевала переходит в участок действительной оси в плоскости



- a) Контур в плоскости z
- b) Контур после конформного отображения в плоскости τ
- c) Спрявление контура в плоскости τ

Рис. 1.12

τ (см. рис. 1.12). Конечно, такое совпадение носит лишь локальный характер, по мере удаления от точки $\tau = 0$ образ контура (γ_τ на рис. 1.12) отклонится от действительной оси. Мы, однако, предположим, что γ_τ можно непрерывно деформировать так, чтобы он *везде* совпал с действительной прямой плоскости τ . Это, конечно, может оказаться сильным условием. Оно подразумевает, что в области между действительной осью τ и образом γ_τ в плоскости τ подынтегральное выражение не будет иметь особенностей. Во многих прикладных задачах, однако, это условие выполняется.

Теперь ясно как выбрать регулярную ветвь для τ в уравнении (1.112). Мы выбираем ее так, чтобы при удалении z от точки перевала τ было действительно и положительно. В комплексной плоскости τ метод перевала превращается, фактически, в метод Лапласа в силу того, что интеграл берется теперь вдоль действительной оси. Тогда для асимптотического ряда остаётся верной и формула (1.77). Единственное отличие состоит в том, что во все слагаемые асимптотического ряда входят комплекснозначные функции, требующие аккуратного учёта аргументов. Для иллюстрации разберем конкретный пример.

Пример 6. Уточненная асимптотика функции Бесселя $J_\nu(z)$
 Найдем следующий член асимптотики $J_\nu(z)$ при $z \rightarrow +\infty$.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} \frac{1}{t^{\nu+1}} dt, \tag{1.113}$$

где, как всегда, C - контур Ганкеля (рис. 1.4).

Решение

Как мы обсуждали в примере 4 функция $f(t) = 1/2(t-1/t)$ имеет 2 точки перевала: $z = \pm i$ в которых направления наискорейшего спуска даются углами $\varphi = 3\pi/4$ и $\varphi = \pi/4$. Рассмотрим точку $t = i$ и рассчитаем её вклад, учтя член следующего порядка по $1/z$. Вводя переменную $\varepsilon = t - i$, получим

$$\tau^2 = \frac{i\varepsilon^2}{2(1-i\varepsilon)}, \Rightarrow \tau = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sqrt{1-i\varepsilon}} \quad (1.114)$$

С учётом знания направления наискорейшего спада в точке $t = i$ вводим стандартную параметризацию

$$\varepsilon = \rho e^{3\pi i/4}. \quad (1.115)$$

Тогда в формуле (1.114) нужно выбрать знак $-$:

$$\tau = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left(1 + \rho e^{i\pi/4}\right)^{1/2} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\rho e^{i\pi/4} + \frac{3}{8}i\rho^2 + \dots\right), \quad (1.116)$$

Обратим ряд (1.116). Приведем общие формулы для нескольких первых членов:

$$\begin{aligned} \tau &= a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 \\ \rho &= b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3, \\ b_1 &= \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{2}\tau + e^{i\pi/4}\tau^2 + \frac{\sqrt{2}i}{4}\tau^3 + \dots, \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= \sqrt{2} + 2 + e^{i\pi/4}\tau + \frac{3\sqrt{2}i}{4}\tau^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.118)$$

Далее:

$$\begin{aligned} t^{-\nu-1} &= e^{-i\pi/2(\nu+1)} \left(1 + (\nu+1)ie^{3\pi i/4}\rho + i\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\rho^2 + \dots\right) = \\ &= e^{-i\pi/2(\nu+1)} \left(1 + \sqrt{2}i(\nu+1)e^{3\pi i/4}\tau + i(\nu+1)^2\tau^2 + \dots\right) \end{aligned} \quad (1.119)$$

Теперь мы можем выписать чётные степени разложения $dt/d\tau t^{-\nu-1}$ по τ . (Вспомним, что нечётные степени выпадут после взятия гауссова интеграла по τ)

$$\frac{dt}{d\tau} t^{-\nu-1} = e^{3\pi i/4} \frac{d\rho}{d\tau} t^{-\nu-1} \simeq \sqrt{2} e^{3\pi i/4 - i\pi/2(\nu+1)} \left[1 + i\tau^2 \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (1.120)$$

Тогда соответствующий вклад в асимптотику от точки перевала $t = i$ примет вид

$$J_\nu(z) \Big|_{t=-} \simeq -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-\pi i/4 - i\pi/2(\nu+1) + iz} \left[1 + \frac{i}{2z} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (1.121)$$

Поскольку функция Бесселя действительна при действительных z , вклад от точки $t = -i$ будет просто комплексным сопряжением вклада от $t = i$. Тогда полная асимптотика функции Бесселя будет

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left[\cos \left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} \sin \left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.122)$$

Направление наискорейшего спада. Продолжение.

Пусть задан интеграл (1.92). Как мы теперь знаем, наилучшая асимптотическая оценка для него получается когда нам удаётся деформировать контур так, чтобы он прошёл через перевальную точку экспоненциальной функции $f(z)$. Идея состояла в деформации контура в положение, когда функция $\operatorname{Re} f(z)$ мала на большей его части за исключением резкого подъема в окрестности точки перевала. Наши рассуждения, однако, требуют уточнения. Дело в том, что мы, вообще говоря, несколько ограничены в деформации контура. А именно, есть точки контура, которые вообще нельзя сдвинуть никакой деформацией. Это - его концевые точки. В них $\operatorname{Re} f(z)$ не обязательно мала, так что контур, спускаясь по рельефу $\operatorname{Re} f(z)$ из концевой точки может дать дополнительный вклад в значение интеграла. Возникает вопрос о том, как оценить этот дополнительный вклад?

Оказывается, здесь применима та же философия что и для перевальных точек. Итак, задан контур γ с концевыми точками a и b . Рассмотрим сначала начальную точку контура $z = a$. Пусть $f'(a) \neq 0$ (если $f'(a) = 0$, то a - обычная точка перевала, и к ней применимо всё сказанное ранее о перевале). Наилучшей оценки вклада

от её окрестности можно добиться, спуская контур по направлению наискорейшего спада $\operatorname{Re} f(z)$. Чтобы задать это направление, вводим стандартную параметризацию $z = a + \rho e^{i\varphi}$. Используя те же рассуждения что и при рассмотрении перевальной точки, мы получаем необходимое условие на угол φ

$$\begin{aligned} \arg f'(a) + \varphi &= \pi + 2\pi n, \Rightarrow \\ \varphi &= \pi - \arg f'(a) + 2\pi n. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Соответствующий вклад в интеграл в нулевом приближении будет:

$$\begin{aligned} I(\lambda) \Big|_{z=a} &\simeq e^{\lambda f(a)} g(a) \int_0^\infty e^{-\lambda |f'(a)| \rho} d\rho e^{i\varphi} = -\frac{e^{\lambda f(a)} g(a)}{\lambda |f'(a)|} e^{i(\pi-\alpha)} \Rightarrow \\ I(\lambda) \Big|_{z=a} &\simeq -\frac{e^{\lambda f(a)} g(a)}{\lambda f'(a)}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Здесь мы исключили из направления φ слагаемое $2\pi n$, приходящее из формулы (1.123) ввиду однозначности всех входящих в подынтегральное выражение функций. Далее, завершая контур в точке b мы заинтересованы в том, чтобы подняться в неё самым быстрым образом. Соответствующий вклад вычисляется аналогично:

$$I(\lambda) \Big|_{z=b} \simeq \frac{e^{\lambda f(b)} g(b)}{\lambda f'(b)}. \quad (1.125)$$

Тогда полный вклад в интеграл есть сумма (1.124) и (1.125).

$$I(\lambda) = \frac{e^{\lambda f(b)} g(b)}{\lambda f'(b)} - \frac{e^{\lambda f(a)} g(a)}{\lambda f'(a)}. \quad (1.126)$$

Полученная формула учитывает только первый неисчезающий вклад. Нетрудно, однако, выписать и полный асимптотический ряд для вклада каждой из точек. Рассмотрим, например, точку a . Заметим ещё, что при выводе мы полагали, что $g(a) \neq 0, \infty$. Мы обобщим оценку на случай, когда вблизи a функция $g(z) \sim (z-a)^\mu + \dots$, где $\mu \in \mathbb{Z}$ и $-1 < \operatorname{Re} \mu < \infty$. То есть точка a может, вообще говоря, быть теперь точкой ветвления и даже особенностью (порядка < 1) функции $g(z)$. Ряд Лорана для $g(z)$ вблизи $z = a$:

$$g(z) = (z-a)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k. \quad (1.127)$$

Как и в случае перевала, вводим замену

$$\tau = f(a) - f(z). \quad (1.128)$$

Подынтегральное выражение приобретает вид:

$$e^{\lambda f(z)} g(z) dz = e^{\lambda f(a)} e^{-\lambda \tau} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau$$

Учитывая, что вблизи $z = a$, $\tau = (z - a)f'(a)$, мы видим, что

$$g(z(\tau)) = a_0 \frac{\tau^\mu}{[f'(a)]^\mu} + \dots$$

Соответствующий полный ряд:

$$g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{\mu+k}. \quad (1.129)$$

Замена (1.128) реализует конформное отображение плоскости z на плоскость τ и преобразует контур в окрестности $z = a$ в участок действительной оси в окрестности $\tau = 0$. Функция $g(z)$ многозначна. Для проведения вычислений следует выбрать удобную регулярную ветвь и во всех последующих расчётах её придерживаться. Подставляя разложение (1.129) в (1.92) получим:

$$\begin{aligned} I(\lambda) \Big|_{z=a} &= e^{\lambda f(a)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} \tau^{\mu+k} d\tau \Rightarrow \\ I(\lambda) \Big|_{z=a} &= e^{\lambda f(a)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\mu+k+1)}{\lambda^{\mu+k+1}} \end{aligned} \quad (1.130)$$

Аналогичный (1.130) вклад даёт и конечная точка b . Мы не станем его здесь приводить. Вместо этого поясним сказанное конкретным примером.

Пример 7. Вычислить асимптотику интеграла при $\lambda \rightarrow +\infty$. Решить уравнение $I(\lambda) = 0$, $\lambda \rightarrow \infty$.

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\lambda(z^3+3z)}}{\sqrt{1-z^2}} dz \quad (1.131)$$

Решение Для начала выберем регулярную ветвь двузначной функции $g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$. Для этого проводим разрез в комплексной

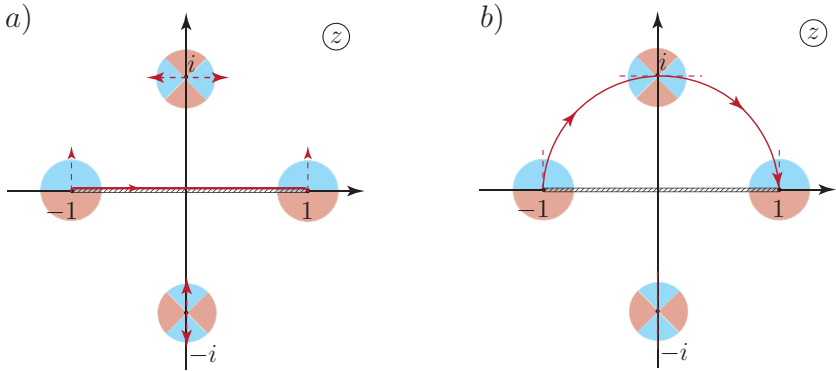


Рис. 1.13: а) Карта седловых точек $f(z)$ и направлений наискорейшего спада $\text{Re } f(z)$.

б) Деформация, проводящая контур в направлениях наискорейшего спада в точках $z = \pm 1$ и через доступный перевал $z = i$.

плоскости z вдоль действительной оси на интервале $[-1, 1]$. Регулярную ветвь выберем так, чтобы на верхнем берегу разреза значение $g(z)$ давалось арифметическим значением корня. Считаем тогда, что интеграл берется вдоль верхнего берега разреза. Найдем теперь перевальные точки функции $f(z) = i(z^3 + 3z)$.

$$f'(z) = i(3 + 3z^2) = 0, \Rightarrow z = \pm i.$$

Соответствующие направления наискратчайшего спуска для обеих точек:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= 0, \pi, \\ \varphi_{-i} &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Кроме того, мы рассмотрим вклады от концевых точек $z = \pm 1$. На рис. 1.13(а) представлена соответствующая карта функции $\text{Re } f(z)$ с указанием седловых точек $f(z)$. Из аналитической структуры рельефа $\text{Re } f(z)$ вблизи перевалов видно, что седловая точка $z = -i$ не доступна. В самом деле, любая деформация контура, проходящая через $z = -i$, неминуемо пройдет через красные сектора в её окрестности, где рельеф $\text{Re } f(z)$ лежит выше перевала. В точку же $z = i$, напротив, легко попасть. Мы выбираем направление прохода

$\varphi = 0$ и рассчитываем соответствующий вклад.

$$|f''(-i)| = 6, \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \Big|_{z=i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$I(\lambda) \Big|_{z=i} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{6\lambda}} e^{-2\lambda} \quad (1.132)$$

Теперь рассчитаем вклад от концевых точек. Рассмотрим точку $z = -1$. $f'(-1) = f'(1) = 6i$. Следовательно, $\arg f'(-1) = \arg f'(1) = \pi/2$. Направление наискорейшего спуска:

$$\varphi + \pi/2 = \pi \Rightarrow \varphi = \pi/2. \quad (1.133)$$

Необходимая параметризация есть: $z = -1 + e^{i\pi/2}\rho$. И, учитывая выбранную регулярную ветвь:

$$g(-1 + e^{i\pi/2}\rho) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\rho}} + \dots, \quad (1.134)$$

получим следующий вклад от точки $z = -1$

$$I(\lambda) \Big|_{z=-1} \simeq e^{-4i\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\rho}} e^{-6\lambda\rho} e^{i\pi/2} d\rho$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{12\lambda}} e^{-i(4\lambda - \pi/4)} \quad (1.135)$$

Их структуры интеграла (1.131) ясно, что он принимает только действительные значения. Тогда вклад от точки $z = 1$ должен даваться просто комплексным сопряжением вклада от $z = -1$. Таким образом для вклада от концов контура, получаем значение интеграла:

$$I(\lambda) \Big|_{z=\pm 1} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} \cos\left(4\lambda - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.136)$$

Как видим, вклад от перевальной точки экспоненциально подавлен, и главное значение теперь имеют окрестности конца интервала интегрирования.

Седловая точка более высокого порядка

Теперь рассмотрим. Предположим, что несколько производных обратились в нуль в критической точке z_0

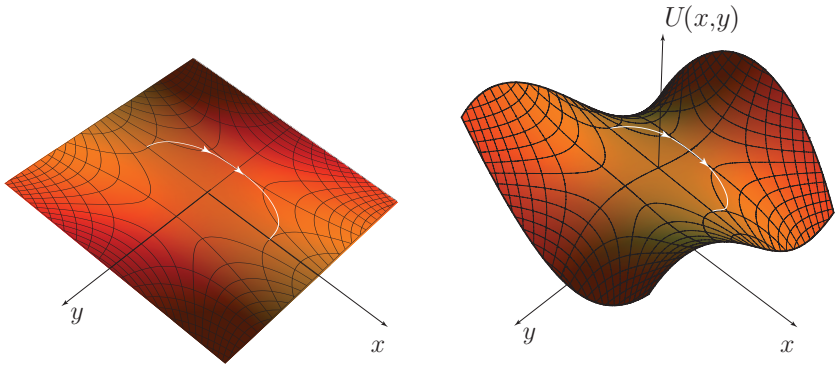


Рис. 1.14: а) Карта седловых точек $f(z)$ и направлений наискорейшего спада $\text{Re } f(z)$.

Пример 8. Седловая точка более высокого порядка

Найдем асимптотику функций Бесселя для для большого значения аргумента и порядкового номера $\nu = z \rightarrow +\infty$. Интегральное представление примет вид:

$$J_z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz(\sin \theta - \theta)} d\theta. \quad (1.137)$$

Рассмотрим все особые точки пути интегрирования. Таковыми являются концевые точки $\theta = -\pi$ и $\theta = \pi$ и возможные перевальные точки подынтегрального выражения.

Вклад точки $\theta = -\pi$ оценивается...

Найдем перевал экспоненты $f(\theta) = i(\sin \theta - \theta)$:

$$f'(\theta) = i(\cos \theta - 1) = 0, \Rightarrow \theta = 2\pi k. \quad (1.138)$$

Таким образом, подходящая седловая точка $\theta = 0$ лежит прямо на контуре. Разложение $f(\theta)$ в ряд Тейлора вблизи седловой точки с необходимой точностью:

$$f(\theta) = -\frac{i}{6}\theta^3 + \dots \quad (1.139)$$

Подчеркнём, что в данном случае вторая производная в седловой точке обратилась в нуль: $f''(0) = 0$, в то время как $f'''(0) \neq 0$. Таким образом $\theta = 0$ седло третьего порядка. Направления α наискорейшего

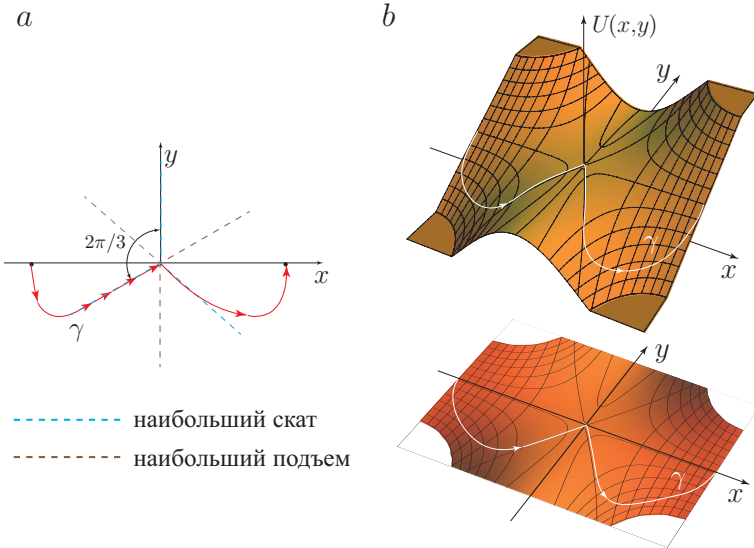


Рис. 1.15: Контур интегрирования для $J_z(z)$. Седло 3-его порядка.

спуска выбираются условием:

$$\arg(f'''(0)) + 3\alpha = \pi + 2\pi n \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{7\pi}{6}, \quad \alpha_3 = -\frac{\pi}{6}$$

Они изображены на рис. 1.18 голубым пунктиром. Направления наискорейшего подъема определяются условием:

$$\arg(f'''(0)) + 3\beta = 2\pi n \Rightarrow \beta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \beta_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad \beta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Необходимо выбрать правильный контур.

Сингулярная функция $g(z)$

Полос $g(z)$ в седловой точке

Обсудим сначала самый интересный (и в тоже время простой) случай, когда сингулярность функции $g(z)$ в интеграле

$$I(\lambda) = \int_{\gamma} g(z) e^{\lambda f(z)} dz \tag{1.140}$$

Деформация контура в случае сингулярной в точке перевала $g(z)$

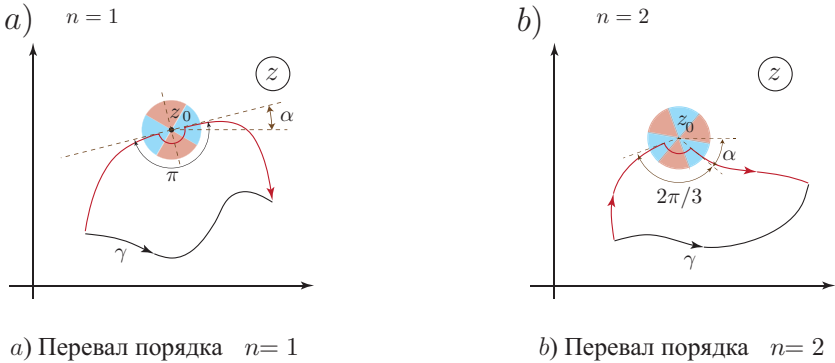


Рис. 1.16

попадает точно в точку перевала. Пояснение общего рецепта действия полезно начать со случая, когда в точке перевала $g(z)$ имеет простой полюс. Выделим сингулярную часть $g(z)$ разложив её в ряд Лорана в точке z_0 :

$$g(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + g_{\text{reg}}(z).$$

Регулярная в z_0 часть $g_{\text{reg}}(z)$ не приводит к дополнительным сложностям в оценке методом перевала, поэтому сосредоточим внимание на сингулярной части. Рецепт несложен. Как обычно, мы деформируем контур так чтобы он входил в точку z_0 по линиям наискорейшего спада функции $\text{Re}f(z)$. Контур подходит к z_0 на небольшое расстояние ε , огибает перевал по дуге окружности радиуса ε и затем уходит от перевала по другой линии наискорейшего спада. Разберем частные случаи перевалов первого и второго рода.

$$I_s(\lambda) = \int_{\gamma} \frac{c_{-1}}{z - z_0} e^{\lambda f(z)} dz = \int_{\gamma_1} + \int_{c_\varepsilon} + \int_{\gamma_2}, \quad (1.141)$$

здесь, γ_1 - контур, входящий вдоль линии наискорейшего спада в дугу окружности, γ_ε - дуга окружности малого радиуса $\varepsilon \rightarrow 0$, γ_2 - контур, уходящий от перевала по линии наискорейшего спада. Для этого случая (перевал первого рода) деформация контура представлена на рис.1.16(a) Для контура γ_1 вводим замену:

$$z = z_0 + e^{i(\pi+\alpha)}\rho, \quad (1.142)$$

где α - направление наикратчайшего спуска, а дополнительный угол π появляется в силу того, что мы сначала *поднимаемся* к перевалу. Тогда получим

$$\int_{\gamma_1} = e^{\lambda f(z_0)} \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{d\rho}{\rho} e^{-|f''(z_0)|\rho^2/2} \quad (1.143)$$

Аналогично, вводя замену

$$z = z_0 + e^{i\alpha}\rho, \quad (1.144)$$

для контура γ_2 получим

$$\int_{\gamma_2} = e^{\lambda f(z_0)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} e^{-|f''(z_0)|\rho^2/2}$$

Видим что интегралы по γ_1 и γ_2 в точности сокращают друг друга. Остаётся интеграл вдоль дуги окружности c_ε . Вводя параметризацию $z = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\alpha - \pi, \alpha]$, получаем для него:

$$\int_{c_\varepsilon} = e^{\lambda f(z_0)} \int_{\alpha - \pi}^{\alpha} i d\varphi = i\pi e^{\lambda f(z_0)}$$

Таким образом, сингулярная часть функции $g(z)$ приводит к следующей оценке интеграла:

$$\begin{aligned} I_s(\lambda) &= i\pi c_{-1} e^{\lambda f(z_0)}, \quad \text{для рисунка 1.16(a)} \\ I_s(\lambda) &= \pm i\pi c_{-1} e^{\lambda f(z_0)}, \quad \text{в общем случае.} \end{aligned} \quad (1.145)$$

Выбор знака в формуле (1.145) зависит от того, снизу или сверху от исходного контура находится седловая точка. + выбирается для седла, лежащего над контуром (т.е. так, как изображено на рис. 1.16(a)).

Случай седловой точки второго рода решается аналогично. Деформация контура представлена на рис.1.16(b). Оценка оказывается столь же простой.

$$\begin{aligned} z = z_0 + e^{i(\alpha - 2\pi/3)}\rho, \quad \int_{\gamma_1} &= e^{\lambda f(z_0)} \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{d\rho}{\rho} e^{-|f'''(z_0)|\rho^3/6}, \\ z = z_0 + e^{i\alpha}\rho, \quad \int_{\gamma_2} &= e^{\lambda f(z_0)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} e^{-|f'''(z_0)|\rho^3/6} \end{aligned} \quad (1.146)$$

Видно, что и здесь вклады вдоль контуров γ_1 и γ_2 сокращаются. Тогда оценка будет даваться выражением

$$I_s(\lambda) = \frac{2\pi i}{3} c_{-1} e^{\lambda f(z_0)}, \quad \text{для рисунка 1.16(b)} \quad (1.147)$$

Следует ещё вспомнить, что мы пренебрегли слагаемыми более высокого порядка при разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора. Так что, строго говоря, грамотная запись выглядит так:

$$I_s(\lambda) = \frac{2\pi i}{3} c_{-1} e^{\lambda f(z_0)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]. \quad (1.148)$$

Теперь учтем вклад от регулярной части функции $g(z)$.

Седло первого порядка:

$$I_{\text{reg}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} e^{\lambda f(z_0) + i\alpha} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]. \quad (1.149)$$

Седло второго порядка:

$$I_{\text{reg}} = \frac{e^{i(\alpha - \pi/3)}}{\sqrt{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{6}{\lambda |f'''(z_0)|}\right)^{1/3} e^{\lambda f(z_0)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]. \quad (1.150)$$

Наконец, полный ответ даётся суммой двух вкладов

$$I(\lambda) = I_s + I_{\text{reg}}. \quad (1.151)$$

Общий случай полюса произвольного порядка легко свести к случаю полюса первого порядка $n - 1$ кратным дифференцированием по z_0 :

$$\frac{1}{(z - z_0)^n} = \frac{1}{(n - 1)!} \frac{d^{n-1}}{dz_0^{n-1}} \frac{1}{(z - z_0)}. \quad (1.152)$$

Сингулярность вблизи седловой точки

Пусть теперь функция $g(z)$ имеет простой полюс в точке z_s , находящейся в непосредственной близости от седла z_0 , $z_s = z_0 + b$. Как теперь построить правильную асимптотическую оценку интеграла? Нужна ли специальная процедура, или обычного первого асимптотического слагаемого вида (1.103) достаточно? Для ответа на этот вопрос рассчитаем весь асимптотический ряд для интеграла, учтя сингулярную часть $g(z)$. Это позволит нам оценить сходимость всего

асимптотического ряда. Как и в предыдущем случае, напомним $g(z)$, выделив явно её сингулярную часть:

$$g(z) = \frac{c-1}{z-z_0-b} + g_{\text{reg}}(z). \quad (1.153)$$

Рассмотрим подробно интеграл, содержащий сингулярную часть $g(z)$. Согласно общей схеме разложим $g(z)$ в ряд Тейлора вблизи z_0 .

$$g(z) = -\frac{c-1}{b} \left(1 + \frac{z-z_0}{b} + \left(\frac{z-z_0}{b} \right)^2 + \dots \right) \quad (1.154)$$

При этом, конечно, надо иметь ввиду, что разложение (1.154) имеет смысл, только для z таких, что $|z-z_0| \leq b$. Тогда

Пример 9. Рассчитать асимптотику интеграла [?].

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(t^2-2it)} \frac{1}{\sinh(t^2+1)} dt, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (1.155)$$

Обозначим $f(t) = 2it - t^2$ и $g(t) = \frac{1}{t^2+1}$. Точка перевала:

$$f'(t) = 2i - 2t = 0, \Rightarrow t = i. \quad (1.156)$$

Видно, что $t = i$ является полюсом $g(t)$. В соответствии с общим методом, регуляризуем функцию $g(t)$ вычитая из нее главную часть её ряда Лорана:

$$g(t) = \frac{1}{2i(t-i)} + g_{\text{reg}} \quad (1.157)$$

Итак, перепишем интеграл (1.155) в виде:

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(t^2-2it)} g_{\text{reg}}(t) dt + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(t^2-2it)} \frac{1}{t+i} dt \quad (1.158)$$

§12 Приложение. Семинар по эффекту Ааронова-Бома.

Здесь мы разберем одну из довольно любопытных задач квантовой механики, при решении которой асимптотические оценки играют

не последнюю роль. Речь пойдет о знаменитом эффекте Ааронова-Бома [?]. Пусть двумерная плоскость пронизана бесконечно тонким соленоидом в начале координат. Магнитный поток внутри соленоида равен Φ .

Магнитное поле снаружи соленоида отсутствует. Соленоид помещён внутрь непроницаемого цилиндра радиуса R . Найдите дифференциальное сечение рассеяния для такой системы и исследовать поведение волновой функции во всей двумерной плоскости.

Решение. Изложенное решение, в основном, следует статье [?]. Векторный потенциал, отвечающий условию задачи даётся выражением:¹

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (1.159)$$

Запишем соответствующее уравнение Шредингера

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi = E\Psi \quad (1.160)$$

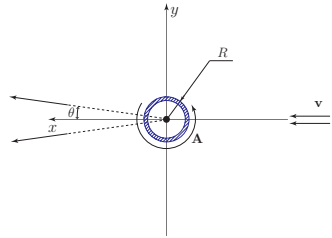
Уравнение Шредингера можно свести к свободному калибровочным преобразованием:

$$\Psi = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}} \psi = e^{i\alpha\theta} \psi, \quad \alpha = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (1.161)$$

Здесь $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ - квант магнитного потока. Таким образом α имеет смысл числа квантов магнитного потока, пронизывающего плоскость. Обратим внимание, что нет физических оснований считать α обязательно целым (в отличие от случая со сверхпроводимостью), поэтому α будем считать произвольным. Уравнение Шредингера сводится тогда к двумерному уравнению Гельмгольца на функцию $\psi(r, \theta)$:

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (1.162)$$

¹В самом деле, пусть во всей плоскости за исключением точки $r = 0$ магнитное поле равно нулю. Тогда $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, то есть $\mathbf{A} = \nabla\varphi$, где φ - некоторое скалярное поле. Подчиним \mathbf{A} калибровке $\text{div } \mathbf{A} = 0$, тогда поле φ должно удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Аксиально-симметричное решение уравнения Лапласа: $\varphi = \text{const} \ln r$. Откуда $\mathbf{A} = (\text{const}/r)\mathbf{e}_\theta$. Константу находим из условия нормировки: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi$, откуда и возникает поле 1.159.



а) Рис. 1.17: Эффект Ааронова-Бома.

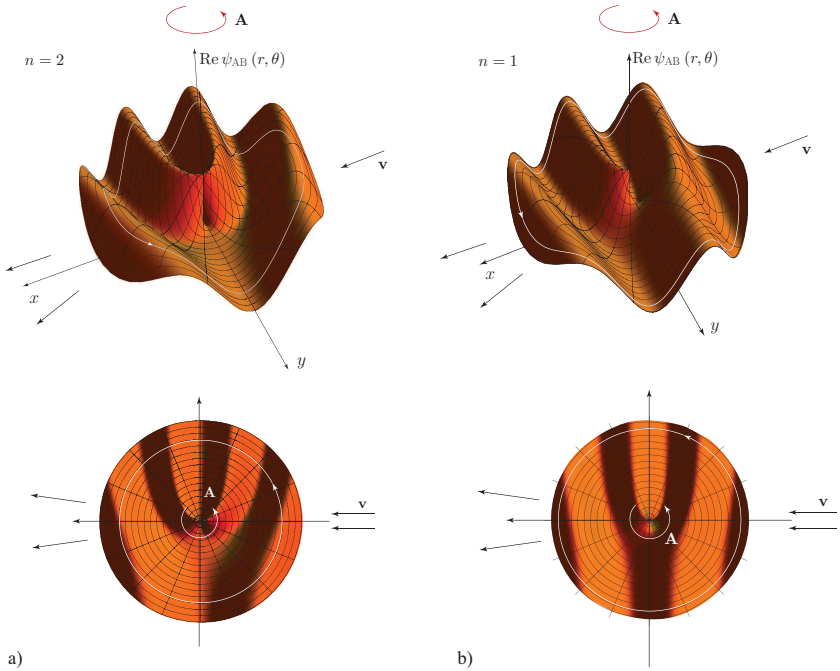


Рис. 1.18: Рельеф действительной части волновой функции. Дислокации.

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В силу условия однозначности, которому должна удовлетворять волновая функция Ψ : $\Psi(r, 0) = \Psi(r, 2\pi)$ мы приходим к граничному условию для функции $\psi(r, \theta)$:

$$\psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi)e^{2\pi i\alpha}. \tag{1.163}$$

Выпишем в явной форме оператор Лапласа в уравнении (1.162).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k^2 \psi = 0 \tag{1.164}$$

Разделим переменные, разложив ψ в ряд по полному набору собственных функций оператора $\partial/\partial\theta$.

$$\psi(r, \theta) = \sum_{\nu} e^{i\nu\theta} \psi_{\nu}(r), \tag{1.165}$$

где в силу условия однозначности (1.163), собственные значения ν удовлетворяют условию: $\nu = m - \alpha$, m - целое. Тогда радиальная часть волновой функции $\psi_\nu(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя:

$$r^2\psi'' + r\psi' + (k^2r^2 - \nu^2) = 0. \quad (1.166)$$

Его общее решение:

$$\psi_\nu(r) = A_\nu J_\nu(kr) + B_\nu Y_\nu(kr).$$

Здесь, $Y_\nu(z)$ - функция Бесселя II рода.¹ Нам необходимо выбрать A_ν и B_ν таким образом, чтобы при $r \rightarrow \infty$ и $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ решение представляло бы собой плоскую волну, движущуюся вдоль оси x , и имеющую волновой вектор k , то есть

$$\Psi(r, \theta) \rightarrow e^{ikr \cos \theta}. \quad (1.167)$$

Итак, полная волновая функция даётся выражением

$$Y \quad (1.168)$$

Вырожденная гипергеометрическая функция и её асимптотика.

Лемма Ватсона для петлевых интегралов

Рассмотрим интеграл по контуру Ганкеля (1.4)

$$I(\lambda) = \int_\gamma e^{\lambda x} g(x) dx \quad (1.169)$$

Задача 5. Доказать, формулу (1.95) приведённую на стр. 27, а именно, получить асимптотическое выражение для функции $\Delta(\lambda)$ в терминах производных от $U(s)$, $V(s)$ и $t(s)$.

Задача 6. Доказать, что критические точки функции комплексного переменного $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ являются точками перевала её реальной и мнимой части.

¹Мы принимаем стандартное определение в соответствии с которым $Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z) \sin \pi\nu}{\sin \pi\nu}$.

Примеры

Задачи

§13 Уравнения с линейными коэффициентами

Здесь мы поставим себе целью овладеть методом Лапласа, решающим очень важный класс дифференциальных уравнений. Метод позволяет получить решение в виде контурного интеграла в комплексной плоскости. Речь пойдет о линейных дифференциальных уравнениях с линейными коэффициентами, то есть об уравнениях вида

$$\sum_{m=0}^n (a_m + b_m x) \frac{d^m y}{dx^m} = 0. \quad (1.170)$$

Для наглядности, мы покажем как получить решение на примере дифференциального уравнения второго порядка. Рассуждения легко обобщаются на случай уравнения произвольного порядка и предлагаются читателю в качестве лёгкого упражнения в конце параграфа. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(a_2 + b_2 x)y'' + (a_1 + b_1 x)y' + (a_0 + b_0 x)y = 0. \quad (1.171)$$

Идея состоит в том, чтобы представить решение в виде контурного интеграла типа Лапласа. Именно, попробуем отыскать решение в виде контурного интеграла

$$y = \int_C e^{xt} Z(t) dt, \quad (1.172)$$

где C некоторый контур в комплексной плоскости. Имеем тогда:

$$y' = \int_C t e^{xt} Z(t) dt, \quad y'' = \int_C t^2 e^{xt} Z(t) dt. \quad (1.173)$$

Подставляя 1.173 в 1.171 получаем

$$\int_C \left\{ (a_2 t^2 + a_1 t + a_0) + (b_2 t^2 + b_1 t + b_0)x \right\} e^{xt} Z(t) dt = 0 \quad \text{или}$$

$$\int_C \left\{ \underbrace{(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)}_{P(t)} Z(t) e^{xt} + \underbrace{(b_2 t^2 + b_1 t + b_0)}_{Q(t)} Z(t) \frac{d}{dt} e^{xt} \right\} dt = 0.$$

Последнее равенство может удовлетворяться, если подынтегральное выражение является полной производной от некоторой функции, а сама функция принимает одинаковые значения на концах контура C . Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$PZ = \frac{d}{dt}(QZ), \quad (1.174)$$

а также, чтобы значения функции

$$V = QZe^{xt} \quad (1.175)$$

совпадали на концах контура C . При этом контур C может быть как замкнутым так и разомкнутым. Разделив обе части 1.174 на QZ уравнение приводится к квадратурам

$$Z = \frac{1}{Q} \exp \int \frac{P}{Q} dt \quad (1.176)$$

Выбор контура C в комплексной плоскости до некоторой степени произволен, но сильно обусловлен граничными условиями наложенными на решения дифференциального уравнения. Часто, для получения нетривиальных решений, удобно проводить контуры, огибающие особые точки функции $Z(t)$. Теперь нетрудно проделать все выкладки для случая уравнения произвольного порядка. Представляя решение в виде 1.172 получим

$$\int_C \left\{ \sum_{m=0}^n a_m t^m + x \sum_{m=0}^n b_m t^m \right\} e^{xt} Z(t) dt = 0 \quad \text{или}$$

$$\int_C \left\{ \underbrace{\sum_{m=0}^n a_m t^m}_{P(t)} Z(t) e^{xt} + \sum_{m=0}^n \underbrace{b_m t^m}_{Q(t)} Z(t) \frac{d}{dt} e^{xt} \right\} dt = 0.$$

Налагая на функции

$$P(t) = \sum_{m=0}^n a_m, \quad (1.177)$$

$$Q(t) = \sum_{m=0}^n b_m \quad (1.178)$$

и $Z(t)$, $V(t)$ те же условия, что и в 1.174-1.175 в точности воспроизводим результат для Z 1.176.

§14 Примеры решения уравнений методом Лапласа

Уравнение Шредингера для осциллятора

$$-\frac{1}{2m}\psi'' + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi = E\psi. \quad (1.179)$$

Найдем асимптотику уравнения при $x \rightarrow \infty$. Для этого перепишем его в виде:

$$-\frac{1}{2m}\psi'' = \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi. \quad (1.180)$$

При $x \rightarrow \infty \gg \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ энергией E в правой части (1.180) можно пренебречь и получаем асимптотическое уравнение

$$\psi'' = m^2\omega^2 x^2 \psi. \quad (1.181)$$

Поскольку ψ'' пропорционально ψ ищем решение в виде $\psi = e^\varphi$.

Получаем в итоге

$$\varphi'' - \xi\varphi' + \nu\varphi = 0. \quad (1.182)$$

Это уравнение с линейными коэффициентами. Решим его методом Лапласа и выберем решение с нужной асимптотикой.

$$\begin{aligned} P(t) &= t^2 + \nu \\ Q(t) &= -t \end{aligned} \quad (1.183)$$

Тогда решение даётся контурным интегралом:

$$\varphi(\xi) = \int_C e^{\xi t - \frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (1.184)$$

При этом функция

$$V(t) = e^{xt - t^2/2} \frac{1}{t^\nu}$$

должна принимать одинаковые значения на концах контура C . Как выбрать контур?

Выбор контура Прежде всего замечаем, что любой замкнутый контур не обходящий сингулярность $t = 0$ даст нулевое решение.

(функция $Z(t)$ будет регулярной внутри контура). Значит, контур обязательно должен обходить точку $t = 0$.

Но тогда он не может быть замкнутым. Действительно, благодаря наличию функции $1/t^\nu V(t)$ и $Z(t)$ не являются однозначными и для фиксации соответствующих регулярных ветвей необходимо провести разрез в комплексной плоскости, содержащий точку ветвления $t = 0$. Но тогда следует решить вот какую проблему.

Разрез можно провести в любом направлении комплексной плоскости. Какое выбрать? Нам не остаётся ничего иного, кроме как действовать наугад.

Выберем сначала

Давайте проведем, что-н Найдем их асимптотику при $\xi \Rightarrow +\infty$

Асимптотика функций параболического цилиндра

$$\varphi(\xi) = \int_C e^{\xi t - \frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (1.185)$$

Интеграл (1.185) нельзя брать с помощью леммы Ватсона для интеграла по петле. Лемма Ватсона подразумевает наличие простого экспоненциального фактора типа $e^{\xi t}$. Само доказательство леммы подразумевает монотонность функции, стоящей в экспоненте. У нас в экспоненте вместо t стоит более сложное, не монотонное по t выражение. Для того, чтобы в этом убедиться, сделаем масштабирующую замену $t = \beta s$, и подберем β так, чтобы экспонента в 1.185 приняла вид $\xi f(s)$. Получается

$$\xi \beta s - \beta^2 s^2 / 2 = \xi \beta \left(s - \beta \frac{s^2}{\xi} \right), \Rightarrow \beta = \xi \quad (1.186)$$

Итак, искомая замена $t = \xi s$. При этом при $\xi > 0$ контур просто сузится в ξ раз, сохраняя свою топологию, а при $\xi < 0$ контур повернется на π

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\xi^\nu} \int_C e^{\xi^2 (s - \frac{s^2}{\xi})} \frac{ds}{s^{\nu+1}}. \quad (1.187)$$

функция $f(s) = s - \frac{s^2}{\xi}$ имеет перевал в точке $s = 1$. $f''(1) = -1$.

Пример 10. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$xu''(x) - xu' + \beta u(x) = 0, \quad \beta > 0$$

1. Построить его решения в виде контурных интегралов. Для удобства рассмотреть неотрицательные x .

2. Найти решение, ограниченное при $x \rightarrow +\infty$, такое, что $u(0) = 1$.
3. Найти асимптотику решения при $x \rightarrow +\infty$.
- 4*. Найти асимптотическое поведение $u'(x)$ при $x \rightarrow 0$

Решение¹ В соответствии с общей процедурой составляем полиномы P и Q .

$$P = \beta, \quad (1.188)$$

$$Q = t^2 - t, \quad (1.189)$$

$$Z(t) = \frac{1}{Q} \exp \int \frac{P}{Q} dt = \frac{1}{t(t-1)} \exp \int \frac{\beta dt}{t(t-1)} \quad (1.190)$$

Выполняя интегрирование в показателе экспоненты получаем

$$Z = \frac{(t-1)^{\beta-1}}{t^{\beta+1}}. \quad (1.191)$$

Тогда функция $V = e^{xt}QZ$ даётся выражением:

$$V = \frac{(t-1)^\beta}{t^\beta} e^{xt}. \quad (1.192)$$

Независимые контуры проходят так, чтобы каждый обходил свою особую точку функции V (или сразу обе). Выберем их в виде, указанном на рис. 1.19(a,b). Первый контур обходит точку ветвления $t = 0$ функции V и выбран так, что V стремится к нулю на обеих конечных точках $t = -\infty$, рис. 1.19(a). Другой контур, рис. 1.19(b), имеет своим началом и концом точку ветвления $t = 1$ и выбран в виде петли, обходящей особую точку $t = 0$. На концах контура ($t = 1$) функция V принимает, опять-таки, одинаковые значения (исчезает), как и требует метод. Отметим, что во втором случае петля должна обязательно захватить точку $t = 0$. В противном случае, функция Z будет регулярна внутри петли и по теореме о вычетах даст нулевое решение (см. ??). Может возникнуть вопрос, почему контуры выбраны именно так? Почему не выбрать контур, скажем, γ_3 , изображенный, на рис. 1.19(c)? Он ведь тоже удовлетворяет всем необходимым условиям. На самом деле, несложно убедиться, что контур γ_3 приводит к решению, являющимся линейной комбинацией решений, даваемых γ_1 и γ_2 (см. задачу 11 к данному параграфу)

¹Для читателя, знакомого с гипергеометрическими функциями я специально подобрал пример, полное решение которого не слишком легко найти в стандартном справочнике.

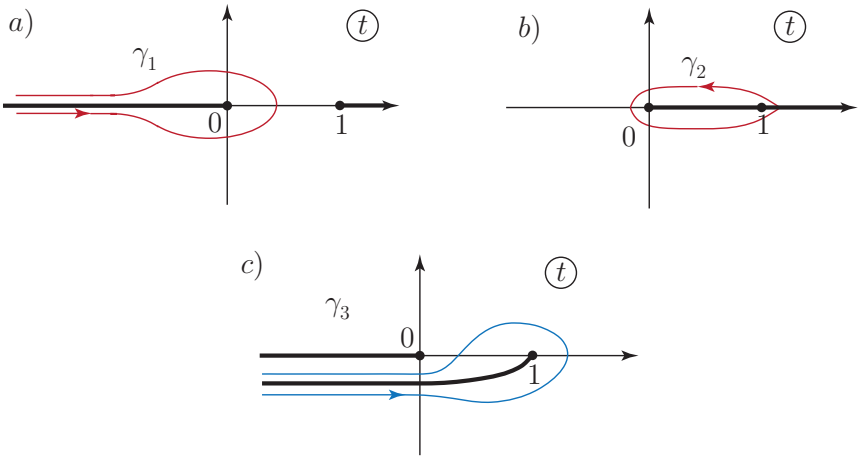


Рис. 1.19: Контуры для решения дифференциального уравнения. Жирные линии, выходящие из точки ветвления - разрезы комплексной плоскости.

Одномерный атом водорода со стенкой

О выборе задачи

Не смотря на кажущуюся простоту, в решении задачи об одномерном атоме водорода до сих пор существуют сложности, связанные с постановкой граничного условия в начале координат $x = 0$. Дело в том, что $x = 0$ является существенно особой точкой оператора Шредингера, нарушающей его самосопряжённость. Выбор же конкретного граничного условия диктуется физической задачей и не может быть сделан на основе только уравнения Шредингера [?]. Поэтому ограничимся упрощённой версией задачи.

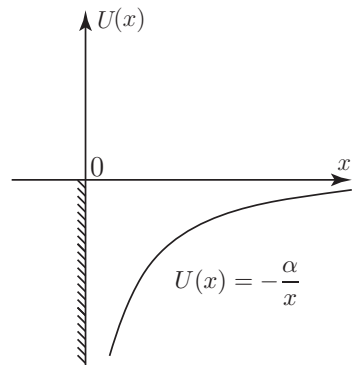


Рис. 1.20: Потенциал одномерного атома водорода со стенкой

Задача Пусть частица массой m находится в потенциале

$$U(x) = \begin{cases} -\alpha/x, & x > 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \quad (1.193)$$

(см. Рис. 1.20) Тогда граничным условием станет соотношение:

$$\psi(+0) = 0. \quad (1.194)$$

Упражнения

Задача 7. Свести уравнение Бесселя

$$z^2 y'' + zy' + y(z^2 - \nu^2) = 0$$

к уравнению с линейными коэффициентами. Методом Лапласа найти решение, удовлетворяющее условию

$$y(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \quad (1.195)$$

Задача 8. Получить разложение Γ -функции вблизи полюсов:

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \psi(n + 1) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

где $\psi(n + 1)$ - логарифмическая производная Γ -функции. $\psi(x) = [\ln \Gamma(x)]'$

Задача 9. Найти образ Меллина для функции

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \quad (1.196)$$

Ответ

$$F(z) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right)} \quad (1.197)$$

Задача 10. Найти образ Меллина для функции $J_\nu(x)$ *Ответ*

$$F_{J_\nu}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-z} \frac{\Gamma\left(\frac{z+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu-z}{2}\right)} \quad (1.198)$$

Задача 11. В примере 10 при решении уравнения выбраны контуры γ_1 и γ_2 в качестве базисных. Доказать, что решение, задаваемое контуром γ_3 (см. рис. 1.19) является линейной комбинацией решений, заданных γ_1 и γ_2 .

Пример 11.

Разложение на простые дроби

Задача 12. Разложить функцию в бесконечные сумму

$$a) f(z) = \operatorname{th} z$$

$$b) f(z) = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$c) f(z) = \operatorname{ctg} z$$

Задача 13. Разложить функцию в бесконечные суммы двумя способами:

i. Регуляризуя полюс в нуле вычитанием главной части лорановского разложения в центре в точке $z = 0$.

ii. Регуляризуя полюс домножением на необходимую степень z .

$$a) f(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^2}$$

$$b) f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}$$

Задача 14. Найти асимптотику интеграла с точностью до членов порядка $1/\lambda$

$$I(\lambda) = \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 z e^{i\lambda(z - \cos z)} dz \quad (1.199)$$

Ответ

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(2e^{-i\frac{\pi}{2}(\lambda-1)} + e^{-i(\lambda+\pi/2)} \right) \quad (1.200)$$

Задача 15. Для интеграла[?]

$$I(\lambda) = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\lambda \cos z) \cos(2z + a) dz. \quad (1.201)$$

- а) Рассчитать асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ и при $\lambda \rightarrow -\infty$ с точностью до членов порядка $1/\lambda^{3/2}$.
 б) Найти приближенно корни уравнения $I(\lambda) = 0$ при $\lambda \gg 1$.

Ответ

$$I(\lambda) = 2 \cos a \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(\cos \left(\lambda - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{15}{8\lambda} \sin \left(\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ \lambda_n = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right) - \frac{15}{8\lambda \left(n + \frac{3}{4} \right)} \quad (1.202)$$

Задача 16. *Сингулярная* $g(z)$. Рассчитать первые 2 члена асимптотики интеграла.

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix(\sinh(t+i)-t)}}{t^2 + 1} dt$$

Ответ:

$$I(x) = e^{-x} \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\Gamma(x)}{4\sqrt{3}} \left(\frac{6}{x} \right)^{1/3} \right] \quad (1.203)$$

Задача 17. Асимптотика функции Ганкеля (седло 2-го порядка.)

Найти асимптотику функции Ганкеля первого рода

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{ix \sin t - \nu t} dt \quad (1.204)$$

при $\nu = x \rightarrow +\infty$. Контур приведен на рис. 3.3

Ответ

$$H_x^{(1)} \approx -\frac{1}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{6}{x}} \left(i - e^{-i\frac{\pi}{6}} \right).$$

Задача 18.

1. Построить решение дифференциального уравнения

$$xy''' - xy' + y = 0$$

в виде контурного интеграла. Считать для удобства $x \geq 0$

2. Построить все необходимые контуры, описывающие линейно независимые решения и найти асимптотики каждого из них при $x \rightarrow +\infty$.

3. Для решения, ограниченного при $x \rightarrow +\infty$ установить константу интегрирования из условия

$$y(0) = \frac{1}{\pi}.$$

Ответ: Решение, ограниченное на бесконечности и нормированное условием 3 имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} e^{xt} \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}},$$

$$y(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-x},$$

$$y(x) =$$

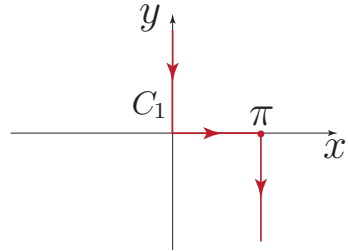


Рис. 1.21: Контур для функции Ганкеля первого рода

Задача 19.

Полиномы Лагерра

Для полиномов Лагерра существует следующее представление в виде контурного интеграла

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} e^z z^{-\alpha} \oint \frac{e^{-t}}{(t-z)^{n+1}} t^{n+\alpha} dt \tag{1.205}$$

Здесь n - степень полинома, а α - произвольный действительный параметр, контур интегрирования в плоскости t проходит против часовой стрелки вокруг точки z . Используя метод перевала, найти асимптотику полиномов Лагерра при $n \rightarrow \infty$. Для удобства считайте z действительным и положительным.

У вас должны получиться 2 седловые точки. Ваши вторые производные, определяющие предэкспоненту, должны получиться равными

$$S''(t_{\pm}) = \pm \frac{2i}{\sqrt{zn}}$$

Для получения правильного выражения в экспоненте удобно использовать представление

$$t = |t|e^{i \arg t}$$

У вас должно получиться

$$\begin{aligned} |t_{\pm} - z| &= \sqrt{z(n+1)}, \\ \arg(t_{\pm} - z) &= \frac{\pi}{2} \mp \frac{\alpha - 1 - z}{2\sqrt{nz}}. \end{aligned}$$

и похожие выражения для t .

Задача 20.

Функции Бесселя

На семинаре мы исследовали асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях аргумента $z \rightarrow \infty$. Используя представление контурным интегралом

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad (1.206)$$

где замкнутый контур обходит точку 0 против часовой стрелки, получить асимптотическое представление функции Бесселя при больших значениях номера $n \rightarrow \infty$. Считайте z действительным и положительным.

У вас должны получиться 2 седловые точки. Одну из них следует исключить из рассмотрения. Почему?

Для получения табличного ответа, приведенного в конце задания, вам возможно окажется полезной формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.207)$$

Задача 21.

Асимптотика интеграла

Найти асимптотику интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{\frac{x^2}{1+x}}} dx \quad (1.208)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Фазовая функция имеет излом на отрезке интегрирования. Разбейте контур на 2 части и для каждого интеграла получите свою асимптотическую оценку.

Задача 22.

Используя метод контурного интеграла Лапласа построить все линейно-независимые решения уравнения. В случае, когда интеграл не вычисляется в элементарных функциях, найти его асимптотику при $z \rightarrow +\infty$

$$zu'' + (z + 2i)u = 0 \quad (1.209)$$

*

$$3zu'' - 2u' + (-3z + 4)u = 0 \quad (1.210)$$

Ответы

1. $L_n^\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{z}{2}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} z^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nz} - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
2. $J_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n,$
3. $F(\lambda) \approx \frac{2}{\lambda}$
- 4a. $u_1(z) = ze^{-iz}, \quad u_2(z) = \int_{-\infty}^i e^{zt} \frac{dt}{(t+i)^2} \rightarrow -\frac{e^{iz}}{4z},$
- 4b. $u_1(z) = (2 + 3z)e^{-z},$
 $u_2(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{zt} dt}{(t+1)^2(t-1)^{2/3}} \rightarrow -\frac{e^z}{4z^{1/3}} e^{-2\pi i/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$

§15 Ответы

$$1. a) \operatorname{th} z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + \pi^2(n + \frac{1}{2})^2},$$

$$b) \frac{1}{\cos^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi(n + \frac{1}{2}))^2}$$

$$c) \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2}$$

$$2. a) \frac{1}{(e^z - 1)^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2z^2}{(z^2 + 4\pi^2 n^2)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z + 1}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

$$b) \frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{(z - \pi n)^3} + \frac{1}{(\pi n)^3} + \frac{z}{2\pi n(z - \pi n)} \right\}$$

§16 Полезные формулы

Формула Хаусдорфа для операторов с c -числовым коммутатором $[A, B] = c$

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}, \quad (1.211)$$

Формула Адамара для произвольных операторов

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda[A, B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (1.212)$$

Полиномы Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (1.213)$$

β -функция Эйлера

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (1.214)$$

§17 Когерентные состояния

На лекции были рассмотрены состояния, являющиеся собственными функциями оператора уничтожения a : $a|\varphi\rangle = \varphi|\varphi\rangle$, где φ - произвольное комплексное число.

Была также получена явная формула для такого состояния:

$$|\varphi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varphi a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = C e^{\varphi a^\dagger} |0\rangle, \quad (1.215)$$

где нормировочная константа C была опущена на лекции.

Используя тождество Хаусдорфа, найти нормировочную константу C .

Задача 23.

Соотношение неопределённости

Чем примечателен класс когерентных состояний? Оказывается, эти состояния минимизируют соотношение неопределённости. А именно, в осцилляторе, находящимся в когерентном состоянии, неопределённость координаты и импульса связаны соотношением:

$$\langle (x - \bar{x})^2 \rangle \langle (p - \bar{p})^2 \rangle = \frac{1}{4}, \quad (1.216)$$

где x и p - операторы координаты и импульса частицы, а $\bar{x} = \langle x \rangle$ и $\bar{p} = \langle p \rangle$ - их средние значения. Откуда берутся соотношения неопределённости? Предположим, даны два некоммутирующих оператора физических наблюдаемых A и B . Как известно, операторы физических наблюдаемых должны быть самосопряжёнными, так что $A^\dagger = A$ и $B^\dagger = B$. Тот факт, что операторы не коммутируют означает, что соответствующие им физические наблюдаемые не могут одновременно иметь определённые значения (не существует базиса состояний, в котором оба оператора были бы одновременно диагональными). Итак, пусть операторы не коммутируют и их нетривиальный коммутатор: $[A, B] = iC$, где C - должен быть самосопряжённым. Обозначим соответствующие средние значения $\langle A \rangle = \bar{A}$, $\langle B \rangle = \bar{B}$, $\langle C \rangle = \bar{C}$. Тогда можно показать [?], что

$$\langle (A - \bar{A})^2 \rangle \langle (B - \bar{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \bar{C}^2. \quad (1.217)$$

Напомним как это делается. Пусть $|\Psi\rangle$ - произвольное нормированное состояние. Рассмотрим состояние:

$$|\Psi_1\rangle = (\alpha A_1 + iB_1)|\Psi\rangle, \quad (1.218)$$

где $A_1 = A - \bar{A}$ и $B_1 = B - \bar{B}$. Имеем:

$$\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = \alpha^2\langle A_1^2\rangle - \alpha\bar{C} + \langle B_1^2\rangle \geq 0, \quad (1.219)$$

где угловые обкладки $\langle A_1^2\rangle \equiv \langle\Psi|A_1^2|\Psi\rangle$ означают усреднение по состоянию $|\Psi\rangle$. Поскольку слева стоит квадратичный полином по α , то его дискриминант должен быть неположительным, так как полином всегда неотрицателен, т.е.

$$\langle A_1^2\rangle\langle B_1^2\rangle \geq \frac{\bar{C}^2}{4} \quad (1.220)$$

Равенство в (1.220) достигается, когда

$$\begin{aligned} (\alpha A_1 + iB_1)|\Psi\rangle &= 0, \text{ или} \\ (\alpha A + iB)|\Psi\rangle &= \varphi|\Psi\rangle, \end{aligned} \quad (1.221)$$

где $\varphi = \alpha\bar{A} + i\bar{B}$. То есть когда состояние $|\Psi\rangle$ - собственное состояние оператора $\alpha A + iB$. В случае гармонического осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (1.222)$$

в качестве операторов A и B можно взять оператор координаты и импульса

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x, \quad B = \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}, \quad \alpha = 1 \quad (1.223)$$

Тогда, собственное состояние оператора уничтожения

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \quad (1.224)$$

есть состояние, минимизирующее соотношение неопределённости для координаты и импульса в осцилляторе.

Покажите, что вектор когерентного состояния, с собственным значением φ имеет в координатном представлении вид:

$$|\varphi\rangle = \text{const} e^{-\frac{m\omega x^2}{2} + \sqrt{2m\omega}x\varphi} \quad (1.225)$$

Состояние $|\varphi\rangle$ не является собственным вектором гамильтониана осциллятора и, следовательно, не является стационарным. Если, однако, позволить некоторым параметрам вектора $|\varphi\rangle$ зависеть от времени, то можно добиться, чтобы он удовлетворял полному уравнению Шредингера:

$$H|\varphi\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle \quad (1.226)$$

Найдите нормированный вектор когерентного состояния в координатном представлении, являющийся решением уравнения Шредингера. Найдите также плотность распределения частицы по координатам.

Задача 24.

Осциллятор и полиномы Эрмита

Используя явный вид волновой функции осциллятора в координатном представлении

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2}x^2} H_n\left(x\sqrt{m\omega}\right) \quad (1.227)$$

и оператора уничтожения (1.224) показать, что

$$a\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x) \quad (1.228)$$

Базис когерентных состояний

Показать, что скалярное произведение любых 2 нормированных когерентных состояний равно

$$\langle\theta|\varphi\rangle = e^{-\frac{|\theta|^2}{2} - \frac{|\varphi|^2}{2} + \bar{\theta}\varphi} \quad (1.229)$$

Здесь черта над θ означает комплексное сопряжение. Оказывается, когерентные состояния образуют базис в фоксовском пространстве. Тот факт, что существует ненулевое скалярное произведение любых двух векторов означает, что их просто слишком много. Такой базис называют переопределённым.

Задача 25.

Вторичное квантование

Гамильтониан системы свободного бозонного газа в представлении вторичного квантования равен

$$H = \sum_p \varepsilon_p a_p^\dagger a_p, \quad (1.230)$$

где суммирование ведется по одночастичным состояниям с всевозможным импульсом \mathbf{p} . Используя выведенные на лекции коммутационные соотношения

$$[a_p, a_q^\dagger] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}, \quad (1.231)$$

найти гейзенберговское представление операторов рождения и уничтожения a_p^\dagger , a_p :

$$a_p(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt}, \quad a_p^\dagger(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} \quad (1.232)$$

Убедиться в том, что для гейзенберговских операторов рождения и уничтожения также выполняются коммутационные соотношения

Найдите вид гейзенберговского представления оператора когерентного состояния $A = e^{\varphi a^\dagger}$ для гамильтониана осциллятора

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (1.233)$$

Задача 26.

Решение уравнения Бесселя

* На семинаре мы разобрали полное решение задачи об осцилляторе. В частности, нами был разобран метод упрощения дифференциального уравнения. Оказалось, что если мы знаем приближенное асимптотическое решение дифференциального уравнения $\psi_{\text{as}}(x)$, то оказывается удобным поиск полного решения в виде $\psi_{\text{as}}\varphi(x)$, где на функцию $\varphi(x)$ получается более простое дифференциальное уравнение.

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0 \quad (1.234)$$

здесь ν - удобно считать произвольным положительным действительным параметром, а x - действительное.

Постройте решение данного уравнения в виде контурного интеграла. Выберите контур так, чтобы решение было ограниченным

при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow +\infty$. Деформируйте контур так, чтобы ответ был записан в виде интеграла по конечному или бесконечному прямолинейному отрезку. Нормируйте решение условием:

$$u(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.235)$$

Получите из данного интеграла хорошо известную асимптотику функции Бесселя при $x \rightarrow +\infty$

Задача 27. Решение уравнения Шредингера с одномерным Кулоном
Рассмотрим одномерное кулоновское взаимодействие вида

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x}, & x > 0, \\ +\infty, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.236)$$

Решая соответствующее уравнение Шредингера методом Лапласа, найдите уровни энергии в такой системе для частицы массой m .

Задача 28.

Метод перевала

* Найти асимптотику интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-3}^3 \cos(\lambda(x^3 + 3x)) dx \quad (1.237)$$

и приближённо найти корни уравнения при $I(\lambda) = 0$ при $\lambda \gg 1$

Ответы

a. $C = e^{-|\varphi|^2}$

b.

c. $\langle x|\varphi\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{\varphi_0^2}{2}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right) - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \sqrt{2m\omega x}\varphi_0 e^{-i\omega t}\right\}$, здесь $\varphi_0 = \varphi(0)$,

$P(x, t) = |\langle x|\varphi\rangle|^2$
 $= \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-m\omega\left(x - \sqrt{2}m\omega\varphi_0 \cos\omega t\right)^2\right\}$

d.

e.

f. $a_{\mathbf{p}}(t) = a_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}$, $a_{\mathbf{p}}^\dagger(t) = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}$

g. $A(t) = e^{-i\omega\varphi t} e^{\varphi a^\dagger}$,

h. $J_\nu(x) = \frac{(2x)^\nu e^{-ix}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 dt e^{2ixt} t^{\nu-\frac{1}{2}} (1-t)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$,

i. $E_n = -\frac{m\alpha^2}{2n^2}$

j. $I(\lambda) = \frac{1}{15\lambda} \sin(36\lambda)$.

§18 Конформные отображения и двумерная электростатика

Оказывается, конформные отображения комплексной плоскости помогают в общем виде решить задачу двумерного распределения потенциала в электростатике. Дело в следующем. Рассмотрим произвольную, аналитическую в некоторой области функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Согласно условиям Коши-Римана 1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x \partial y}, \tag{1.238}$$

То есть, действительная часть аналитической функции удовлетворяет уравнению Лапласа (является гармонической) во всей области своей

аналитичности. Это обстоятельство является ключевым для решения физических задач. Для начала вспомним как решаются двумерные задачи для потенциала в двух простейших случаях: поле равномерно заряженного цилиндра и плоскости.

Поле цилиндра Рассмотрим цилиндр радиуса a . Зафиксируем потенциал на его границе каким-либо граничным условием. И запишем соответствующую краевую задачу:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, u|_{r=a} = u_0 \quad (1.239)$$

Здесь я изначально имею ввиду рассмотрение задачи в полярных координатах. оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.240)$$

Ищем аксиально-симметричное решение $u(r, \varphi) \equiv u(r)$. Тогда решение

$$u = A \ln \frac{r}{a} + u_0 \quad (1.241)$$

Здесь A произвольная постоянная. Кажется, мы имеем дело с парадоксом. В самом деле, сформулированная краевая задача, казалось бы должна *однозначно* определять решение, поэтому наличие константы в 1.241 вызывает беспокойство. На самом деле существует вторая граница нашей области: бесконечно удалённая окружность. Именно на ней должно фиксироваться ещё одно граничное условие. Но здесь опять возникает трудность. Дело в том, что на бесконечности наше решение тоже бесконечно (специфика двумерного кулоновского взаимодействия), и константу зафиксировать по-прежнему невозможно. Мы конечно помним, что напряжённость физического поля задаётся линейной зарядовой плотностью σ . И для определения поля можно, например, воспользоваться теоремой Гаусса в двумерной форме.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} r d\varphi = 4\pi\sigma \quad (1.242)$$

Итак, условия 1.239-1.242 определяют задачу о распределении потенциала во внешности цилиндра.

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости
Решение получается аналогично.

$$u(x, y) = Ay + u_0, \quad (1.243)$$

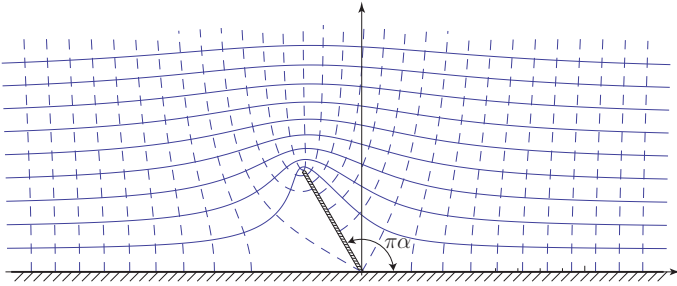


Рис. 1.22: Отображение $\omega = \sqrt{z^2 + h^2}$.

Граничное

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=0} = 2\pi\sigma. \tag{1.244}$$

Задача для полуплоскости. Случай неограниченного потенциала В курсах математической физики ([?]) обычно решается задача, в которой ищется ограниченный во всей области потенциал. Для этого же случая формулируются и теоремы единственности. Однако часто дело обстоит противоположным образом. Мы знаем что даже простейшая физически содержательная задача о потенциале равномерно заряженной плоскости приводит к линейно растущему на бесконечности потенциалу. Для таких потенциалов, теорема единственности в привычном виде уже не работает. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Ограниченное решение уравнения Лапласа дается просто функцией типа константы $u(x, y) = u_0$. Такое решение однако не интересно, поскольку приводит к нулевой во всей плоскости электрическому полю $E_x = \partial u / \partial x$, $E_y = \partial u / \partial y$ и соответствует металлической поверхности с нулевой поверхностной плотностью заряда:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.245}$$

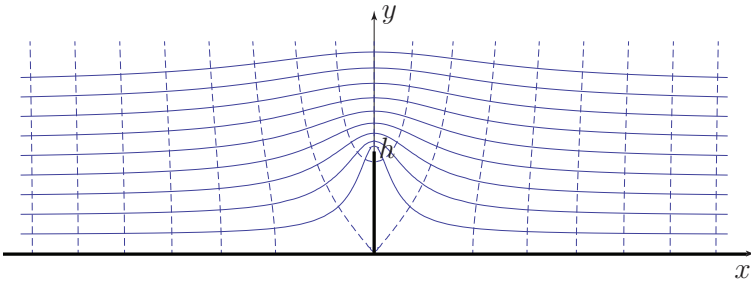


Рис. 1.23: Отображение $\omega = \sqrt{z^2 + h^2}$.

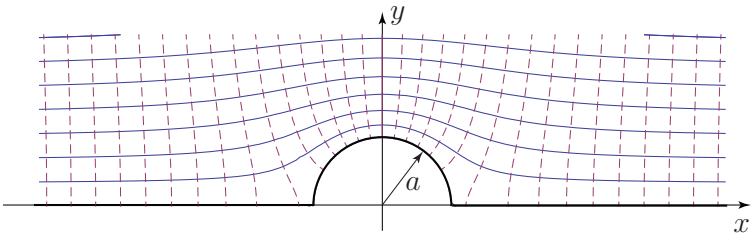


Рис. 1.24: Отображение $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Задача 1

Задача 2

Формула Шварца-Кристоффеля

Попробуем решить задачу о потенциале металлической поверхности достаточно общей формы, а именно, формы произвольного многоугольника. Для этого нам необходимо научиться конформно отображать внутренность многоугольника на верхнюю полуплоскость. Попробуем сначала решить более простую задачу.

Я активно пользовался материалами книг [3, 4, ?].

Гипотеза Римана

aaa

(1.246)

Глава 2

Физические приложения

§1 Улучшенный метод ВКБ

Введение

Здесь я изложу метод расчета коэффициента надбарьерного отражения, предложенный впервые по-видимому Кемблем, В.Л. Покровскому и И.М.Халатникову [?] принадлежит прекрасное изложение и усовершенствование метода, которое позволяет найти также и предэкспоненциальный множитель. Надбарьерное отражение - эффект квантового отражения, когда полная энергия падающей частицы выше максимума потенциального барьера. Задача состоит в том, чтобы предложить метод расчёта коэффициента отражения в квазиклассическом приближении.

К сожалению, обычный квазиклассический подход в подавляющем большинстве случаев не обеспечивает необходимой точности и даёт нулевой коэффициент отражения. Ярким примером может послужить разбор отражения от потенциалов, являющимися простыми степенными функциями координаты. Исключением является лишь перевернутый параболический потенциал $U = -U_0x^2/a^2$. Для него квазиклассическое приближение даёт на самом деле точный коэффициент отражения (см. Ландау-Лифшиц-3). Но уже потенциал четвертой степени, скажем $U = -U_0x^4/a^4$, приводит к нулевому коэффициенту отражения в обычном квазиклассическом подходе. Дело в том, что стандартный подход не является достаточно точным и упускает экспоненциально малые отраженные волны. Прежде чем продолжить анализ, остановимся на одном простом

математическом наблюдении, имеющим ключевое значение для понимания дальнейшего.

Явление Стокса

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''(z) = \kappa^2 y(z) \quad (2.1)$$

Одним из его решений является целая функция $y = \cosh z$. В правой полуплоскости, для решения справедлива асимптотика

$$y = \frac{1}{2} e^z. \quad (2.2)$$

В левой же полуплоскости асимптотика будет другая:

$$y = \frac{1}{2} e^{-z}. \quad (2.3)$$

Подобное явление по сути своей довольно необычно. Получается, что решение уравнения даётся аналитической функцией, а асимптотика - не является таковой. Перейдем из правой полуплоскости в левую по верхней полуокружности большого радиуса. Тогда видно, что на оси $\text{Re } z = 0$ асимптотика (2.2) перестаёт быть справедливой, т.к. на ней точное решение уже перестаёт быть экспоненциально большим и превращается в $y = \cos z$. При переходе в левую полуплоскость, решение, дающее асимптотику справа, экспоненциально подавлено. Такое явление смены асимптотики при пересечении некоторой сепаратрисы называют явлением Стокса. Саму же сепаратрису называют линией Стокса. Как мы увидим, обсуждаемое явление играет ключевую роль в квазиклассической теории рассеяния.

Обычный квазиклассический подход

Коротко напомним идеологию обычного подхода. Условие квазиклассичности состоит в требовании:

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| = \left| \frac{dU}{dx} \frac{m}{p^3} \right| \ll 1 \quad (2.4)$$

В широком классе задач его можно понимать и как $\lambda/d \ll 1$ (или $kd \gg 1$), где d - характерного расстояние, на котором меняется потенциал, то есть малость длины волны частицы по сравнению с шириной потенциального барьера.

Пусть частица (плоская волна) падает слева. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ существует только прошедшая волна. На больших расстояниях условие (2.4) выполняется для большинства потенциалов и движение вдали от потенциала квазиклассично. Тогда решение можно записать в виде

$$\psi(x) = e^{i \int_{x_0}^x p dx}, \quad x \gg d, \quad (2.5)$$

$$p = \sqrt{2m(E - U(x))}.$$

здесь, x_0 - начальная точка интегрирования, которая может быть любой точкой комплексной плоскости. Должна ли x_0 лежать в области применимости квазиклассического приближения? Не обязательно. Выбор точки x_0 влияет только на общую нормировку решения (2.5). Действительно, интеграл в экспоненте (2.5) можно разбить на 2 части: $\int_{x_0}^x = \int_{x_0}^{x_*} + \int_{x_*}^x$, где x_* - точка, лежащая в квазиклассической области. Первый интеграл - просто нормировка. Если потенциал является аналитической функцией, то мы ожидаем, что решение (2.5) остаётся справедливым во всей комплексной плоскости, где выполняется условие (2.4). Казалось бы, решение слева можно получить обычным аналитическим продолжением решения (2.5). Но мы уже знаем как опасны такие рассуждения в применении к асимптотикам. Из физических соображений ясно, что решение (2.5) не может остаться верным при переходе из правой полуплоскости в левую. Действительно, далеко слева от потенциала асимптотика решения есть линейная комбинация падающей и отраженной волны:

$$\psi(x) = ae^{i \int_{x_0}^x p dx} + re^{-i \int_{x_0}^x p dx}, \quad |x| \gg d, \quad (2.6)$$

Сопоставляя решения (2.5) и (2.6) мы понимаем, что происходит при аналитическом продолжении. Продлим решение (2.6) вдоль верхней полуокружности большого радиуса ($x \rightarrow x + iy$) вправо. Видно, что амплитуда отраженной волны при выходе в верхнюю полуплоскость будет расти, а падающей - уменьшаться. Следует поставить вопрос: получим ли мы таким образом уходящую вправо волну? Если нет, то верхняя полуокружность не является правильным контуром для решения задачи об отражении и нужно выбрать нижнюю¹. Итак, амплитуда падающей волны будет уменьшаться, а отраженной - расти вплоть до области перехода из левой полуплоскости в правую. В этот момент отраженная волна будет максимально доминировать

¹Возможна ситуация, когда переход вдоль верхней полуокружности дает не в прошедшую, а падающую справа волну

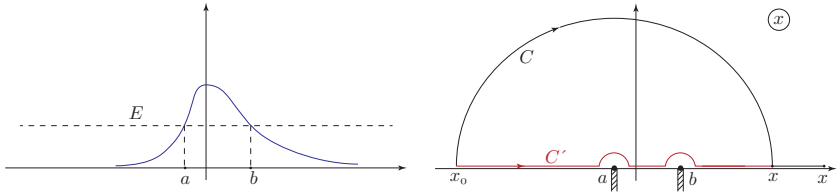


Рис. 2.1: Правило квазиклассического обхода для подбарьерного отражения.

над падающей. При входе в левую полуплоскость, квазиклассическая точность вычислений не позволяет оставить падающую волну на фоне отраженной и она теряется.

Докажем, что в результате такого перехода получается действительно уходящая вправо (то есть прошедшая) волна. Квазиклассическая экспонента, описывающая отраженное решение, имеет вид:

$$\psi(x) = r e^{-i \int_C p(x) dx}, \quad (2.7)$$

где контур C - большая дуга, соединяющая точки x_0 и x (см. рис. 2.1). Мы выбрали x_0 лежащую на действительной оси слева от точки поворота a . Импульс частицы - вообще говоря, многозначная функция в комплексной плоскости, имеющая ветвления в точках остановки a и b . Проводим разрезы так, чтобы они не пересекли линию обхода. Поскольку C - ещё и контур интегрирования, мы можем его деформировать. Делаем это так, как показано на рисунке (контур C'). При этом положение разрезов диктует правило обхода точек ветвления: сверху. Тогда в точке x лежащей справа, значение квадратного корня, определяющего импульс, изменится на противоположное (приращения аргумента p в точках a и b , равные $-\pi$, складываются). Итак, справа экспонента отраженной волны примет вид

$$\psi(x) = r e^{-\int_a^b |p| dx} e^{i \int_b^x p dx - i \varphi_0} \equiv t e^{i \int_b^x p dx}, \quad \varphi_0 = \int_{x_0}^a p dx, \quad (2.8)$$

где φ_0 - несущественная действительная фаза. Экспонента $e^{i \int_b^x p dx} \rightarrow e^{i p x + i \varphi_+}$ даёт уходящую волну. Теперь из условия сохранения потока: $|a|^2 - |r|^2 = |t|^2$ получаем коэффициент прохождения:

$$T = \frac{|t|^2}{|r|^2 + |t|^2} \approx e^{-2 \int_a^b |p| dx} \quad (2.9)$$

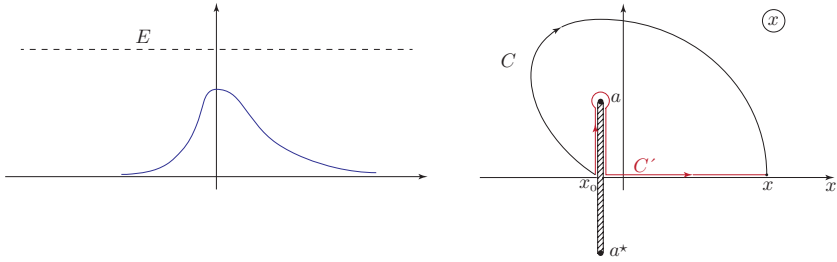


Рис. 2.2: Правило квазиклассического обхода для надбарьерного отражения.

Простое обобщение этого метода на случай надбарьерного отражения принадлежит Л.Д. Ландау и изложено им в [31]. В случае надбарьерного отражения точка поворота a смещается в комплексную плоскость. В силу действительности потенциала, ей всегда соответствует симметричная относительно горизонтальной оси точка поворота a^* в нижней полуплоскости. В этом случае, рассуждая аналогично предыдущему, можно заключить, что при аналитическом продолжении в правую полуплоскость отраженная волна переходит опять-таки в прошедшую. Теперь деформация контура будет иная. Контур должен обойти разрез $[a, a^*]$. Удобно выбрать точку x_0 как показано на рис. 2.2.

$$T = \frac{|t|^2}{1 + |t|^2} \approx e^{-4\text{Im} \int_{x_0}^a p dz} \quad (2.10)$$

Метод хорош тем, что позволяет найти не только экспоненту но и предэкспоненту. К сожалению, такое простое обобщение не работает для большинства потенциалов. Например, отражение от потенциала $U = -U_0 x^4/a^4$ уже не поддается подобному описанию. Дело в том, что импульс, отвечающий такому потенциалу имеет 2 точки ветвления в верхней полуплоскости и переход слева направо переводит отраженную волну в падающую справа, а не в прошедшую. Требуется более точный метод, к обсуждению которого мы и приступаем.

Идея Покровского-Халатникова

Обычный квазиклассический метод не выбирает пути перехода для аналитического продолжения функции справа налево (или наоборот). Единственное ограничение, которое на него накладывается состоит

в том, что путь должен лежать в квазиклассической области. Рассмотрим переход справа налево. Мы уже знаем, что прошедшая волна переходит в отраженную. Экспоненциально же малая в верхней полуплоскости падающая волна теряется при пересечении линии Стокса. Есть способ обезопасить себя от потери асимптотики. Следует двигаться по таким линиям γ , вдоль которых амплитуда волны, пропорциональная $\exp[-\text{Im} \int_{x_0}^x p dx]$ вообще неизменна,

$$\gamma : \text{Im} \int_{x_0}^x p dx = \text{const.} \quad (2.11)$$

Когда линия γ пересечёт линию Стокса, в решении на фоне отраженной возникнет так же и падающая волна, амплитуда которой будет такого же порядка как и отраженная. Сложность, однако, состоит в том, что положение линии Стокса заранее неизвестно и сильно зависит от потенциала. Так что в общем случае нельзя угадать вид и правило трансформации решений вблизи точки перехода. Задача облегчается тем, что существуют точки в комплексной плоскости, через которые *всегда* проходит линия Стокса. Это точки поворота. В самом деле, в случае подбарьерного отражения они буквально преобразуют падающую волну в прошедшую и отраженную. Как и в обычной квазиклассике, вблизи точки поворота, квазиклассическое приближение перестаёт быть верным. Здесь спасает точное решение, которое всегда можно найти вблизи точки поворота. Асимптотики точного решения при больших x и являются прародителями падающей, отраженной и прошедшей волн. Все что требуется для завершения задачи - это сплести точное решение с квазиклассическими экспонентами. При этом необходимо потребовать, чтобы область, где справедливы асимптотики точного и квазиклассических решений перекрывались. Как правило, это имеет место для потенциалов и энергий удовлетворяющих условию квазиклассичности: $\{E, U\} \gg 1/(ma^2)$.

Выберем точку x_0 совпадающей с точкой поворота. Тогда требование (2.11) превращается в $\text{Im} \int_{x_0}^x p dx = 0$, то есть при движении вдоль критической линии квазиклассическая фаза - чисто действительна. Путь начинается с действительной оси и поднимается в верхнюю комплексную полуплоскость до пересечения с критической линией C_1 , проходящей через точку поворота x_0 (см. рис. (2.3)(а)). В силу того, что потенциал спадает на бесконечности, линия C_1 на бесконечности идет параллельно действительной оси. Затем путь обходит точку остановки по окружности большого радиуса. На этой окружности происходит смена асимптотики (явление

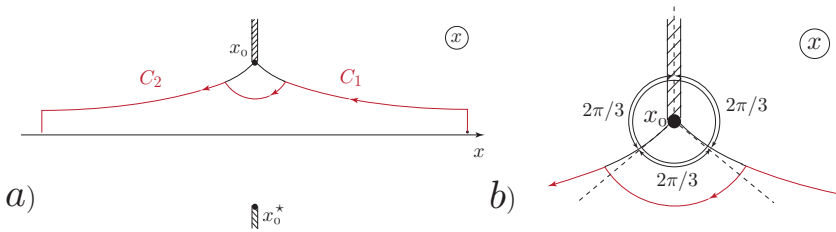


Рис. 2.3: Деформация Покровского-Халатникова для надбарьерного отражения.

Стокса). Смена происходит в соответствии с законом, предписанным точным решением, полученным разложением потенциала вблизи точки поворота. Обход вдоль окружности идет до пересечения со следующей линией C_2 , уходящей уже в левую полуплоскость. Правило обхода точки поворота (сверху или снизу) диктуется условием задачи, а именно: на *левой* части критической линии должны существовать 2 волны: падающая и отраженная. При этом, их фазы также будут чисто действительными, и амплитуды будут одного порядка. В случае если точка поворота представляет собой нуль функции $k(x)$ первого порядка, мы увидим, что амплитуды отраженной и падающей волны совпадают. Таким образом на линии C_2 , лежащей в комплексной плоскости падающая волна может полностью отразиться при движении вдоль контура C_2 . Но когда путь опускается на действительную ось, экспонента, описывающая падающую волну возрастает, а отраженную - убывает [?]. Так возникает коэффициент надбарьерного отражения.

Технические детали. Простая точка поворота

Теперь рассмотрим применение этой идеи на практике.

Шаг I Вблизи точки поворота разлагаем потенциал до линейного члена по x и определяем критические направления. Уравнение Шредингера:

$$\psi'' + \kappa^2 a^2(x - x_0)\psi = 0, \quad \kappa^2 a^2 = 2m \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0} \quad (2.12)$$

a - ширина потенциальной ямы. Для определённости считаем $\arg \{dU/dx|_{x_0}\} \in (-\pi/2, \pi/6)$. Это ни в коей мере не

ограничивает анализ, что будет очевидно из дальнейшего. В квазиклассическом приближении $|x - x_0|/a \gg (\kappa a)^{-2/3}$ (см. (2.4)) для распространяющейся вправо волны справедливо решение:

$$\psi_1 = \frac{t}{\sqrt{p}} e^{i \int_{x_0}^x p dx} \quad (2.13)$$

Вблизи точки перехода:

$$\int_{x_0}^x p dx = \kappa a \frac{2}{3} (x - x_0)^{2/3}. \quad (2.14)$$

Тогда критические линии даются соотношением:

$$\begin{aligned} \sin(\arg(\kappa a) + \frac{3}{2} \arg(x - x_0)) &= 0, \Rightarrow \\ \arg(x - x_0) &= -\frac{2}{3} \arg(\kappa a), \quad -\frac{2}{3} \arg(\kappa a) \pm 2\pi/3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Лучи, определяемые углами (2.15) и есть начала критических линий, проходящих через точку остановки (см. рис. 2.3(b)). Итак, линия C_1 подходя под углом $\arg(x - x_0) = -\frac{2}{3} \arg(\kappa a)$, должна обойти по трети круга точку остановки x_0 и перейти в линию C_2 , на которой решение будет даваться суммой падающей и отраженной экспонент:

$$\psi_2 = \frac{a}{\sqrt{p}} e^{i \int_{x_0}^x p dx} + \frac{b}{\sqrt{p}} e^{-i \int_{x_0}^x p dx} \quad (2.16)$$

Вопрос об обходе точки остановки для каждой задачи решается отдельно. В данном случае интуитивно ясно, что правильный обход будет нижним ($\Delta \arg(x - x_0) = -2\pi/3$), так как в этом случае решение уходит налево вдоль линии, лежащей заведомо ближе к действительной оси, чем решение, полученное верхним обходом. Полную уверенность, однако, даёт лишь строгий расчёт. Можно показать (см. задачу xxx), что обход вдоль верхней части круга не даёт линейной комбинации падающей и отраженной волны, а переводит прошедшую волну в отраженную.

Шаг 2 Решим уравнение Шредингера (2.12) точно. Обезразмеривая ($s = (\kappa a)^{-2/3} z$), сводим его к уравнению Эйри.

$$\psi'' + z\psi = 0. \quad (2.17)$$

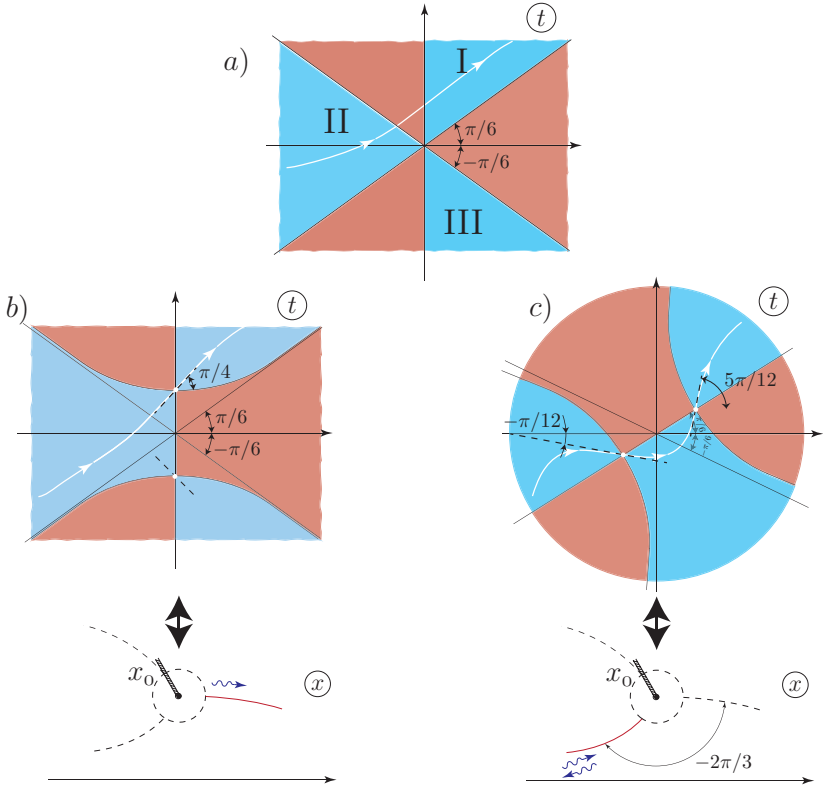


Рис. 2.4: а) Области определяющие решение уравнения Эйри. б),с) Рельеф, точки перевала и направления наискратчайшего спуска функции $f(t)$ на правой и левой критических линиях.

Необходимо провести полное исследование асимптотик решения при разных значениях аргумента. Для этого решим его методом Лапласа:

$$P = t^2, \quad Q = 1, \quad V = e^{t^3/3}, \quad Z = e^{zt+t^3},$$

$$\psi(z) = C \int_{\beta} e^{zt+t^3/3} dt. \tag{2.18}$$

Здесь контур β должен обязательно уходить на бесконечность (иначе мы получим тривиальное решение), при том так, чтобы функция $V(t)$ принимала одинаковые значения на его концах. При больших $t \gg 1$, сходимость интеграла (2.18) определяется условием $\text{Re } t^3 < 0$.

Таким образом, получаем три области сходимости (см. рис. 2.4(а)). Сходимость интеграла (2.18) гарантирует и стремление функции $V(t)$ к нулю на концах контура. Любые контуры, имеющие свои края в областях I, II и III дают решения уравнения Эйри. Нам необходимо выбрать контур, дающий правильную асимптотику при $z \rightarrow +\infty$. Оценивая асимптотики методом перевала, угадываем нужное положение. Контур, имеющий границы в областях I и II - искомый. Для того, чтобы убедиться в этом, построим асимптотику. Перевальных точек у функции $f(t) = zt + t^3/3$ две: $t_{1,2} = \sqrt{z}e^{\pm i\pi/2}$. Им соответствуют направления наискорейшего спуска: $\alpha_1 = \pi/4 + \pi n_1$ и $\alpha_2 = 3\pi/4 + \pi n_2$. Изучим детально, какая из точек перевала подходит. Перевал должен быть точкой максимума функции $\operatorname{Re} f(t)$ на контуре $\operatorname{Re} f(t) \leq f(t_{1,2})$. Из условий (2.15) следует, что $\arg z = 0$, что сильно упрощает анализ рельефа функции $\operatorname{Re} f(t)$. Для обеих перевальных точек получаем условие:

$$t' \left(z + \frac{1}{3}t'^2 - t''^2 \right) \leq 0, \quad t = t' + it'' \quad (2.19)$$

Соответствующие гиперболические контуры представлены на рис. (2.4)(b). Из рисунка следует, что возможен переход лишь через верхний перевал, который и даёт нужную асимптотику.

$$\psi = C \frac{\sqrt{\pi}}{z^{1/4}} e^{\frac{2}{3}iz^{3/2} + \frac{i\pi}{4}}, \quad z \rightarrow +\infty \quad (2.20)$$

Аналитическое продолжение Теперь z совершает поворот на $-2\pi/3$: $z \rightarrow ze^{-2\pi i/3}$. Вся картина повернется на угол $2\pi/3$. Новые перевалы располагаются в точках $t_1 = e^{\pi i/6} \sqrt{|z|}$ и $t_2 = e^{-5\pi i/6} \sqrt{|z|}$. Соответствующие направления наискорейшего спуска $\alpha_1 = 5\pi/12 + \pi n_1$ и $\alpha_2 = -\pi/12 + \pi n_2$. Рельеф $\operatorname{Re} f(t)$ изображен на рис. 2.4(с). Теперь контур может пройти через оба перевала, что и приводит к появлению отраженной волны на фоне падающей. Соответствующая асимптотика:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\sqrt{\pi}}{|z|^{1/4}} \left(e^{-\frac{2}{3}i|z|^{3/2} + \frac{5i\pi}{12}} + e^{\frac{2}{3}i|z|^{3/2} - \frac{i\pi}{12}} \right), \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{z^{1/4}} \left(e^{\frac{2}{3}iz^{3/2} + \frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{2}{3}iz^{3/2} - \frac{i\pi}{4}} \right), \quad z \rightarrow +\infty e^{-2\pi i/3}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Как видно, на критической линии C_2 амплитуда падающей волны действительно совпадает с отраженной.

Шаг III Теперь необходимо сшить точные решения (2.20)-(2.21) с соответствующими квазиклассическими выражениями (2.16)-(2.13). Очевидная сшивка даёт правило, по которому волна слева восстанавливается по волне справа:

$$\psi_2(x) = \frac{t}{\sqrt{p}} \left(e^{i \int_{x_0}^x p dx} + e^{-i \int_{x_0}^x p dx - i\pi/2} \right) \quad (2.22)$$

Как и предсказывалось, прошедшая и отраженная волна имеют одинаковую амплитуду на критической линии. Для того, чтобы получить коэффициент отражения, необходимо вернуться на действительную ось и выделить тот вертикальный участок пути, который и ответственен за уменьшение отраженной амплитуды и увеличение падающей. Один из способов может состоять в том, чтобы явно выделить слагаемое p_-x (p_- квазиклассический импульс налетающей слева частицы) из квазиклассической экспоненты $\int_{x_0}^x p dx$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x p dx &= p_-x + \int_{x_0}^x (p - p_-) dx - p_-x_0 \rightarrow p_-x - \varphi_0, \\ \varphi_0 &= \int_{-\infty}^{x_0} (p - p_-) dx + p_-x_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тогда решение ψ_2 можно переписать в виде:

$$\psi_2(x) = \frac{t}{\sqrt{p}} \left(e^{ip_-x + i\varphi_0} + e^{-ip_-x - i\varphi_0 - i\pi/2} \right) \quad (2.24)$$

Откуда мы получаем амплитуду и коэффициент отражения:

$$r = -ie^{2i\varphi_0}, \quad R = e^{-4\text{Im}\varphi_0} \quad (2.25)$$

В данном случае предэкспоненциальный множитель оказался равным единице. Мы разобрали пример, когда в верхней полуплоскости находится единственная точка поворота. Квазиклассическому описанию поддается и случай

Несколько точек поворота

Любопытная деталь: как видно из формул (2.21)- (2.22), при аналитическом продолжении за точку поворота прошедшая волна переходит в падающую без изменения фазы, в то время как отраженная просто домножается на $\exp\{-i\pi/2\}$. Такое поведение

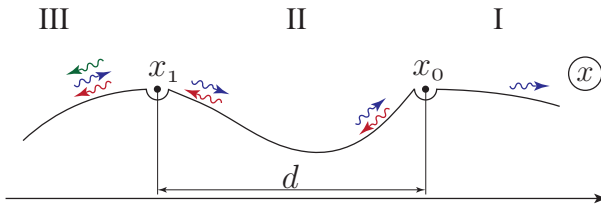


Рис. 2.5: Структура решения для случая двух точек поворота в комплексной плоскости.

позволяет нам построить простое обобщение метода на случай, когда в верхней полуплоскости существует несколько точек поворота. Для применимости метода необходимо, чтобы точки поворота были разнесены на квазиклассически-различимое расстояние $d \gg 1/\sqrt{mE}$, где d , как правило, имеет порядок ширины потенциала. Это условие позволяет нам рассмотреть отражение от каждой из точек поворота независимо, и назвать его, в известном смысле, *некогерентным*. После отражения от первой точки, прошедшая волна $\psi_I = t \exp\{i \int p dx\}$ переходит в сумму падающей и отраженной. $\psi_{II} = \psi_{i1} + \psi_{r1}$. Критическая линия подходит ко второй точке. Читателю предлагается показать, что при переходе в область III отраженная волна ψ_{r1} продолжается без изменения в область III. Волна ψ_{i1} играет роль прошедшей для второй точки поворота. В соответствии с общим правилом (2.22) она переходит в линейную комбинацию двух волн. Переписывая тождественно $\int_{x_0}^x p dx \equiv \int_{x_0}^{x_1} p dx + \int_{x_1}^x p dx$ получим:

$$\begin{aligned} \psi_{r1} &\rightarrow \frac{t}{\sqrt{p}} e^{-i \int_{x_0}^{x_1} p dx} e^{-i \int_{x_1}^x p dx - i\pi/2} \\ \psi_{i1} &\rightarrow \frac{t}{\sqrt{p}} e^{i \int_{x_0}^{x_1} p dx} (e^{i \int_{x_1}^x p dx} + e^{-i \int_{x_1}^x p dx - i\pi/2}) \\ \psi_{III} &= \frac{t}{\sqrt{p}} \left[e^{i \int_{x_0}^x p dx} + e^{-i \int_{x_0}^x p dx - i\pi/2} + e^{i \int_{x_0}^{x_1} p dx - i \int_{x_1}^x p dx - i\pi/2} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из последнего результата мы получаем коэффициент прохождения:

$$R = e^{-4\text{Im}\varphi_1} |1 + e^{-2i \int_{x_0}^{x_1} p dx}|^2. \quad (2.27)$$

где $\varphi_1 = \int_{-\infty}^{x_1} (p-p_-) dx + p_- x_1$, Обобщение на произвольное количество точек поворота не составляет затруднений.

Задача 29. Найти коэффициент отражения в потенциале:

$$U(x) = -U_0 x^4/a^4, \quad (2.28)$$

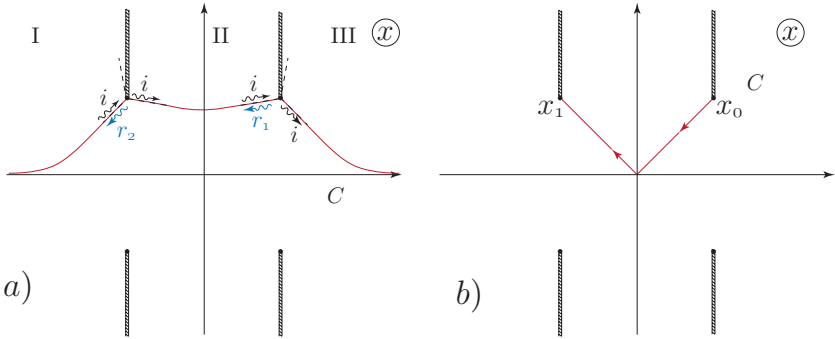


Рис. 2.6: Два контура, два решения. два ответа.

при энергии налетающей частицы $E \gg \frac{1}{ma^2}$.

Решение задачи 29 Единственными особенностями $p(x)$ в верхней полуплоскости являются точки ветвления $a_1 = \sqrt[4]{E/U_0}e^{\pi i/4}a$, $a_2 = \sqrt[4]{E/U_0}e^{3\pi i/4}a$. Возникают 2 отраженные волны, каждая - порождаемая соответствующей особенностью $p(x)$ (рис. 2.6(a)). Воспользуемся формулой (2.27) и рассчитаем интеграл, предварительно деформируя контур так, как показано на рис. 2.6(b)

$$\int_{x_0}^{x_1} p dx = \int_{x_0}^0 p dx + \int_0^{x_1} p dx = -ka \left(\frac{E}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} B(3/2, 1/4) \left(-e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{3\pi i}{4}}\right), \quad (2.29)$$

где $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ - β -функция Эйлера. Выполняя элементарные преобразования получим

$$\int_{x_0}^{x_1} p dx = \int_{x_0}^0 p dx + \int_0^{x_1} p dx = -\frac{2ka}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{E}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) = -ka^*. \quad (2.30)$$

Теперь вычисляем фазовый множитель φ_0 . В данной задаче мнимая часть φ_0 можно записать как

$$\text{Im } \varphi_0 = \text{Im} \int_0^{x_1} p dx = \text{Im} \frac{\sqrt{2}ka}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{E}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) e^{3\pi i/4} = \frac{ka^*}{2}. \quad (2.31)$$

Тогда коэффициент прохождения:

$$R = 4e^{-2ka^*} \cos^2 ka^*.$$

Задача 30. Найти коэффициент отражения в потенциале:

$$U(x) = -U_0 \cosh^2 \frac{x}{a}, \quad (2.32)$$

при условии $E \gg U_0 \gg \frac{1}{ma^2}$. Ответ: $R = 4 \cos^2 [2ka \ln (2\sqrt{\frac{E}{U_0}})] e^{-2\pi ka}$.

Когерентное рассеяние от нуля и полюса второго порядка

В точке поворота энергия частицы и потенциальная энергия сравниваются. В тех случаях, когда энергия налетающей частицы велика, точка поворота может находиться рядом с особенностью потенциала. Расстояние может оказаться настолько близким, что полюс и точка поворота окажутся лежащими на квазиклассически неразличимом расстоянии. В этом случае необходимо учитывать влияние полюса на асимптотики решений вблизи точки поворота, рассеяние будет происходить когерентным образом на обеих особенностях.

Модифицированный потенциал Пешля-Теллера. Ярким примером когерентного отражения от полюса и точки поворота является задача о рассеянии на потенциале

$$U(x) = -U_0 / \cosh^2 xa \quad (2.33)$$

при не слишком маленьких значениях энергии налетающей частицы: $U_0 \ll \sqrt{\frac{E}{ma^2}}$. Мы будем считать условие квазиклассичности выполненным: $E \gg 1/(ma^2)$. Задача является частным случаем общей задачи о надбарьерном отражении от потенциала, имеющего полюс 2-го порядка в комплексной плоскости x в непосредственной близости точки поворота. Точки поворота в верхней полуплоскости даются уравнением:

$$E = -\frac{U_0}{\cosh^2 x_0/a}. \quad (2.34)$$

Два ближайших к действительной оси корня даются выражениями:

$$x_0^\pm = \frac{\pi ia}{2} \pm a \operatorname{arsh} \lambda \approx \frac{\pi ia}{2} \pm \lambda a, \quad \lambda = \sqrt{\frac{U_0}{E}} \quad (2.35)$$

Ближайший же полюс потенциала лежит в точке $x_1 = ia\frac{\pi}{2}$. Видно, что полюс находится недалеко от точек ветвления x_0^\pm : $(x_0^\pm - x_1)/x_1 \ll 1$. Это необходимо учесть при соответствующем разложении решения в окрестности точки ветвления. Здесь нас подстерегает сложность: вблизи x_0^\pm разложение импульса $k(x)$ в ряд Тейлора неприменимо, поскольку в окрестности точки находится полюс потенциала, в котором заведомо нарушается разложение. Более правильным является разложение потенциала в ряд *Лорана* вокруг полюса x_1 , которое справедливо и в окрестности точек ветвления x_0^\pm . Имеем:

$$U(s) = \frac{U_0}{s^2 a^2} - \frac{U_0}{3}, \quad s = x - x_1 \quad (2.36)$$

Тогда в окрестности полюса получаем уравнение:

$$\psi'' + \left(k^2 - \frac{\kappa^2 a^2}{s^2} \right) \psi = 0, \quad (2.37)$$

$$k = \sqrt{2m(E + U_0/3)}, \quad \kappa = \sqrt{2mU_0}.$$

Дифференциальное уравнение (2.37) можно свести к уравнению Бесселя. Используя затем аналитические свойства решений, следующих из теории функций Бесселя, можно связать отраженную и падающую волну и решить задачу. Мы, однако, не ставим себе целью научить читателя пользоваться справочниками. Вместо этого, мы попытаемся показать как справляться с подобной задачей с помощью метода контурных интегралов. Мне кажется это чрезвычайно поучительным.

Уравнение упрощается стандартным образом. А именно, ищем асимптотики при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$. При $x \rightarrow \infty$ в уравнении (2.37) можно пренебречь членом пропорциональным $\sim 1/s^2$. Тогда получим уравнение плоской волны:

$$\psi'' + k^2 \psi = 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \psi \rightarrow e^{ikx}. \quad (2.38)$$

При малых x напротив, в уравнении можно пренебречь слагаемым s^2 :

$$s^2 \psi'' - \kappa^2 a^2 \psi = 0, \quad x \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow x^\mu, \quad (2.39)$$

где μ - корень характеристического уравнения $\mu(\mu - 1) = \kappa^2 a^2$. Выберем положительный: $\mu = (1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 a^2})/2$. Тогда уравнение Шредингера упрощается подстановкой

$$\psi(x) = e^{iks} s^\mu \varphi(s). \quad (2.40)$$

В результате получается уравнение с линейными коэффициентами:

$$s\varphi'' + \varphi'(2\lambda + 2iks) + 2ik\lambda\varphi = 0. \quad (2.41)$$

Его решение ищем следуя методу Лапласа.

$$P = 2\mu t + 2ik\mu, \quad Q = t^2 + 2ikt, \quad Z = t^{\mu-1}(t + 2ik)^{\mu-1}, \\ V = t^\mu(t + 2ik)^\mu e^{st}$$

И решение имеет вид:

$$\varphi(s) = \int_C e^{st} t^{\mu-1} (t + 2ik)^{\mu-1} dt, \quad (2.42)$$

где путь интегрирования должен быть выбран так, чтобы функция V возвращалась к своему начальному значению. В интеграле удобно сделать замену $st \rightarrow t$. Эта замена удобна тем, что сходимость интеграла, дающего решение при больших t не зависит от аргумента s а определяется только экспонентой e^t .

$$\varphi(s) = s^{1-2\mu} \int_C e^t t^{\mu-1} (t + 2iks)^{\mu-1} dt. \quad (2.43)$$

Видно, что подынтегральное выражение имеет точки ветвления $t = 0$ и $t = -2iks$. Чтобы сделать его однозначным, необходимо провести соответствующие разрезы в комплексной плоскости t . У нас полная свобода в их выборе. Ясно, что ненулевые решения можно получить только для контуров i) обходящих разрезы ii) соединяющих точки ветвления ($\mu \geq 1$). Обе типичных возможности представлены на рис. 2.7(a),(b) для $\text{Re } s > 0$. Кроме того, соответствующее решение должно иметь строго определенное асимптотическое поведение. В данном случае, оно должно иметь вид движущейся в положительном направлении плоской волны при $s \rightarrow +\infty$. Рассмотрим контур рис. 2.7(a). Так как перевальных точек нет, асимптотика решения даётся окрестностью края контура $t = 0$. Раскладывая подынтегральное выражение в окрестности $t = 0$ и вводя параметризацию $t = e^{i\pi}\rho$, получаем:

$$\varphi(s) \approx s^{1-2\mu} (2kse^{i\pi/2})^{\mu-1} \int_0^\infty e^{-\rho} (\rho e^{i\pi})^{\mu-1} d\rho e^{i\pi} = -(2ke^{3\pi i/2})^{\mu-1} \frac{\Gamma(\mu)}{s^\mu}, \\ \psi(s) = -(2ke^{3\pi i/2})^{\mu-1} \Gamma(\mu) e^{iks} \quad (2.44)$$

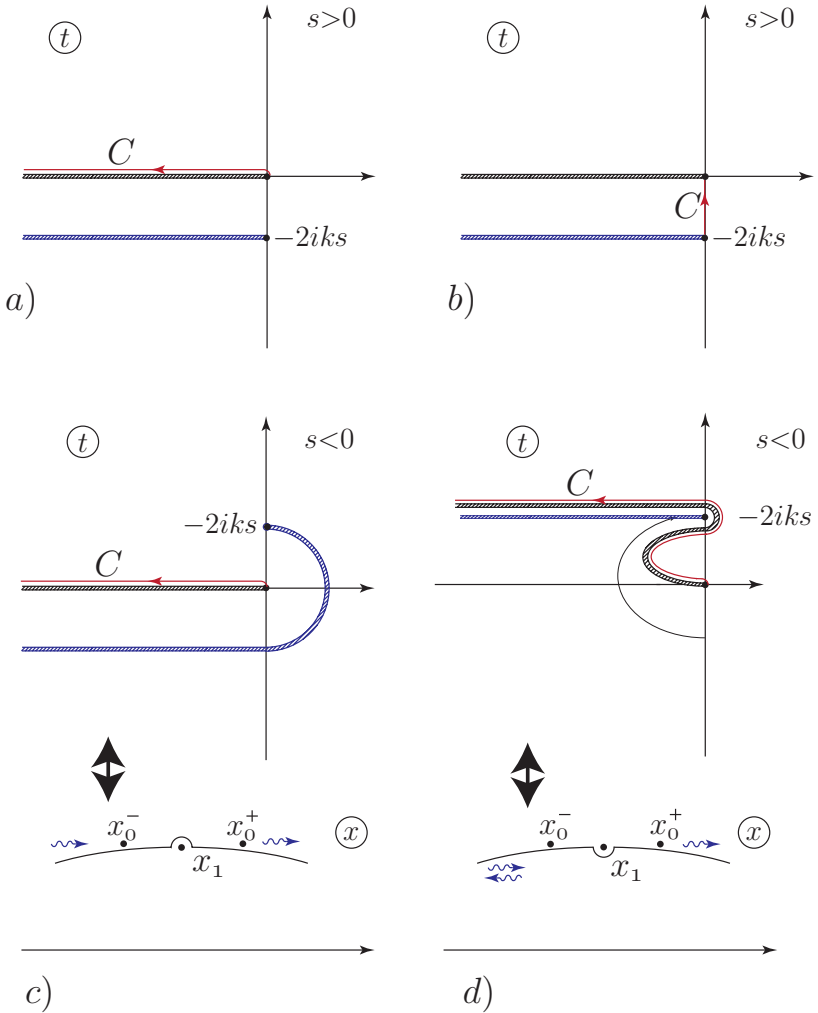


Рис. 2.7: а) Возможные контуры интегрирования для положительных s . б) Деформация контуров и разрезов при переходе к отрицательным s по верхней полуокружности. в)-д)) Деформация контуров и разрезов при переходе к отрицательным s по верхней (нижней) полуокружности.

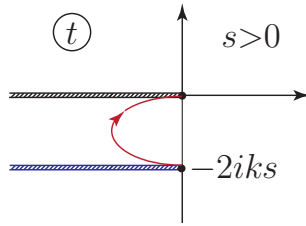


Рис. 2.8: Деформация контура рис. 2.7(b) для нахождения асимптотики решения.

Видно, что мы получили правильную асимптотику при $s \rightarrow +\infty$.

Асимптотика вдоль контура на рис. 2.7 находится с помощью деформации контура вдоль линий наискорейшего спада у краев контура (подынтегральная функция не имеет перевальных точек). Одинаковый по порядку величины вклад дают оба конца контура. Для оценки вкладов вводим параметризацию

$$t = -2kis + e^{i\pi} \rho, \text{ нижний край}$$

$$t = e^{-i\pi} \rho, \text{ верхний край}$$

Тогда получим:

$$\varphi(s) \approx (2ke^{i\pi/2})^{\mu-1} \frac{e^{-2iks}}{s^\mu} \int_0^{+\infty} d\rho e^{i\pi} e^{-\rho} \rho^{\mu-1} + \frac{(2ke^{i\pi/2})^{\mu-1}}{s^\mu} \int_{+\infty}^0 d\rho e^{-i\pi} e^{-\rho} \rho^{\mu-1},$$

$$\psi(s) = (2ke^{i\pi/2})^{\mu-1} \Gamma(\mu) (e^{iks} - e^{-iks}). \tag{2.45}$$

Таким образом, контур на рис. 2.7(b) не даёт правильной асимптотики. Итак, остановимся на контуре (a). Теперь надо построить его продолжение в область $\text{Re } s < 0$. В эту область можно попасть двумя путями: обходя особые точки потенциала $s = 0, s = x_0^\pm - x_1$ по большой полуокружности $s \gg 1/k$ сверху или снизу. При обходе характер решения должен измениться: его асимптотика должна теперь включать падающую и отраженную волну. Переход вдоль полуокружности влечет за собой изменение положения точки ветвления $t = -2iks$, и, как следствие, сильную деформацию нижнего разреза (рис. 2.7(c)-(d)). Видно, однако, что обход вдоль верхней полуокружности не приводит к деформации контура C , задающего решение (рис. 2.7(c)). То есть, асимптотика (2.44) не изменит своего вида. Единственная разница будет состоять в том, что s заменяется

на $|s|e^{i\pi}$. Обход же особой точки вдоль нижней полуокружности (рис. 2.7(d)) сопровождается деформацией верхнего разреза и самого контура интегрирования C . Ясно, что именно такой обход должен дать нам дополнительную отраженную волну в асимптотике. Сделаем расчёт. Участок, обходящий нижний разрез, даст, очевидно, вклад, аналогичный предыдущему (формула (2.44)). Учтем, что теперь $s = |s|e^{-i\pi}$

$$\varphi(s) = (2k)^{\mu-1}|s|^{-\mu}e^{5\pi i/2(\mu-1)}(2k)^{\mu-1}\Gamma(\mu) \quad (2.46)$$

Для части контура, обходящей верхний разрез вводим параметризацию: $t = -2iks + \rho e^{\pm i\pi}$ и получаем:

$$\varphi(s) = (|s|e^{-i\pi})^{1-2\mu}e^{-2iks}\Gamma(\mu)(2k|s|)^{\mu-1}\left(e^{-\pi i/2(\mu-1)} - e^{3\pi i/2(\mu-1)}\right) \quad (2.47)$$

Аккуратно собирая все выражения находим для волновой функции при $\text{Re } s < 0$:

$$\psi(s) = -(2ke^{3\pi i/2})^{\mu-1}\Gamma(\mu)\left(e^{iks} + 2i\sin(\pi\mu)e^{-iks}\right) \quad (2.48)$$

Сразу хочется отметить, что при целых $\mu = n$, то есть при глубине потенциала

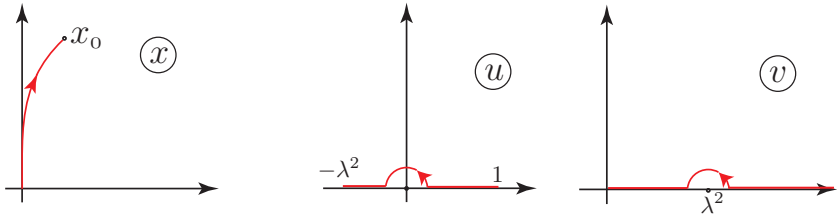
$$U_0^{(n)} = \frac{n(n-1)}{2ma^2} \quad (2.49)$$

отраженная волна исчезает при любой энергии налетающей частицы(!). Безотражательность, таким образом, является характерным свойством самого потенциала. Любопытно, что полученные квазиклассические безотражательные значения глубин являются, в действительности, точным результатом. Теперь нам необходимо сшить точный результат с квазиклассическим. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{x_0^+}^x p dx &= \int_0^s \sqrt{k^2 - \frac{\kappa^2 a^2}{s^2}} ds = k\sqrt{s^2 - \frac{\kappa^2 a^2}{k^2}} - 2\kappa a \arctan \sqrt{\frac{s - \frac{\kappa a}{k}}{s + \frac{\kappa a}{k}}} \\ &\rightarrow ks - \frac{\pi}{2}, \quad |s| \gg \frac{\kappa a}{k}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Соотношение, определяющее шивку:

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\int_{x_0^+}^x p dx} = \frac{C}{\sqrt{k}} e^{iks - \frac{\pi i}{2}} \quad (2.51)$$

Рис. 2.9: Контур и замены переменных для расчёта фазы φ_0 .

Сопоставляя квазиклассические экспоненты (2.51) с точными решениями (2.44)–(2.48) осуществляем сшивку:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\int_{x_0^+}^x p dx} \\ \psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{p}} \left(e^{\int_{x_0^+}^x p dx} - 2i \sin(\pi\mu) e^{-\int_{x_0^-}^x p dx} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Теперь возвращаемся на действительную ось.

$$\int_{x_0^+}^x p dx = \int_{x_0^+}^0 p dx + \int_0^x p dx = -\varphi_0 + \int_0^x p dx \quad (2.53)$$

Как обычно, лишь первое слагаемое имеет мнимую часть. Для расчёта, выберем контур, обходящий полюс справа (рис. 2.9)¹ и вводим замену переменных $u = \cosh^2(x/a)$ и $v = (u + \lambda^2)/(1 - u)$. Обозначив $\lambda^2 = U_0/E$ Имеем:

$$\varphi_0 = -i \frac{ak_0}{2} \int_1^{-\lambda^2} \sqrt{\frac{u + \lambda^2}{1 - u}} \frac{du}{u} = i \frac{ak_0}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{v} dv}{(1 + v)(v - \lambda^2)} = \frac{\pi i ak_0}{2} \frac{1}{1 + i\lambda}, \quad (2.54)$$

где $k_0 = \sqrt{2mE}$. И коэффициент надбарьерного отражения:

$$R = 4 \sin^2(\pi\mu) e^{-2\pi ak_0}, \quad \mu = (1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 a^2})/2 \quad (2.55)$$

Коэффициент (2.55) воспроизводит точный ответ в пределе $ka \gg 1$ (см. Ландау Лифшиц III).

¹Читателю предлагается самостоятельно подумать, почему нельзя обогнуть полюс слева.

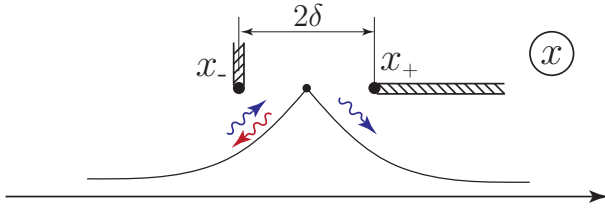


Рис. 2.10: Когерентное рассеяние на близлежащих точках поворота.

Задача 31.* Найти коэффициент отражения в потенциале:

$$U(x) = -U_0 \cosh^2 \frac{x}{a}, \quad (2.56)$$

при условии $E \ll U_0$, $U_0 \gg \frac{1}{ma^2}$.

Решение задачи 31 При $E \ll U_0$ импульс k имеет две, находящиеся рядом точки поворота:

$$k^2 = 2mU_0 \left(\frac{E}{U_0} + \cosh^2 \frac{x}{a} \right) = 0, \quad x_{\pm} = i \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}}.$$

и рассеяние происходит когерентным образом сразу на паре. Разложение k^2 удобно производить вблизи точки, находящейся в середине отрезка, соединяющего точки поворота $x_0 = \pi ia/2$.

$$p^2 = -\frac{\kappa^2}{a^2}(s^2 - \delta^2), \quad \delta^2 = a^2 \frac{E}{U_0}, \quad \kappa^2 = 2mU_0, \quad s = x - \frac{\pi ia}{2}. \quad (2.57)$$

Уравнение Шредингера примет осцилляторный вид:

$$\psi'' - \frac{\kappa^2}{a^2}(s^2 - \delta^2)\psi = 0, \quad (2.58)$$

Квазиклассические критические линии даются уравнением:

$$\text{Im} \int_{x_0}^x p dx = 0. \quad (2.59)$$

Для однозначности p необходимо провести разрезы в плоскости x . Пример схемы разрезов показан на рис. (2.10) Выберем регулярную ветвь импульса в соответствии с правилом:

$$p = i \frac{\kappa}{a} \sqrt{s^2 - \delta^2}, \quad \int^x p dx = i \frac{\kappa}{a} \frac{s^2}{2} + \text{const}, \quad s \gg \delta. \quad (2.60)$$

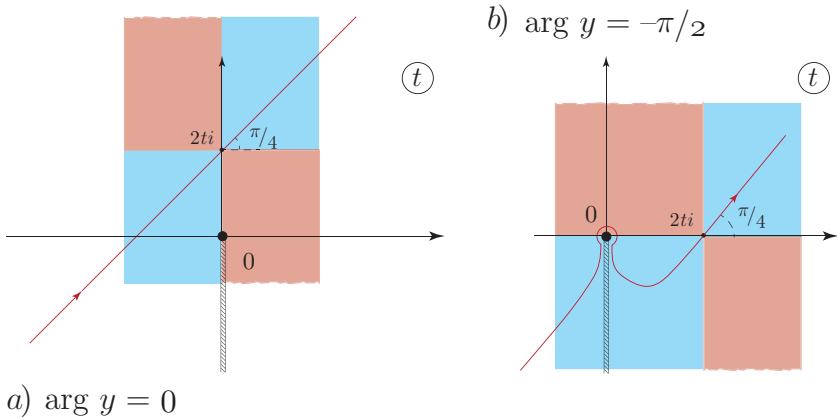


Рис. 2.11: Деформация контура, определяющая прошедшее и падающее решение.

И направления критических линий определяются углами $\varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Очевидно, для прошедшей волны необходимо выбрать направление $\varphi_1 = -\pi/4$ (оно соответствует ближайшей к оси x линии). При продолжении за область отражения, направление доворачивается на $-\pi/2$ и линия уходит под углом $\varphi_2 = -3\pi/4$. Для описания волны на критической линии вводим замену

$$s = e^{-i\pi/4} \sqrt{a/\kappa y}. \tag{2.61}$$

Тогда уравнение Шредингера:

$$\psi'' + \left(y^2 - i\frac{\kappa}{a}\delta^2\right)\psi = 0 \tag{2.62}$$

Стандартной заменой $\psi = e^{-iy^2/2}\varphi$ сводим его к уравнению с линейными коэффициентами

$$\varphi'' - 2iy\varphi' - i\gamma\varphi = 0, \quad \gamma = 1 + \frac{\kappa}{a}\delta^2. \tag{2.63}$$

Решаем уравнение методом Лапласа:

$$P = t^2 + i\gamma, \quad Q = -2it, \quad Z = t^{\gamma/2-1}e^{it^2/4}, \quad V = t^{\gamma/2}e^{yt+it^2/4},$$

$$\varphi(y) = \int_C e^{yt+it^2/4} t^{\gamma/2-1} dt. \tag{2.64}$$

Выбор разреза и контура диктуется правильными асимптотиками и во многом повторяет задачу о рассеянии в перевернутом параболическом потенциале (см. раздел §5). Соответствующая структура контура и рельефа приведена на рис. 2.11. Используя метод перевала и вычисляя интеграл вдоль разреза получаем следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \sqrt{4\pi} e^{iy^2/2} e^{i\pi/4(\gamma-1)} (2y)^{\gamma/2-1}, \quad \arg y = 0, \\ \psi(y) &= \sqrt{4\pi} e^{i\frac{y^2}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}(\gamma-1)} (2y)^{\frac{\gamma}{2}-1} - 2i \sin \frac{\pi\gamma}{4} \frac{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{y^{\frac{\gamma}{2}}} e^{-i\frac{y^2}{2}}, \quad \arg y = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}\quad (2.65)$$

Теперь получим квазиклассическое решение. Для прошедшей волны ($\arg y = 0$) имеем:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x p dx &= \int_0^s p ds = \sqrt{\frac{a}{\kappa}} e^{-i\pi/4} \int_0^y p dy = \frac{y^2}{2} - i \frac{\gamma-1}{2} \ln y, \\ \psi &= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{i \int_{x_0}^x p dx} = \left(\frac{a}{\kappa}\right)^{1/4} y^{\gamma/2-1} e^{iy^2/2 - i\pi/8}.\end{aligned}\quad (2.66)$$

Для прошедшей волны ($\arg y = -\pi/2$) показатели падающей и отраженной экспонент получаются тривиальным аналитическим продолжением падающей:

$$\psi(y) = \left(\frac{a}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{8}} \left[ay^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{i\frac{y^2}{2} + i\frac{\pi}{4}(\gamma-1)} + by^{-\frac{\gamma}{2}} e^{-i\frac{y^2}{2} - i\frac{\pi}{4}(\gamma-1)} \right]. \quad (2.67)$$

Сшивая теперь точное решение (2.65) с квазиклассическим (2.66)-(2.67), получаем для прошедшей волны:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{C}{\sqrt{p}} \left[e^{i \int_{x_0}^x p dx - i\frac{\pi}{4}(\gamma-1)} + \frac{2^{2-\frac{\gamma}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{4\pi}} \sin \frac{\pi\gamma}{2} e^{-i \int_{x_0}^x p dx} \right], \\ C &= 2^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{i\frac{\pi}{4}(\gamma-1)} \sqrt{4\pi} \left(\frac{\kappa}{a}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}\quad (2.68)$$

Далеко от точки поворота, критическая линия всегда идет параллельно оси x , так что угол наклона между ними исчезает. Теперь, как обычно, возвращаемся на действительную ось. При этом для вычисления коэффициента отражения достаточно ограничиться вычислением мнимой части соответствующего экспоненциального множителя:

$$\int_{x_0}^x p dx = \int_{x_0}^0 p dx + \int_0^x p dx = -\varphi_0 + \int_0^x p dx \quad (2.69)$$

В последнем выражении только первый член имеет ненулевую мнимую часть. Для коэффициента отражения получаем

$$R = 2^{4-\gamma} \sin^2 \frac{\pi\gamma}{2} \frac{\Gamma^2(\frac{\gamma}{2})}{4\pi} e^{-4\text{Im}\varphi_0} \quad (2.70)$$

Здесь, мы учли, что γ - вещественно. Рассчитываем φ_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \kappa \int_0^{\frac{\pi ia}{2}} \sqrt{\frac{E}{U_0} + \cosh^2 \frac{x}{a}} dx \equiv \kappa ia \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{E}{U_0} - \sin^2 t} dt, \\ &= i \frac{\kappa a}{\sqrt{\lambda}} \mathcal{E}(\lambda), \quad \lambda = \frac{1}{1 + \frac{E}{U_0}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

где функция $\mathcal{E}(x)$ - полный эллиптический интеграл II-го рода. Таким образом мы завершаем решение задачи. Коэффициент отражения есть

$$R = 2^{2-\gamma} \sin^2 \frac{\pi\gamma}{2} \frac{\Gamma^2(\frac{\gamma}{2})}{\pi} e^{-\frac{4\kappa a}{\sqrt{\lambda}} \mathcal{E}(\lambda)}, \quad \gamma = 1 + \kappa a \frac{E}{U_0} \quad (2.72)$$

Любопытно, что, как видно из формулы (2.72) при значениях энергии $E_n = \frac{U_0}{\kappa a} (2n + 1)$ потенциал является безотражательным.

Примечание. Лишь после построения решения автор обратил внимание на то, что уравнение Шредингера для данной задачи совпадает с модифицированным уравнением Матье. Не исключено, поэтому, что задачу вообще можно решить точно. Читателю предлагается самому разобраться с этим.

Когерентное рассеяние от нуля и простого полюса

Теперь рассмотрим рассеяние на потенциале имеющем полюс первого порядка. При больших энергиях налетающей частицы $E \gg U_0$ (U_0 - высота потенциала), полюс и нуль потенциала сближаются на расстояние, много меньшее его ширины $|x_1 - x_0| \ll a \sim x_0$. Получим коэффициент отражения в общем виде.

Как и в случае задачи о полюсе второго порядка, для описания рассеяния в окрестности полюса и точки поворота примем за основу лорановское разложение

$$U(x) = \frac{U_{-1}a}{x - x_1} + U_{\text{reg}}(x) \quad (2.73)$$

Уравнение Шредингера примет вид:

$$\psi'' + k^2 \frac{x - x_0}{x - x_1} \psi = 0. \quad (2.74)$$

где $k^2 = 2m(E - U_{\text{рег}}(x_0))$, x_0 - точка поворота. Определяем критические линии. Здесь перед нами стоит вопрос: где именно начать критическую линию: из точки x_0 или x_1 ? Дело в том, что обе точки являются точками ветвления импульса k . Для ответа на этот вопрос воспользуемся следующим простым рассуждением: выполним интегрирование в квазиклассической экспоненте вблизи точки ветвления. Для окрестностей соответствующих точек выбираем соответствующую параметризацию:

$$\begin{aligned} x = x_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad \int_{x_0}^x p dx &\approx \int_0^\rho \frac{\sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}}}{\sqrt{x_0 - x_1}} d\rho e^{i\varphi} = \frac{2}{3} \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x_0 - x_1}} e^{\frac{3i\varphi}{2}} \\ x = x_1 + \rho e^{i\varphi}, \quad \int_{x_1}^x p dx &\approx \int_0^\rho \frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{\sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}}} d\rho e^{i\varphi} = 2\sqrt{(x_1 - x_0)}\rho e^{\frac{i\varphi}{2}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Направления критических линий задаются соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{1}{2}\arg(x_0 - x_1)\right) = 0 &\Rightarrow \varphi = \frac{1}{3}\arg(x_0 - x_1) + \frac{2\pi n}{3} \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\arg(x_1 - x_0)\right) = 0 &\Rightarrow \varphi = -\arg(x_1 - x_0) + 2\pi n \end{aligned} \quad (2.76)$$

Видно, что из точки x_0 исходит 3 критических линии, в то время как из точки x_1 лишь одна. Последнее нас не устраивает, так приходя справа в точку ветвления с прошедшей волной нам необходимо уйти по другой критической линии налево. Точка x_1 такую возможность исключает. (см. рис. 2.12(с)). Итак:

$$\int_{x_0}^x p dx = k(x - x_0) + \text{const}, \quad x \gg |x_1 - x_0| \quad (2.77)$$

Таким образом, направления критических линий отличаются на $\Delta\varphi = \pi$.

Построим точное решение задачи вблизи точки остановки. Для удобства вводим замену $y = k(x - x_1)$, при этом $\arg y = 0$ для прошедшей волны. Тогда уравнение Шредингера:

$$\psi''y + y\psi - \mu\psi = 0, \quad \mu = k(x_0 - x_1) \quad (2.78)$$

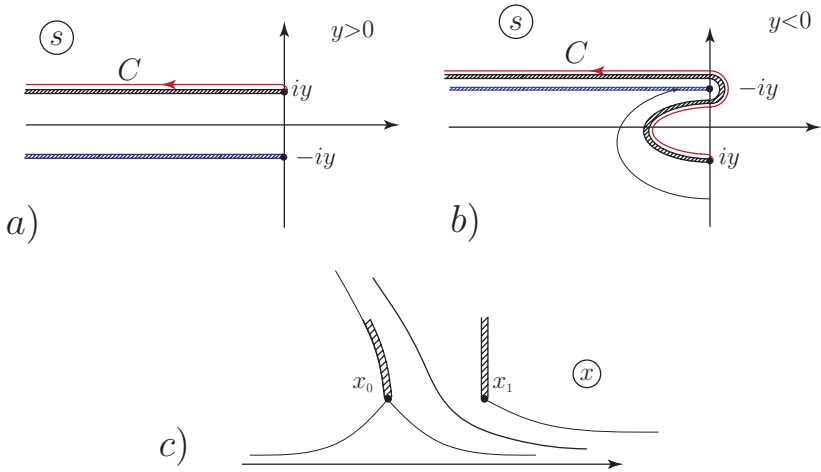


Рис. 2.12: а), б) Контуры, определяющие прошедшее и падающее решение. в) Карта критических линий.

Построение решения контурным интегралом дает:

$$P = -\mu, \quad Q = t^2 + 1, \quad Z = \frac{(t-i)^{\frac{\mu i}{2}-1}}{(t+i)^{\frac{\mu i}{2}+1}}, \quad V = e^{yt} \frac{(t-i)^{\frac{\mu i}{2}}}{(t+i)^{\frac{\mu i}{2}}},$$

$$\psi = \int_C e^{yt} \frac{(t-i)^{\frac{\mu i}{2}-1}}{(t+i)^{\frac{\mu i}{2}+1}} dt, \quad (2.79)$$

где контур C выбран так, чтобы функция V принимала одинаковые значения на концах. Для удобства работы с контурами с разрезами вводим, как обычно, замену переменных $yt = s$. Тогда решение:

$$\psi = y \int_C e^s \frac{(t-iy)^{\frac{\mu i}{2}-1}}{(t+iy)^{\frac{\mu i}{2}+1}} ds. \quad (2.80)$$

Карта контуров и деформаций указана на рис. 2.12. Переход на критическую линию, несущую падающую волну, необходимо совершается посредством поворота y на угол $-\pi$. Стандартным образом находим асимптотики решений:

$$\psi = -(2e^{-i\pi/2})^{-\frac{\mu i}{2}-1} y^{-\frac{\mu i}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu i}{2}\right) e^{iy}, \quad y \rightarrow +\infty, \quad (2.81)$$

$$\psi = -(2e^{-\frac{i\pi}{2}})^{-\frac{\mu i}{2}-1} y^{-\frac{\mu i}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu i}{2}\right) e^{iy} + \frac{2\pi}{\mu \Gamma\left(\frac{\mu i}{2}\right)} (2e^{\frac{3\pi i}{2}})^{\frac{\mu i}{2}-1} y^{\frac{\mu i}{2}} e^{-iy}, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Здесь я воспользовался равенством $\Gamma\left(\frac{\mu i}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu i}{2}\right) = \frac{2\pi}{\mu \sinh \frac{\pi\mu}{2}}$. Теперь необходимо осуществить сшивку с соответствующим квазиклассическим решением. Имеем в квазиклассическом пределе:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x p dx &= k \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{x-x_0}{x-x_1}} dx \\ &= k\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)} - k(x_0-x_1) \ln \frac{\sqrt{x-x_1} + \sqrt{x-x_0}}{\sqrt{x_0-x_1}}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Разлагаем последнее выражение в ряд в пределе $|x-x_0| \gg |x_0-x_1|$. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x p dx &= y - \frac{\mu}{2} - \mu \ln 2 - \frac{\mu}{2} \ln \frac{y}{\mu}, \\ \psi &= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{i \int_{x_0}^x p dx} = \frac{2^{-i\mu}}{\sqrt{k}} \left(\frac{y}{\mu}\right)^{-\frac{i\mu}{2}} e^{iy - i\frac{\mu}{2}}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Используя (2.81)-(2.83), находим решение слева от точки остановки в виде:

$$\begin{aligned} \psi &= C \left[\frac{1}{\sqrt{p}} e^{i \int_{x_0}^x p dx} + \frac{F(\mu)}{\sqrt{p}} e^{-i \int_{x_0}^x p dx} \right], \\ \text{где } F(\mu) &= -\frac{4\pi}{\mu \Gamma^2\left(\frac{\mu i}{2}\right)} \left(e^{\frac{\pi i}{2}} \frac{\mu}{2e} \right)^{\mu i}, \quad C = -\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\mu i}{2}\right) \left(\frac{2e}{\mu}\right)^{\frac{\mu i}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}(\frac{\mu i}{2}+1)}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Спускаясь на действительную ось стандартным образом, находим окончательно для коэффициента отражения:

$$R = |F(\mu)|^2 e^{-4\text{Im}\varphi_0}, \quad \varphi_0 = -\int_0^{x_0} p dx. \quad (2.85)$$

Задача 32. Частица массы m с энергией E налетает на потенциальный барьер:

$$U = -\frac{U_0 a x}{x^2 + a^2}. \quad (2.86)$$

Найти коэффициент точный отражения. Ответ.

$$R = 1 - e^{-\pi k a \frac{U_0}{E}}, \quad k = \sqrt{2mE} \quad (2.87)$$

Решение задачи 32 Вдали от потенциала ($x \gg a$) потенциальная энергия мала и движение квазиклассично. Имеем для импульса:

$$k = \sqrt{2m\left(E + \frac{U_0 a x}{x^2 + a^2}\right)} \approx k + \frac{kaU_0}{2Ex}, \quad k = \sqrt{2mE} \quad (2.88)$$

$$\int^x k dx = kx + \frac{kaU_0}{2E} \ln x. \quad (2.89)$$

Тогда можем записать асимптотические выражения для прошедшей и отраженной волны:

$$\psi = \frac{t}{\sqrt{k}} e^{ikx + i\frac{kaU_0}{2E} \ln x}, \quad (2.90)$$

$$\psi = \frac{a}{\sqrt{k}} e^{ikx + i\frac{kaU_0}{2E} \ln x} + \frac{r}{\sqrt{k}} e^{-ikx - i\frac{kaU_0}{2E} \ln x}. \quad (2.91)$$

Для сшивки асимптотик справа и слева, аналитически продолжаем решение справа переходя по окружности большого радиуса (так, чтобы квазиклассическое приближение осталось верным) в область слева. Окружность необходимо выбрать в нижней полуплоскости (почему?). Видно, что прошедшая волна перейдет в падающую. При этом

$$kx + \frac{kaU_0}{2E} \ln x \rightarrow kx + \frac{kaU_0}{2E} (\ln(-x) - i\pi). \quad (2.92)$$

Тогда получим:

$$a = te^{\pi ka \frac{U_0}{2E}}. \quad (2.93)$$

Соответственно, получаем для коэффициентов прохождения и отражения:

$$T = \left| \frac{t}{a} \right|^2 = e^{-\pi ka \frac{U_0}{E}}, \quad R = 1 - T. \quad (2.94)$$

§2 Кратко о вторичном квантовании

В этой главе я не буду останавливаться на выводе соответствующих формул вторичного квантования, ограничившись кратким напоминанием основных фактов. Целью этого раздела является введение нужных обозначений. Читатель, желающий освежить выводы всех формул может открыть соответствующий параграф тома III курса Ландау-Лифшица или Абрикосова-Горькова-Дзялошинского.

Бозе-жидкость

Итак, пусть нам дана система из N тождественных частиц. Система находится в стационарном состоянии. Пусть, для начала, они слабо взаимодействуют. Каждая частица тогда характеризуется полным набором волновых функций $\varphi_{p_1}(\xi), \varphi_2(\xi), \dots$. Если p_1, p_2, \dots, p_N - номера состояний. Тогда волновая функция должна быть симметричной по всем перестановкам частиц суммой произведений волновых функций:

$$\psi_{N_1, N_2, \dots} = \left(\frac{N_1! N_2! \dots}{N!} \right)^{1/2} \sum_P \psi_{p_1}(\xi_1) \psi_{p_2}(\xi_2) \dots \psi_{p_N}(\xi_N).$$

Сумма берется по всем перестановкам различных индексов p_1, p_2, \dots, p_N , а числа N_i указывают количество частиц в данном состоянии i . Теперь мы переходим к описанию системы в терминах чисел заполнения. Т.е. вектор состояния системы задаётся N_1, N_2, \dots, N_N числами частиц, находящимся в каждом из N состояний. Если система находится в стационарном состоянии, то и числа заполнения состояний не изменяется и подобное описание вполне легитимно. Далее, любой оператор, характеризующий наблюдаемую, относящуюся ко всей системе, должен действовать на все частицы системы и быть симметричным относительно их перестановок. Пусть, $f_a^{(1)}$ - оператор, относящийся к одной частице. Это может быть, к примеру, её гамильтониан:

$$f_a^{(1)} = -\frac{1}{2m} \Delta_a + U(\mathbf{r}_a). \quad (2.95)$$

где $U(\mathbf{r}_a)$ - потенциальная энергия частицы во внешнем поле. Тогда оператор

$$F^{(1)} = \sum_a f_a^{(1)} \quad (2.96)$$

будет уже характеризовать всю систему (в указанном примере $F^{(1)}$ - полный гамильтониан системы невзаимодействующих частиц) Матричный элемент оператора, как нетрудно видеть, отличен от нуля только для диагональных состояний:

$$\langle N_1, N_2, \dots | F^{(1)} | N_1, N_2, \dots \rangle = \sum_i f_{ii}^{(1)} N_i. \quad (2.97)$$

и для состояний, отличающихся тем, что одно число заполнения увеличивается на 1 ($N_i - 1 \rightarrow N_i$), а другое уменьшается ($N_k \rightarrow$

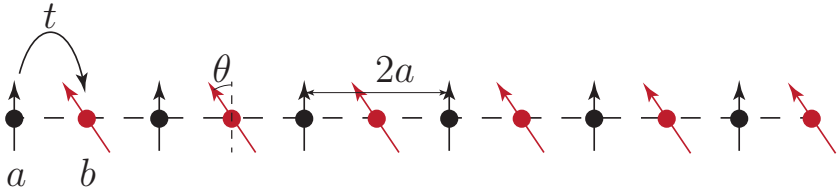


Рис. 2.13: Подкошенное состояние в манганите.

$N_k - 1)^1$.

$$\langle N_i, N_k - 1 | F^{(1)} | N_i - 1, N_k \rangle = \sqrt{N_i N_k} \quad (2.98)$$

Далее удобно ввести операторы уничтожения

$$a_i | N_1, N_2, \dots, N_i \dots \rangle = \sqrt{N_i} | N_1, N_2, \dots, N_i - 1 \dots \rangle, \quad (2.99)$$

$$\langle N_i - 1 | a_i | N_i \rangle = \sqrt{N_i} \quad (2.100)$$

и, эрмитово-сопряжённые с ними, операторы рождения:

$$a_i^\dagger | N_1, N_2, \dots, N_i \dots \rangle = \sqrt{N_i + 1} | N_1, N_2, \dots, N_i + 1 \dots \rangle, \quad (2.101)$$

$$\langle N_i - 1 | a_i | N_i \rangle = \sqrt{N_i} \quad (2.102)$$

Обратим внимание, что из определений операторов a_i и a_i^\dagger следует: $\langle a_i^\dagger a_i \rangle = N_i$ и $\langle N_i, N_k - 1 | a_i^\dagger a_i | N_i - 1, N_k \rangle = \sqrt{N_i N_k}$

Тогда, все матричные элементы оператора $F^{(1)}$ и \sum

Задача 33.

Подкошенное состояние в манганитах. Рассмотрим цепочку атомов, состоящую из двух ферромагнитно упорядоченных подрешеток. Направления магнитных моментов первой (a) и второй (b) отличаются на угол θ (рис. 2.13). Из-за легирования в системе есть избыток электронов. В отсутствие подкоса (чисто ферро-магнитное упорядочение) электрон может прыгать между

¹Это равенство совсем не сложно установить. Нормировки волновых функций слева и справа равны соответственно: $\sqrt{\frac{N_i!(N_k-1)!}{N!}}$ и $\sqrt{\frac{(N_i-1)!N_k!}{N!}}$. Отличных от нуля слагаемых будет столько, сколько одинаковых, недействующих операторов $f^{(1)}$ волновых функций слева и справа, то есть $\frac{N!}{(N_i-1)!(N_k-1)!}$. Откуда и следует матричный элемент (2.98).

ближайшими соседями. соответствующий матричный элемент перескока $-t$. Магнитное взаимодействие электрона с подрешеткой даётся обменным интегралом J , одинаковым для всех атомов. Считая магнитные моменты обеих подрешеток классическими, найти эффективный матричный элемент перескока и ширину электронной зоны проводимости в пределе $J \gg t$

Ферми-жидкость

ψ -операторы

§3 Базис когерентных состояний

В качестве введения в квантование полей, рассмотрим математику и физический смысл операторов рождения-уничтожения на примере гармонического осциллятора.

§4 Квантование простейших полей

§5 Семинар по квантованию кондактанса

Квантовый точечный контакт на гетерогранице.

Теперь мы обсудим один яркий эффект, относящийся к физике электронного транспорта в мезоскопических проводниках. Под мезоскопическим проводником чаще всего понимается или квантовый точечный контакт (КТК) или туннельный контакт. Туннельный контакт есть просто сэндвич: нормальный металл- диэлектрик - нормальный металл. Транспорт через такой контакт возможен только через посредство квантового туннелирования (см. рис. 2.14). КТК образуется сужением поперечного сечения проводника настолько, что эффективный диаметр сужения оказывается много меньше упругой длины электрона l_e (т.е. длины сводного пробега электрона между рассеянием на примесях). Движение электрона в таком контакте, как и проводящие свойства контакта определяются главным образом его геометрией. О таком движении электрона говорят как о баллистическом, при этом диаметр сужения нередко

становится сравним с фермиевской длиной электрона. Именно физика электрического транспорта в КТК на время станет центром нашего внимания. Ясно, что при расчёте транспортных свойств такого контакта приходится принимать во внимание волновую природу электрона. При этом для экспериментатора очень важно работать с контактом, изменять параметры которого (ширину и проч.) он может контролируемым образом. Но как создать такие контакты? Оказалось, что именно такой контакт можно создать на границе раздела специально подобранных диэлектрика и полупроводника (или двух полупроводников). Некоторые полупроводники так устроены, что при их соединении на плоской границе раздела возникает слой электронов, являющийся математически двумерным(!). По причинам, о которых будет рассказано в следующем параграфе, такой слой называется инверсионным. Его называют инверсионным. Возникший двумерный электронный газ являет собой образец двумерного проводника, который может обладать очень высокой подвижностью и подчас сильным кулоновским взаимодействием. В этом случае говорят о гетерогранице или гетеропереходе. Помещая на гетерогранице электроды и соответствующим образом подбирая их электростатические потенциалы (т.н. затворные напряжения) можно контролировать форму двумерного проводника, создавать сужения и расширения. Подвижность электронов в двумерном электронном газе (2DEG) порой настолько высока, что даже для сужений с диаметром, многократно превышающим фермиевскую длину электронов, упругая длина остаётся много больше ширины сужения. Прикладывая транспортное напряжение можно исследовать вольт-амперные характеристики таких проводников. Таким образом 2DEG на гетерогранице является идеальным примером квантового точечного контакта.

О гетеропереходах

Природа очень удачно создала некоторые материалы, подарив экспериментаторам и теоретикам годы живейшей радости исследований. Классическим примером являются система из двух полупроводников: GaAs и его сплава с алюминием $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. У них почти одинаковые кристаллические решётки. Таким образом дефектов на их стыке практически не возникает и рассеянием электронов на них можно пренебречь. GaAs легируют цинком создавая из него полупроводник p -типа. AlGaAs легируют кремнием, создавая из него полупроводник n -типа. Исходная зонная структура обоих полупроводников представлена на рис. 2.15(а). Слабо-связанные

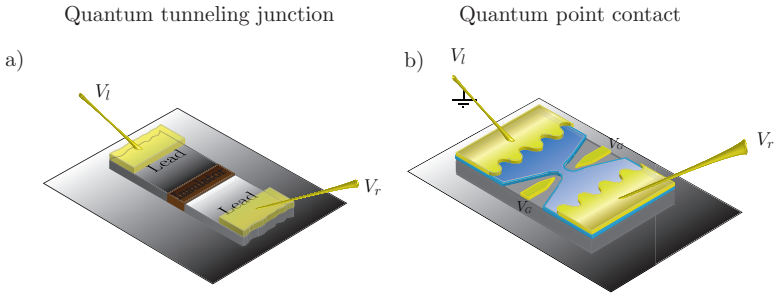


Рис. 2.14: Виды мезоскопических проводников.

электроны в AlGaAs, находящиеся на донорном уровне чуть ниже дна зоны проводимости находятся на более высоком энергетическом уровне, чем дырки на акцепторном уровне в GaAs (верхняя граница валентной зоны). При соединении донорные электроны AlGaAs мигрируют через границу в GaAs, а температурные флуктуации заставляют их заполнять низколежащие акцепторные уровни. Система приходит в термодинамическое равновесие, выравнивая уровни Ферми в обоих полупроводниках. Вблизи границы, слева, образуется нескомпенсированный положительный заряд, а справа - отрицательный. Таким образом на границе создается потенциал дипольного типа, который, накладываясь на потенциал зон, изгибает их (см. рис. 2.15(b)). В какой-то момент зона проводимости опускается ниже уровня Ферми и электроны мигрируют в образовавшуюся потенциальную яму. Наличие потенциальной ямы делает движение вдоль продольной оси финитным. С другой стороны, движение в перпендикулярной плоскости ни чем не ограничено (электроны находятся в зоне проводимости!) Так возникает двумерный слой электронного газа, называемым ещё инверсионным слоем.

Квантование кондактанса

В 1988 году группа голландских экспериментаторов обнаружила яркий эффект [51]. Эксперимент состоял в измерении кондактанса, то есть отклика тока на инфинитезимальное напряжение:

$$G = \frac{dI}{dV}, \quad V \rightarrow 0. \quad (2.103)$$

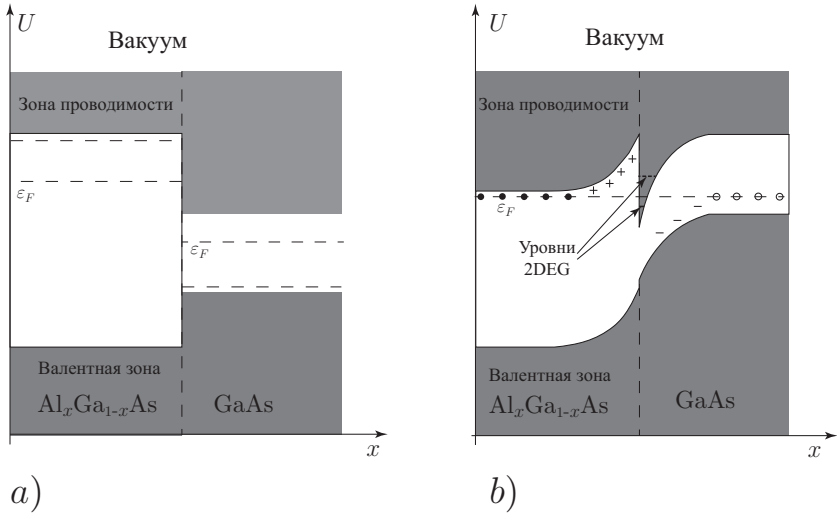


Рис. 2.15: Изгиб зон в гетеропереходе AlGaAs - GaAs.

приложенное к квантовому точечному контакту. КТК был реализован в двумерном электронном газе на гетерогранице AlGaAs-GaAs. Затворные напряжения создавали ограничивающий потенциал для 2DEG (см. рис. 2.16(b)). Изменяя затворные напряжения, удастся контролировать эффективную ширину КТК. Данные были следующие: ширина контакта W менялась в интервале от 0 до 360 нм. Упругая длина была $l_e = 8,5 \mu\text{м}$, температура $T = 0.6 \text{ К}$, фермиевская длина $\lambda_f = 42 \text{ нм}$. Из приведенных данных можно оценить среднее расстояние между уровнями в КТК как: $\delta \sim 2\pi\hbar^2/m^*W^2 \sim 1,27 \text{ К}$. Здесь $m^* \approx 0,07m_e$ - эффективная масса электрона в галлиевом гетеропереходе.

Приведённые данные свидетельствует о том, что была создана близкая к идеальной реализация КТК. Транспорт можно считать баллистическим, а температуру - нулевой, т.к. она меньше даже среднего расстояния между уровнями δ (последнее обстоятельство немаловажно и существенно упрощает теоретический анализ). Ю.В. Шарвин в своей работе за 1965 год [52] вывел первую полуклассическую формулу для кондактанса КТК. Её нетрудно получить и из качественных соображений. Сразу ограничимся двумерным случаем. Ток через сечение КТК, на которое подано транспортное напряжение V можно записать как разность двух

потоков:

$$I \sim eW [\{nv_f\}_{\varepsilon=\varepsilon_f+eV} - \{nv_f\}_{\varepsilon=\varepsilon_f}] = eW \left. \frac{d(nv_f)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_f} eV \quad (2.104)$$

Здесь W - ширина контакта, а n - двумерная плотность электронов: $n = p_f^2 / (2\pi\hbar^2)$. Выполняя дифференцирование в (2.104) получаем кондактанс Шарвина

$$G \sim \frac{e^2}{\hbar} k_f W. \quad (2.105)$$

Вывод этой формулы совсем не учитывает квантовость движения электрона, что может быть оправдано лишь для контактов, геометрические размеры которых сильно превышают фермиевскую длину электрона. Тем более были удивлены экспериментаторы, когда обнаружили ступенчатую зависимость кондактанса от ширины контакта в очень широком диапазоне её изменения (от 0 до $360 \text{ nm} \gg \lambda_f$). Ширину КТК удавалось точно контролировать затворным напряжением, увеличивая которое, можно было плавно расширять контакт (см. рис. 2.16(a)). Оказалось, что высота ступеней всюду одинакова и равна $e^2/\pi\hbar$. Иными словами, кондактанс КТК оказывается квантованным и величина $G_0 = e^2/\pi\hbar$ получила название кванта кондактанса.

Корректное квантово-механическое решение задачи о прохождении через мезоскопический контакт было вскоре построено. Результатом его стала

Формула Ландауэра-Бюттикера

При изложении я буду опираться на обзор [53]. Итак, есть мезоскопическая система, состоящая из двух электронных резервуаров (правого и левого) и контакта между ними (контакт может представлять собой туннельное соединение или КТК). Идея состоит в том, что при низких температурах (много меньших чем среднее расстояние между энергетическими уровнями в контакте $E_{n+1} - E_n \sim \delta_c \ll T$) прохождение электронов через контакт можно описывать обычной квантовой механикой. Такой подход, верный, вообще говоря, только при нулевой температуре, оправдан тем, что температурные флуктуации слишком слабы, чтобы перебросить электрон с одного уровня на другой внутри контакта. Резервуары же - откуда в систему поступают электроны, и куда после уходят - напротив, считаются большими. В них размерное квантование уровней

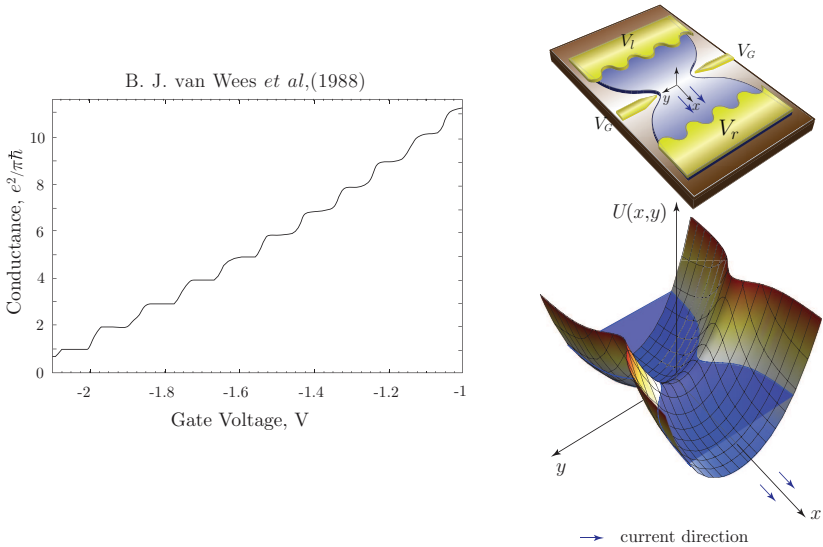


Рис. 2.16: Кондуктанс КТК на двумерном электронном газе как функция затворного напряжения (ширины КТК). Хорошо видны плато при целых значениях $G/(e^2/\pi\hbar)$.

практически отсутствует, так что всегда $\delta_l, \delta_r \ll T$. Таким образом, электрон, попадая в резервуар, мгновенно термализуется. Такая схема рассуждений часто оправдана реальными условиями эксперимента и оказывается очень продуктивной; она сводит многочастичную задачу о поиске кондуктанса к квантово-механической одночастичной задаче о прохождении частицы через потенциальный барьер.

Для удобства описания, направление движения будем разделять на транспортное (вдоль линии, соединяющей резервуары) и поперечное. В транспортном направлении движение инфинитно, а в поперечном - финитно, и, как следствие, квантовано. Вводим 2 квантовых числа: k - волновой вектор в транспортном направлении и n - номер квантового уровня поперечного движения. Строго говоря, такое разделение возможно только вдали от контакта или когда он достаточно плавный, так что движение можно разделить на быстрое поперечное и медленное - транспортное. В силу того, что полная энергия электронов фиксирована: $\varepsilon = \varepsilon_n + k^2/2m$, полное число дискретных уровней для каждой энергии ограничено. О них говорят как о транспортных каналах. Количество транспортных каналов обозначим N_l и N_r для

левого и правого резервуаров соответственно (явная зависимость этих чисел от энергии электрона опущена для краткости). Для описания многочастичной задачи используем формализм вторичного квантования. Вводим операторы рождения-уничтожения электронов, падающих на контакт из левого резервуара $a_{kn}^{(l)\dagger}, a_{kn}^{(l)}$ и накладываем на них фермиевские коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} \{a_{kn}^{(l)\dagger}, a_{k'n'}^{(l)}\} &= \delta_{kk'} \delta_{nn'} \\ \{a_{kn}^{(l)}, a_{k'n'}^{(l)}\} &= 0 \\ \{a_{kn}^{(l)\dagger}, a_{k'n'}^{(l)\dagger}\} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь волновой вектор k удобно считать квазинепрерывным. Подразумевается, что система помещена в ящик большой, но конечной длины L , а на волновые функции наложены периодические граничные условия, так что $k = 2\pi l/L$, где l -целое. Точно так же, вводим операторы рождения-уничтожения для электронов, уходящих в левый резервуар (это могут быть либо отраженные барьером электроны, либо прошедшие через барьер с другой стороны): $b_{kn}^{(l)\dagger}, b_{kn}^{(l)}$. Аналогичные пары операторов вводятся для правого резервуара: $a_{kn}^{(r)\dagger}, a_{kn}^{(r)}$ и $b_{kn}^{(r)\dagger}, b_{kn}^{(r)}$ с точно такими же коммутационными соотношениями. Операторы a и b связаны между собой линейными соотношениями, определяющимися физическими особенностями рассеяния. Эту связь описывают матрицей рассеяния, или s -матрицей:

$$\begin{pmatrix} b_{k1}^{(l)} \\ \vdots \\ b_{kN_l}^{(l)} \\ b_{k1}^{(r)} \\ \vdots \\ b_{kN_r}^{(r)} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_{k1}^{(l)} \\ \vdots \\ a_{kN_l}^{(l)} \\ a_{k1}^{(r)} \\ \vdots \\ a_{kN_r}^{(r)} \end{pmatrix}; \quad (2.106)$$

s -матрица имеет размеры $(N_l + N_r) \times (N_l + N_r)$. Таким образом, не только её матричные элементы, но и сам её размер зависит от полной энергии E электрона. Её структуру удобно представлять в виде блоков:

$$s = \begin{pmatrix} r & t \\ t' & r' \end{pmatrix}.$$

Здесь блок r (размер $N_l \times N_l$) описывает отражение электронов, приходящих из левого резервуара, а t (размер $N_l \times N_r$) прохождение

электронов, падающих справа в каналные состояния слева. s -матрица осуществляет преобразование от одних операторов, описывающих систему к другим, и уже в силу общих квантово-механических требований должна быть унитарной. Требование унитарности накладывает сильное ограничение на элементы матрицы, одно из которых:

$$(rr^\dagger)_{nn'} + (tt^\dagger)_{nn'} = 1_{nn'} \quad (2.107)$$

понадобится нам в дальнейшем. Здесь, $1_{nn'}$ - единичная матрица размером $N_l \times N_l$. Для построения оператора тока вводим полевые ψ -операторы

$$\psi^{(l)}(x, \mathbf{r}_\perp) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k>0, n} \chi(\mathbf{r}_\perp) (a_{kn}^{(l)} e^{ikx} + b_{kn}^{(l)} e^{-ikx}),$$

где \mathbf{r}_\perp координата частицы в поперечном направлении. Легко показать, что ψ -операторы удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям¹:

$$\{\psi(x, \mathbf{r}_\perp), \psi^\dagger(x', \mathbf{r}'_\perp)\} = \delta(x - x') \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp).$$

Оператор плотности тока слева от контакта определяется стандартным выражением:

$$j(x, \mathbf{r}_\perp) = \frac{ie}{2m} (\partial_x \psi^\dagger \psi - \psi^\dagger \partial_x \psi).$$

Здесь мы рассматриваем только x -компоненту, т.к. именно она соответствует транспорту электронов через контакт. Для того, чтобы получить наблюдаемую плотность тока, необходимо усреднить её оператор по термодинамически-равновесному состоянию электронов в резервуаре. Учтем следующее очевидное соотношение¹:

$$\begin{aligned} \langle a_{kn}^{(l)\dagger} a_{k'n'}^{(l)} \rangle &= \delta_{kk'} \delta_{nn'} \langle a_{kn}^{(l)\dagger} a_{kn}^{(l)} \rangle, \\ \langle a_{kn}^{(l)\dagger} a_{kn}^{(l)} \rangle &= f_f^{(l)}(\varepsilon_{kn}), \end{aligned} \quad (2.108)$$

¹ Для доказательства полезно воспользоваться известным представлением δ -функции $\sum_k e^{ikx} = L\delta(x)$, а также тождеством $\sum_n \chi_n(\mathbf{r}_\perp) \chi_n(\mathbf{r}'_\perp) = \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)$

¹ Здесь под усреднением физической величины подразумевается полное квантово-статистическое усреднение $\langle f \rangle = Z^{-1} \text{tr}(e^{-H/T} f)$, $Z = \text{tr} e^{-H/T}$, где H - гамильтониан свободных электронов в представлении вторичного квантования: $H = \sum_{k,n} (\varepsilon_{kn} - \mu) a_{kn}^{(l)\dagger} a_{kn}^{(l)}$.

где $f_f^{(l)}(\varepsilon_{kn})$ - фермиевская функция, а $\varepsilon_{kn} = k^2/2m + \varepsilon_n$ - энергия электрона с импульсом k в канале n . Аналогичное равенство можно записать для операторов $b^{(l)}$. Тогда легко получить следующее равенство

$$\langle j \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k>0,n} \frac{ke}{m} |\chi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2 (\langle a_{kn}^{(l)\dagger} a_{kn}^{(l)} \rangle - \langle b_{kn}^{(l)\dagger} b_{kn}^{(l)} \rangle),$$

имеющее наглядную физическую интерпретацию. Транспортный ток равен разности потоков приходящих и уходящих электронов. Для того, чтобы продвинуться дальше, используем равенство (2.106):

$$b^{(l)\dagger} = a^{(l)\dagger} r^\dagger + a^{(r)\dagger} t^\dagger,$$

(подразумевается матричное умножение). Тогда

$$\langle b_{kn}^{(l)\dagger} b_{k'n'}^{(l)} \rangle = \delta_{kk'} \delta_{nn'} [f_f^{(l)}(\varepsilon_{kn})(r^\dagger r)_{nn'} + f_f^{(r)}(\varepsilon_{kn})(t^\dagger t)_{nn'}] \quad (2.109)$$

В итоге получим среднюю плотность тока в следующем виде:

$$\langle j \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k>0,n} \frac{ke}{m} |\chi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2 [f_f^{(l)}(\varepsilon_{kn})(1 - r^\dagger r)_{nn} - f_f^{(r)}(\varepsilon_{kn})(t^\dagger t)_{nn}],$$

Наконец, учитывая (2.107) имеем:

$$\langle j \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k>0,n} \frac{k}{m} |\chi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2 (t^\dagger t)_{nn} (f_f^{(l)}(\varepsilon_{kn}) - f_f^{(r)}(\varepsilon_{kn})), \quad (2.110)$$

Для того, чтобы получить полный ток, необходимо проинтегрировать (2.110) по площади поперечного сечения:

$$I = \int \langle j \rangle d\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{L} \sum_{k>0,n} \frac{ke}{m} (t^\dagger t)_{nn} [f_f^{(l)}(\varepsilon_{kn}) - f_f^{(r)}(\varepsilon_{kn})] \quad (2.111)$$

Финальным шагом является замена суммирования интегрированием по энергии:

$$\frac{1}{L} \sum_{k>0,n} \frac{k}{m} = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2\pi} \sum_n.$$

где суммирование по n ведется в пределах $0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$. Итак, для тока выходит следующее выражение:

$$I = \frac{e}{2\pi} \int d\varepsilon [f_f^{(l)}(\varepsilon) - f_f^{(r)}(\varepsilon)] \sum_n (t^\dagger(\varepsilon)t(\varepsilon))_{nn} \quad (2.112)$$

Или, более коротко:

$$I = \frac{e}{2\pi} \int d\varepsilon \operatorname{tr} [t^\dagger(\varepsilon)t(\varepsilon)] [f_f^{(l)}(\varepsilon) - f_f^{(r)}(\varepsilon)] \quad (2.113)$$

При низких температурах $T \ll \varepsilon_f$, можно рассчитать след в формуле (2.113) при $\varepsilon = \varepsilon_f$. Интеграл от разности двух функций Ферми равен просто сдвигу их химических потенциалов. Если на контакт подано транспортное напряжение V , то $\int [[f_f^{(l)}(\varepsilon) - f_f^{(r)}(\varepsilon)]] d\varepsilon = eV$. Тогда получаем кондактанс

$$G = \frac{dI}{dV} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \operatorname{tr} [t^\dagger(\varepsilon_f)t(\varepsilon_f)]. \quad (2.114)$$

Это и есть формула Ландауэра. Для удобства в конечной формуле восстановлена постоянная Планка. След можно вычислить в базисе, в котором матрица $t^\dagger t$ диагональна. Тогда кондактанс примет вид:

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n T_n(\varepsilon_f). \quad (2.115)$$

Коэффициенты T_n следует интерпретировать как каналные прозрачности, а сама формула носит название многоканальной формулы Ландауэра. Суммирование по n должно вестись в пределах, для которых поперечная энергия заключена в интервале

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_n \leq e_f - \varepsilon_{\parallel}^{\min}, \quad (2.116)$$

где $\varepsilon_{\parallel}^{\min}$ - минимальное значение продольной энергии, при которой ещё возможен транспорт.

Квантово-механическое решение

Итак, мы предпримем попытку аналитически решить задачу о кондактансе КТК, следуя статье [54] Из физических соображений ясно, что кондактанс будет определяться самой узкой областью КТК. Движение электрона в транспортном направлении ограничено сдерживающим потенциалом. Выберем ось y в поперечном направлении. Тогда, вблизи минимума, y -зависимость потенциала имеет вид $U = m\omega_y^2 y^2/2$. В окрестности узкой области потенциал, очевидно, имеет максимум в продольном направлении. Выбирая ось x за транспортное направление, получаем зависимость потенциала в окрестности сужения:

$$U(x, y) = V_g - \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2}. \quad (2.117)$$

Здесь, затворное напряжение V_g , так же как параметры ω_x и ω_y фиксируются экспериментатором. Напряжение V_g , как нетрудно понять, определяет ширину КТК. В самом деле, чем оно выше, тем выше находится потенциальный барьер, тем меньше электронов могут через него пройти. Видно, что вблизи сужения потенциал имеет форму седла (см. рис. 2.16(a)). Это удобно, поскольку задача в таком поле должна иметь точное квантово-механическое решение. Подчеркнем, что седловой вид потенциала был установлен из самых общих соображений и ни в коей мере не ограничивает применимость полученных результатов. Теперь, для того, чтобы воспользоваться формулой Ландауэра в виде (2.114) или (2.115), необходимо найти коэффициенты отражения во всех каналах. Но уже из самого её вида легко объяснить результат эксперимента. Чем уже КТК (выше V_g) тем меньшее число электронных мод ε_n , участвующих в транспорте, может поместиться ниже уровня Ферми. Как только V_g вытесняет очередную моду (транспортный канал), кондактанс уменьшается скачком.

Теперь приступим к количественному анализу. Уравнение Шредингера для задачи:

$$\left[-\frac{1}{2m}\partial_x^2 - \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} + V_g\right]\Phi(x, y) + \left[-\frac{1}{2m}\partial_y^2 + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2}\right]\Phi(x, y) = \varepsilon\Phi(x, y) \quad (2.118)$$

допускает очевидное разделение переменных: $\Phi(x, y) = \chi(y)\Psi(x)$. Уравнение на поперечную функцию:

$$-\frac{1}{2m}\chi''(y) + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2}\chi(y) = \varepsilon_\perp\chi(y). \quad (2.119)$$

совпадает с уравнением гармонического осциллятора. Связанные уровни $\varepsilon_{\perp n} = \omega_y(n + 1/2)$ как раз и описывают финитное движение частицы, появляющееся при выводе формулы Ландауэра. Осталось решить задачу о рассеянии на перевернутом параболическом потенциале в транспортном направлении.

Движение в перевернутом параболическом потенциале

Соответствующее уравнение Шредингера:

$$-\frac{1}{2m}\Psi''(x) - \frac{m\omega_x^2 x^2}{2}\Psi(x) = \varepsilon_\parallel\Psi(x). \quad (2.120)$$

Здесь $\varepsilon_\parallel = \varepsilon - V_g - \varepsilon_{\perp n}$. Видно, что слагаемое с квадратичным потенциалом лидирует при $x \rightarrow \infty$. Как и в задаче об осцилляторе,

можно избавиться от квадратичного члена в уравнении, выписав соответствующую асимптотику при больших x .

$$-\frac{1}{2m}\Psi'' - \frac{m\omega_x^2 x^2}{2}\Psi = 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.121)$$

Откуда с экспоненциальной точностью получаем асимптотические решения:

$$\Psi(x) = e^{\pm i \frac{m\omega_x x^2}{2}}, \quad (\text{константы опущены}). \quad (2.122)$$

Поскольку решается задача на рассеяние, мы ожидаем, что, скажем, слева ($x \rightarrow -\infty$) решение будет представлять собой комбинацию падающей и отраженной волны, а справа ($x \rightarrow +\infty$) только прошедшей. В этом случае, оказывается удобным выбрать знак $-$ в (2.122) (Можно выбрать и знак $+$, но поиск асимптотик в этом случае чуть более запутан). Замена: $t = \sqrt{m\omega_x}x$ обезразмеривает уравнение Шредингера:

$$\Psi'' + t^2\Psi + 2\beta\Psi = 0, \quad \beta = \frac{\varepsilon||}{\omega_x}$$

А подстановка

$$\Psi(t) = e^{-it^2/2}\phi(t), \quad \Psi'' = [\phi'' - 2it\phi' - (i + t^2)\phi]e^{it^2/2}. \quad (2.123)$$

приводит его к уравнению с линейными коэффициентами:

$$\phi'' - 2it\phi' + (2\beta - i)\phi = 0, \quad (2.124)$$

Локальная цель достигнута, мы свели задачу о рассеянии к поддающемуся точному анализу уравнению. В соответствии с общим методом, находим функции P , Q и V :

$$\begin{aligned} P = s^2 + 2\beta - i, \quad Q = -2is, \quad V = e^{ts + i\frac{s^2}{4}} s^{\frac{1}{2} + i\beta} \\ Z = e^{ts + i\frac{s^2}{4}} s^{-\frac{1}{2} + i\beta} \end{aligned} \quad (2.125)$$

и строим решение:

$$\phi(t) = \int_C Z ds = \int_C e^{ts + i\frac{s^2}{4}} s^{-\frac{1}{2} + i\beta} ds. \quad (2.126)$$

При этом контур C в плоскости комплексного переменного должен быть выбран так, чтобы функция $V(s)$ принимала одинаковые

значения на его концах. Обратим внимание, что функция $s^{-\frac{1}{2}+i\beta}$, как обычно, многозначна. Следовательно, для выбора регулярной ветви необходимо провести удобный разрез в плоскости s . Присутствие разреза сильно ограничивает выбор контура интегрирования. Легко сообразить, что контур теперь должен уходить на бесконечность, при том так, чтобы $V(s)$ стремилась к нулю на концах. Последнее условие достигается, если потребовать выполнения условия $\operatorname{Re}[is^2] < 0$ для уходящих на бесконечность участков контура. Таким образом, концы контура должны принадлежать областям $\arg s \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$. Кроме того, мы должны потребовать, чтобы асимптотики решения описывали прошедшую волну при $t \rightarrow +\infty$ и комбинацию падающей и отраженной волн при $t \rightarrow -\infty$. Если мы вспомним наш опыт нахождения асимптотик, то станет ясно, что два слагаемых, появляющиеся в асимптотике при $t \rightarrow -\infty$, свидетельствуют о наличии двух особых точек в комплексной плоскости s . Одна точка очевидна. Это перевал функции $f(s) = ts + is^2/4$, стоящей в экспоненте (2.126): $s = 2it$. Кто же вторая? Ей может быть только точка ветвления $s = 0$. Методом проб и ошибок (у автора ушло 3 попытки) мы находим нужное расположение контура и разреза (см. рис. 2.17(a)). На рисунке средняя часть контура обозначена лишь пунктиром, показывая, что контур может произвольным образом деформироваться в комплексной плоскости, лишь его уходящие на бесконечность *хвосты* должны лежать в I и III квадрантах. Найдем теперь асимптотики решения при $t \rightarrow \pm\infty$.

$t > 0$

Единственной особенностью функции будет перевал в $s = 2it$. Направления наикратчайшего спуска: $\theta = \pi/4$ или $\theta = 5\pi/4$. Правильная деформация приведена на рис. 2.17(b). Вклад:

$$I(t)_{s=2ti} = \sqrt{4\pi} e^{-\pi\beta/2} \frac{e^{it^2}}{(2t)^{1/2-i\beta}}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

$t < 0$

В этом случае перевал $s = 2it$ лежит в нижней части комплексной полуоси. Направления наикратчайшего спуска опять-таки $\theta = \pi/4$ или $\theta = 5\pi/4$. Видно, что прохождение через перевал требует сильной деформации контура, который неизбежно обогнёт разрез. Достижим ли такой перевал? Можем ли мы, в самом деле, деформировать контур так, чтобы он, во-первых, прошёл через перевал в нужном

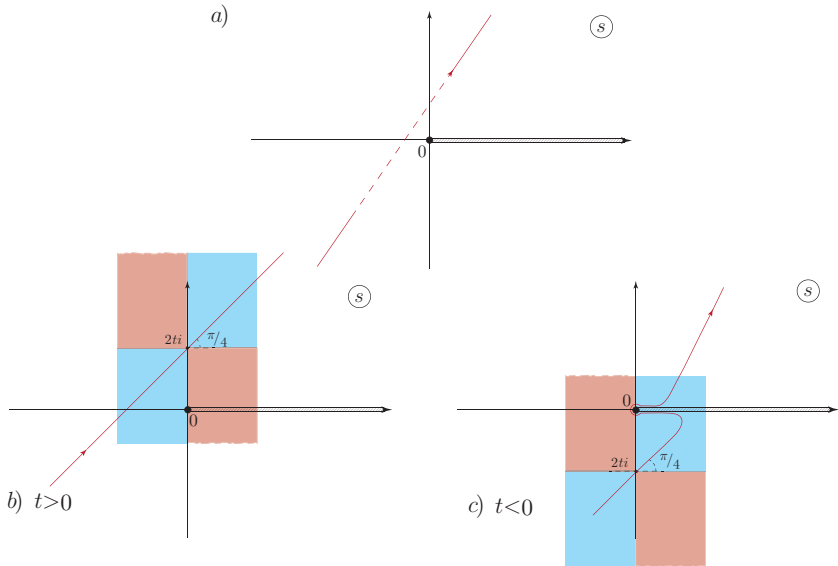


Рис. 2.17: а) Контур для задачи рассеяния. б) Деформация контура для асимптотики $t \rightarrow +\infty$. в) Деформация контура для асимптотики $t \rightarrow -\infty$.

направлении, во-вторых, не прошёл бы ни через единую точку, лежащую выше точки перевала? Чтобы выяснить это, нужно знать глобальный рельеф функции $\text{Re } f(s)$ (знать поведение $\text{Re } f(s)$ только вблизи перевала уже не достаточно). По счастью, функция $f(s)$ довольно проста - квадратична по переменной s . Поэтому её локальное поведение вблизи перевала совпадает с глобальным (В силу того, что все производные $f(s)$ выше второй обращаются тождественно в нуль). Схематично поведение указано на рис. 2.17(в). На этом же рисунке проведен и возможный контур. Видно, что он проходит через точку $s = 0$, лежащую на прямой постоянства $\text{Re } f(s) = \text{Re } f(2ti) = 0$. Понятно, что точка $s = 0$ и её *красная* окрестность нарушают условия применимости метода перевала. Поэтому значение интеграла (2.126) следует дополнить вкладом от окрестности $s = 0$. Так и возникают два слагаемых в асимптотике. Вклад от перевала вычисляется в соответствии с общей формулой и даёт:

$$I(t)_{s=2ti} = -i\sqrt{4\pi}e^{-3\pi\beta/2} \frac{e^{it^2}}{(-2t)^{1/2-i\beta}}.$$

Вклад от точки $s = 0$ вычисляется с помощью рассуждений, аналогичных применённым при выводе леммы Ватсона.

$$\begin{aligned} I(t)_{s=0} &= \int_{+\infty}^0 e^{ts} (e^{2\pi i s})^{-1/2+i\beta} ds + \int_0^{+\infty} e^{ts} s^{-1/2+i\beta} ds \\ &= \frac{(e^{2\pi\beta} + 1)}{(-t)^{1/2+i\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right). \end{aligned}$$

Таким образом, полная асимптотика решения:

$$\phi(t) = \frac{(e^{2\pi\beta} + 1)}{(-t)^{1/2+i\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right) - i\sqrt{4\pi} e^{-3\pi\beta/2} \frac{e^{it^2}}{(-2t)^{1/2-i\beta}} \quad (2.127)$$

Тогда решение уравнения Шредингера имеет следующие асимптотики:

$$\Psi(t) = \begin{cases} \sqrt{4\pi} e^{-\pi\beta/2} \frac{e^{it^2/2}}{(2t)^{1/2-i\beta}}, & t \rightarrow +\infty, \\ (e^{2\pi\beta} + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right) \frac{e^{-it^2/2}}{(-t)^{1/2+i\beta}} - i\sqrt{4\pi} e^{-3\pi\beta/2} \frac{e^{it^2/2}}{(-2t)^{1/2-i\beta}}, & t \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.128)$$

Коэффициент прохождения

Теперь у нас есть все необходимые ингредиенты для расчёта коэффициента прохождения в нашей задаче. Для его определения рассчитаем плотность потока для прошедшей и падающей волн. Она даётся известным квантово-механическим выражением:

$$j = \frac{i}{2m} (\partial_x \Psi^* \Psi - \Psi^* \partial_x \Psi) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_x}{m}} (\partial_t \Psi^* \Psi - \Psi^* \partial_t \Psi). \quad (2.129)$$

$t > 0$

Прошедшая волна описывается асимптотикой при $t \rightarrow +\infty$. Обращаясь к (2.128), получаем поток в следующей форме:

$$j_T = 2\pi \sqrt{\frac{\omega_x}{m}} e^{-\pi\beta}. \quad (2.130)$$

При получении (2.130) мы, само собой, отбросили члены, исчезающие при $t \rightarrow +\infty$.

$t < 0$

Здесь асимптотика волновой функции делится на 2 части, соответственно и поток состоит из падающей и отраженной моды. Рассчитаем сначала плотность потока j_{rm} , в правобегущей моде (пропорциональной $e^{it^2/2}$). Расчёт даёт неожиданный результат:

$$j_{rm} = -2\pi\sqrt{\frac{\omega_x}{m}}e^{-3\pi\beta}, \quad (2.131)$$

то есть поток направлен влево(!) Таким образом, правобегущая мода описывает в действительности отраженный поток частиц. $j_{rm} = j_R$ Рассчитаем поток, связанный с левобегущей модой:

$$j_{lm} = (e^{2\pi\beta} + 1)^2 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right) \right|^2 \sqrt{\frac{\omega_x}{m}}. \quad (2.132)$$

Как можно было предвидеть, левобегущая мода теперь соответствует падающей на потенциал частице $J_{lm} = J_L$. Упростим выражение для падающего тока. Используя зеркальное тождество для Γ -функции (1.8)

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right) \right|^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2} - \pi i\beta)} = \frac{\pi}{\sinh \pi\beta}, \quad (2.133)$$

мы приходим к плотности потока падающей частицы в форме

$$j_L = 2\pi e^{\pi\beta} (e^{2\pi\beta} + 1) \sqrt{\frac{\omega_x}{m}}. \quad (2.134)$$

Тогда искомый коэффициент прохождения

$$T = \frac{j_T}{j_I} = \frac{1}{1 + e^{-2\pi\beta}}. \quad (2.135)$$

Вспомним теперь, что $\beta = (\varepsilon - V_g - \omega_y(n + \frac{1}{2}))/\omega_x$. Тогда коэффициент прохождения в n -ом канале есть:

$$T_n(\varepsilon_f) = \frac{1}{1 + e^{-2\pi\beta_n}}, \quad \beta_n = \frac{\varepsilon_f - V_g - \omega_y(n + 1/2)}{\omega_x}. \quad (2.136)$$

Читатель конечно узнал в T_n фермиевскую ступеньку. Любопытно, что β может быть любым и вообще говоря не ограничен снизу (в перевернутом параболическом потенциале возможно прохождение при

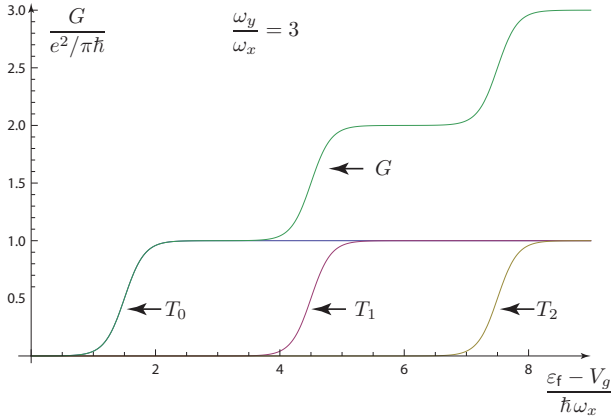


Рис. 2.18: Канальные прозрачности T_n и полный кондактанс (в единицах $e^2/\pi\hbar$) КТК как функция безразмерного затворного напряжения $(\varepsilon_f - V_g)/\hbar\omega_x$.

любой полной энергии). Из этого, в частности, следует, что верхний предел суммирования по n в формуле Ландауэра следует заменить бесконечностью. В самом деле, Тогда полный кондактанс будет равен:

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-2\pi\beta_n}}. \tag{2.137}$$

Здесь мы восстановили константу \hbar и умножили весь ответ на 2 ввиду двукратного спинового вырождения электрона. Полученная сумма не выражается через элементарные функции, но она очень быстро сходится для любого фиксированного V_g . Полезно привести график зависимости G от $-V_g$, т.к. в эксперименте роль затворного напряжения на графике на рис. 2.16(а) играет именно $-V_g$. Удобно также отчитывать потенциальную энергию от уровня ε_f .

§6 Линейный отклик и запаздывающая функция Грина

Здесь я напомним читателю содержание нескольких глав книги Ландау-Лифшица, посвящённую теории линейного отклика. Предположим

гамильтониан системы возмущен внешним воздействием

$$H = H_0 + V(t), \quad V(t) = -Bf(t). \quad (2.138)$$

Здесь B - оператор некоторой физической величины, характеризующей систему (это может быть, к примеру плотность, или плотность тока и пр.) Найдем теперь среднее значение другой наблюдаемой (обозначим её оператор A) как отклик на приложенное возмущение (2.138). Положим для ясности, что в отсутствие возмущения величина A имеет нулевое среднее значение.

$$\langle A \rangle = 0 \quad (2.139)$$

В присутствии возмущения, среднее значение A уже может быть отличным от нуля. Найдем первый член разложения $\langle A \rangle$ по степеням малого $f(t)$. Мы ожидаем, что он будет линеен по f , отсюда - название *линейный отклик*. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Скачкообразное включение возмущения вызовет процессы установления в системе, которые с течением времени затухнут из-за неизбежной диссипации. Нас интересует отклик не связанный с этими процессами установления. Поэтому удобно включать возмущение в момент $t = t_0 = -\infty$. Тогда, к интересующему нас конечному времени t все процессы установления успеют затухнуть. Более того, чтобы избежать неприятного скачкообразного включения, будем включать возмущение медленно. То есть, заменим первоначальное возмущение функцией:

$$V(t) = -e^{\lambda t} Bf(t), \quad \lambda \rightarrow +0. \quad (2.140)$$

Квантово-статистическое среднее от A даётся выражением:

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}(\rho A(t)); \quad (2.141)$$

Существует 2 метода расчёта следа (2.141). Первый состоит в том, что мы рассчитываем матричный элемент $A_{nm}(t)$ в независящем от времени базисе, скажем, в базисе собственных функций H_0 , взятых в начальный момент времени t_0 , (невозмущенные волновые функции). В этом случае для оператора A нужно взять его гейзенберговское представление в момент времени t , а усреднение производить с матрицей плотности взятой в момент t_0 (в этот момент матрица плотности - канонична).

$$\langle A(t) \rangle = \sum_{nm} \langle \psi_m(t_0) | \rho | \psi_n(t_0) \rangle \langle \psi_n(t_0) | A(t) | \psi_m(t_0) \rangle = \rho_{mn} A_{nm}(t). \quad (2.142)$$

Второй способ состоит в том, что мы рассчитываем след в базисе волновых функций в текущий момент t . Тогда матричные элементы оператора A следует взять в представлении Шредингера, а статистическое усреднение в формуле (2.141) проводится с матрицей плотности в гейзенберговском представлении.

$$\langle A(t) \rangle = \sum_{nm} \langle \psi_m(t) | \rho | \psi_n(t) \rangle \langle \psi_n(t) | A(t) | \psi_m(t) \rangle = \sum_{nm} \rho_{mn}(t) A_{nm}. \quad (2.143)$$

Оба способа эквивалентны и мы рассмотрим первый. Для того, чтобы найти гейзенберговскую форму оператора A нужно знать вид оператора эволюции. Он определяется равенством:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (2.144)$$

Для сокращения обозначений примем на время $t_0 = 0$. В конечных ответах зависимость от t_0 восстанавливается элементарно. Найдем оператор эволюции решая соответствующее нестационарное уравнение Шредингера. Невозмущенное уравнение Шредингера:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = H_0 |\psi(t)\rangle$$

имеет очевидное решение:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\psi(0)\rangle.$$

то есть, получили известное выражение для оператора эволюции невозмущенной системы: $U(t) = e^{-iH_0 t}$. Теперь будем искать решение полного уравнения

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle \quad \text{в виде } |\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\chi(t)\rangle.$$

тогда функция $\chi(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$i\partial_t \chi(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t} \chi(t)$$

с начальным условием $\chi(0) = \psi(0)$. Выражение

$$V_{int}(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t} \quad (2.145)$$

называется представлением взаимодействия оператора $V(t)$. Оно отличается от гейзенберговского тем, что вместо полного гамильтониана в экспонентах участвует лишь невозмущенный. Уравнение на функцию $\chi(t)$ примет простой вид:

$$i\partial_t \chi(t) = V_{int}(t) \chi(t). \quad (2.146)$$

Решаем его следующим образом. Рассмотрим произвольный момент t и запишем изменение функции χ за бесконечно-малый интервал времени dt .

$$\begin{aligned} d\chi(t) &= -iV_{\text{int}}(t)\chi(t)dt, \Rightarrow \\ \chi(t+dt) &= (1 - iV_{\text{int}}(t)dt)\chi(t) = e^{-iV_{\text{int}}dt}\chi(t) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Разобьем участок времени $[0, t]$ на большое (в пределе бесконечное) число интервалов N . Тогда полное решение к моменту времени t будет даваться произведением N множителей:

$$\chi(t) = e^{-iV_{\text{int}}dt_N} \dots e^{-iV_{\text{int}}dt_1} e^{-iV_{\text{int}}dt_0} \chi(0) \quad (2.148)$$

К сожалению мы не можем заменить произведение N экспоненциальных множителей на экспоненту от суммы показателей. Это было бы допустимо, если бы в показателях стояли обычные числа. В действительности же стоят некоммутирующие операторы (операторы V_{int} взятые в различные моменты времени в общем случае не коммутируют). Замена же произведения экспонентой была бы равносильна замене $e^A e^B = e^{A+B}$, что, как мы видели в главе о когерентных состояниях, неверно для некоммутирующих операторов. Для краткой записи произведения используется специальный удобный символ T -упорядочения:

$$e^{-iV_{\text{int}}(t_N)dt_N} \dots e^{-iV_{\text{int}}(t_1)dt_1} e^{-iV_{\text{int}}(t_0)dt_0} \equiv T e^{\int_0^t V(t')dt'} \quad (2.149)$$

где левую часть соотношения следует воспринимать как расшифровку правой. Т.е. последняя понимается как бесконечное произведение экспонент, расположенных слева направо в порядке убывания моментов времени, в которые они берутся.

Из всего вышеприведённого мы получаем оператор эволюции в следующей форме:

$$U(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)} T e^{-i \int_{t_0}^t V_{\text{int}}(t') dt'} \quad (2.150)$$

А гейзенберговский оператор $A(t)$ вычисляется по формуле:

$$A(t) = U^{-1}(t, t_0) A(t_0) U(t, t_0). \quad (2.151)$$

Тогда точный отклик величины A на возмущение B будет даваться выражением:

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr} [\rho_0 U^{-1}(t, -\infty) A U(t, \infty)], \quad (2.152)$$

где $U(t, -\infty)$ вычисляется согласно (2.150). В силу малости возмущения, T -экспоненты в (2.152) можно разложить в ряд Тейлора до первого порядка по V_{int} . В разложении до первого порядка, как легко сообразить, T -упорядочение никак себя не проявляет, поэтому:

$$U(t, -\infty) = e^{-iH_0(t-t_0)} \left[1 - i \int_{-\infty}^t V_{\text{int}}(t) dt \right] \quad (2.153)$$

Тогда получим:

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}(\rho_0 A_{\text{int}}(t)) + i \int_{-\infty}^t \text{tr}(\rho_0 [V_{\text{int}}(t'), A_{\text{int}}(t)]) \quad (2.154)$$

Первое слагаемое в (2.154) сокращается, поскольку в отсутствие возмущения $\langle A(t) \rangle = 0$. Остаётся только второе. Перепишем (2.154) в виде:

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\rho_0 [A_{\text{int}}(t), V_{\text{int}}(t')] \theta(t-t') \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \langle [A_{\text{int}}(t), B_{\text{int}}(t')] \rangle \theta(t-t') f(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Последнее соотношение в (2.155) носит название *формулы Кубо*. Её часто записывают вводя запаздывающую корреляционную функцию

$$\chi_{AB}(t) = i \langle [A_{\text{int}}(t), B_{\text{int}}(0)] \rangle \theta(t) \quad (2.156)$$

называемую так же линейным откликом (восприимчивостью) величины A на величину B . Тогда формула Кубо примет вид

$$\langle A(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') f(t') dt'. \quad \text{формула Кубо.} \quad (2.157)$$

§7 Функциональный интеграл в квантовой механике

Начнем рассмотрение с расчёта функции распространения.

$$\langle e^{iHt} \rangle \quad (2.158)$$

§8 Основы бозонизации

Одномерный гамильтониан:

$$H = H_0 + H_{sc} + H_{int}.$$

Здесь H_0 - гамильтониан свободных электронов, H_{sc} гамильтониан, отвечающий рассеиванию на внешнем потенциале (например, дефекте или примеси), H_{int} - гамильтониан, описывающих взаимодействие электронов друг с другом (например, кулоновское). Более подробно:

$$H_0 = \frac{1}{L} \sum_p (\varepsilon_p - \mu) a_p^\dagger a_p, \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.159)$$

Напишем его сразу в терминах полевых ψ -операторов: $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_p a_p e^{ipx}$.

$$H_0 = \int dx \psi^\dagger(x) \left(-\frac{1}{2m} \partial_x^2 - \mu \right) \psi(x) \quad (2.160)$$

Тогда

$$H_{sc} = \int dx V(x) \psi^\dagger(x) \psi(x). \quad (2.161)$$

Будем считать потенциал $V(x)$ очень резким, и быстро спадающим, по мере удаления от рассеивающего центра, так что радиус его действия $r \ll 1/p_0$.

Потенциал парного взаимодействия $V(x - x')$:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int dx dx' \psi^\dagger(x) \psi(x) V(x - x') \psi^\dagger(x') \psi(x') \quad (2.162)$$

Основное состояние системы будет соответствовать заполнению состояний с импульсами $p \in [-p_0, p_0]$, где p_0 -импульс Ферми. Нас будет интересовать физика слабо возбужденной системы, когда квазичастицы системы будут появляться с импульсом вблизи границ (Ферми-точек): $p \approx \pm p_0$. Поэтому сделаем следующее приближение: мы линеаризуем спектр вблизи Ферми-точек.

$$\varepsilon_p = \mu + v_f(p - p_0), \quad \text{или} \quad \varepsilon_p = \mu - v_f(p + p_0), \quad (2.163)$$

разумея при этом, что вклад во всю физику, включая теорию возмущений будет приходиться от импульсных окрестностей Ферми-точек $\delta p \ll p_0$. Возбуждения, для которых приближение (2.163)

несправедливо, очевидно, лежат на расстоянии порядка ε_f от уровня Ферми. При температурах $T \ll \varepsilon_f$ мы ожидаем, что вклад от таких возбуждений будет сильно подавлен в любом диаграммном разложении.

Итак, разложим исходные поля на левые и правые:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{e^{ip_0x}}{\sqrt{L}} \sum_{k=-p_0}^{\infty} a_{p_0+k} e^{ikx} + \frac{e^{-ip_0x}}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{p_0} a_{-p_0+k} e^{ikx} \rightarrow \\ \psi(x) &= e^{ip_0x} \psi_R(x) + e^{-ip_0x} \psi_L(x) \end{aligned} \quad (2.164)$$

Теперь применим нашу идею о линеаризации. А именно, представим действие гамильтониана в координатном представлении $H_{0,x} = -\frac{1}{2m} \partial_x^2$ на ψ -оператор следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{0,x} \psi(x) &= H_0 e^{ip_0x} \psi_R(x) + H_0 e^{-ip_0x} \psi_L(x) \\ &\approx -e^{ip_0x} i \partial_x \psi_R(x) + e^{-ip_0x} i \partial_x \psi_L(x). \end{aligned} \quad (2.165)$$

Поскольку система находится в слабо возбуждённом состоянии, следующий шаг состоит в том, чтобы разделить левые и правые $\psi_{L(R)}$ -операторы на медленные и быстрые по x компоненты и выбросить последние. Разделяющим масштабом при этом будет просто импульс Ферми p_0 . Таким образом мы оставим в ψ -операторах только медленные компоненты. Формально, это будет означать, что соответствующее разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$\psi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in [-p_0, p_0]} e^{ikx} a_{p_0+k}, \quad \psi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in [-p_0, p_0]} e^{ikx} a_{-p_0+k}. \quad (2.166)$$

Насколько правомерно такая процедура? На самом деле, в главе, посвящённой перенормировке мы покажем, что отброшенные слагаемые приведут лишь к перенормировке хим.потенциала. Тогда, гамильтониан H_0 в представлении вторичного квантования примет вид

$$H_0 = -i \int \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R dx + i \int \psi_L^\dagger \partial_x \psi_L dx. \quad (2.167)$$

2 слагаемых содержащие перекрёстные члены $\psi_L^\dagger \psi_R$ и $\psi_R^\dagger \psi_L$ обращаются в нуль (почему?) Перепишем теперь гамильтониан (2.167) в импульсном представлении:

$$H_0 = \frac{1}{L} \sum_{k \in [-p_0, p_0]} k a_{p_0+k}^\dagger a_{p_0+k} - \frac{1}{L} \sum_{k \in [-p_0, p_0]} k a_{-p_0+k}^\dagger a_{-p_0+k}. \quad (2.168)$$

Обратим внимание, что левые (a_{-p_0+k}) и правые (a_{p_0+k}) операторы рождения-уничтожения, так же как и соответствующие ψ -операторы в (2.167) ни как не связаны между собой, так как определены на разных интервалах импульсной оси.

Модель Томонаги

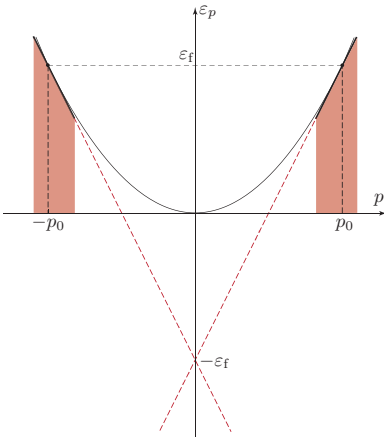


Рис. 2.19: Замена квадратичного, ограниченного снизу спектра двумя линейными неограниченными снизу.

Чтобы упростить вычисления Томонага предложил распространить суммирование по импульсам в определении левых и правых операторов (2.166) на всё импульсное пространство $k \in (-\infty, \infty)$. Это кажется вполне допустимым, если учесть что интересующие нас физические процессы все равно не зависят от поведения $\psi_{R(L)}(x)$ -операторов на больших импульсах (или, эквивалентно, малых расстояниях $|x| \gtrsim 1/p_0$). При этом, ψ -операторы и входящие в них операторы рождения-уничтожения необходимо по-прежнему считать независимыми. В гамильтониане (2.168), соответственно, суммирование также распространяется

на всю импульсную ось. Так мы приходим к модели Томонаги.

Линеаризация спектра и расширение области определения полей, помимо преимуществ влечёт за собой 2 проблемы. Первая состоит в том, что мы, вообще говоря, сильно изменили вакуумное состояние системы. При квадратичном спектре оно соответствовало состоянию, когда все частицы заполняют последовательно все уровни энергии от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = p_0^2/2m$ (см. рис. 2.19). Теперь мы разделили все фермионы на 2 рода частиц, соответствующие окрестностям левой и правой Ферми-точек. Будем называть соответствующие ветви спектра правой и левой. Тогда вакуумное состояние для правой (левой) ветви будет состоянием, в котором заполнены все уровни от $-\infty$ до $p_0^2/2m$ для обеих ветвей. Итак, по сравнению с первоначальной задачей, мы добавили бесконечное число состояний с отрицательной энергией к системе (рис. 2.19). Как сильно подобное изменение может сказаться на физике? Заметим, эти состояния отделены от

энергии Ферми барьером порядка ε_f . Нас же интересуют процессы вблизи энергии Ферми. Так что можно считать все состояния с отрицательными энергиями замороженными и не участвующими ни в каких диаграммах. В физике элементарных частиц такое состояние называют *морем Дирака*.

Вторая проблема состоит в том, что количество состояний для частиц обоих типов теперь бесконечно велико. То же самое относится и к энергии основного состояния, которая не ограничена снизу и равна $-\infty$. Эту проблему, однако, легко решить, вычитая соответствующие вакуумные средние. Уточним. Формально, определим оператор количества частиц как количество возбужденных состояний над вакуумом:

$$\begin{aligned}\rho_{R(L)}(x) &= \psi_{R(L)}^\dagger(x)\psi_{R(L)}(x) - \langle 0 | \psi_{R(L)}^\dagger(x)\psi_{R(L)}(x) | 0 \rangle \\ &\equiv: \psi_{R(L)}^\dagger(x)\psi_{R(L)}(x) : \end{aligned}$$

где $: A :$, как обычно, символ нормального упорядочения операторов. Тогда и из гамильтониана мы вычтем его же среднее по вакууму значение. В представлении вторичного квантования он выглядит теперь следующим образом

$$H_0 = -i \int : \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R : dx + i \int : \psi_L^\dagger \partial_x \psi_L : dx. \quad (2.169)$$

Теперь рассмотрим гамильтонианы взаимодействия.

$$\begin{aligned}H_{sc} &= \frac{1}{L} \sum_k V_k e^{ikx} [\psi_L^\dagger(x)\psi_L(x) + \psi_R^\dagger(x)\psi_R(x)] \\ &+ \frac{1}{L} \sum_k V_k e^{ikx} [e^{2ip_0x} \psi_L^\dagger(x)\psi_R(x) + e^{-2ip_0x} \psi_R^\dagger(x)\psi_L(x)] = H_{fw} + H_{bw} \end{aligned} \quad (2.170)$$

Вспомним, что мы договорились считать потенциал очень узким. Это означает, что V_k слабо зависит от k . В силу того, что поля в верхней сумме (2.170) - медленные, вклад в сумму вносят только малые значения k . Таким образом V_k можно заменить на V_0 и вынести за знак суммы. Тогда суммирование по k выполняется элементарно и даёт δ -функцию. Заметим ещё, что оператор H_{fw} пропорционален плотности частиц и при усреднении даст бесконечное число состояний. Чтобы сразу избавиться от нефизических бесконечностей, запишем его в нормально-упорядоченном виде.

$$H_{fw} = V_0 [: \psi_L^\dagger(0)\psi_L(0) : + : \psi_R^\dagger(0)\psi_R(0) :] \quad (2.171)$$

Физический смысл гамильтониана H_{fw} ясен. Он отвечает рассеянию частиц вперед ($\psi_L(0)$ -уничтожение лево-движущейся частицы, $\psi_L^\dagger(0)$ - рождение) Аналогично рассматривается нижнее слагаемое (2.170). Обратим внимание на то, что в нем спарены операторы, разных типов, поэтому они обладают нулевым выкуумным средним, то есть уже нормально упорядочены. Выполнив замены $q = \pm 2p_0 + k$ и учитывая действительность потенциала ($V_{-k} = V_k^*$) мы приводим его к виду:

$$H_{bw} = V_{2p_0} \psi_R^\dagger(0) \psi_L(0) + \text{h.c.} \quad (2.172)$$

Гамильтониан (2.172) отвечает, очевидно, рассеянию назад. Наконец, рассмотрим гамильтониан, описывающий парное взаимодействие частиц (2.162). Парный потенциал $V(x - x')$, наоборот, будем считать медленно спадающим (имея ввиду будущий анализ кулоновского взаимодействия). Это означает, что Фурье-образ потенциала быстро убывает при импульсах $p \ll p_0$. Поэтому в выражении (2.162) мы можем пренебречь парными слагаемыми вида $\psi_L^\dagger \psi_R$, $\psi_R^\dagger \psi_L$ ¹

$$\begin{aligned} H_{int} &= \frac{1}{2} \int dx dx' \rho(x) V(x - x') \rho(x'), \\ &\approx \frac{1}{2} \int dx dx' [\rho_L(x) + \rho_R(x)] V(x - x') [\rho_L(x') + \rho_R(x')] = H_{int1} + H_{int2}, \\ H_{int1} &= \frac{1}{2} \int dx dx' V(x - x') [\rho_L(x) \rho_L(x') + \rho_R(x) \rho_R(x')], \\ H_{int2} &= \int dx dx' V(x - x') \rho_L(x) \rho_R(x'). \end{aligned} \quad (2.173)$$

(При написании последнего равенства использовалось свойство $V(x - x') = V(x' - x)$).

Таким образом, мы приходим к стандартному гамильтониану Томонаги

$$H = H_0 + H_{fw} + H_{bw} + H_{int1} + H_{int2}. \quad (2.174)$$

От фермионов к бозонам. Операторы плотности.

Рассмотрим коммутационные соотношения между операторами плотности левых и правых фермионов. Для начала, перепишем

¹ Действительно, медленные множители $\psi^\dagger(x) \psi(x) V(x - x') \psi^\dagger(x') \psi(x')$ на фоне быстро-осциллирующих членов вида $e^{\pm 2p_0(x - x')}$ можно считать постоянными на интервале интегрирования $-\pi/p_0 < x, x' < \pi/p_0$. Интеграл же от экспоненты даст нуль.

соответствующий оператор в терминах операторов рождения-уничтожения левых и правых фермионов (здесь, для краткости, я буду опускать индексы L, R везде, где это не приводит к недоразумению)

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_{k,q} e^{i(q-p)x} a_p^\dagger a_q = \sum_{k,p} e^{ikx} a_p^\dagger a_{k+p},$$

Таким образом сумму

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_p a_p^\dagger a_{k+p}$$

следует отождествить с Фурье-образом плотности левых (правых) частиц. Рассмотрим теперь коммутатор $[\rho_{k,L(R)}, \rho_{k',L(R)}^\dagger]^1$.

$$[\rho_k, \rho_{k'}^\dagger] = \frac{1}{L} \sum_p \left(a_p^\dagger a_{p+k-k'} - a_{p+k'}^\dagger a_{p+k} \right) \quad (2.175)$$

Вид последнего выражения в формуле (2.176) подсказывает замену $p+k' \rightarrow p$. Тогда первое слагаемое в точности сокращает второе и мы приходим к выводу о равенстве нулю коммутатора плотностей:

$$[\rho_k, \rho_{k'}^\dagger] = 0 \quad (2.176)$$

Увы, как это часто бывает в квантовой теории поля, мы не учли некоторых тонкостей и совершили ошибку. Тонкость связана с тем, что модель Томонаги имеет неограниченное число состояний с отрицательной энергией¹. Это, как мы помним, означает, что все средние операторов плотности по вакууму, а следовательно и сами операторы, плохо определены. Где же эта тонкость сказывается? Из вида (2.176) мы замечаем, что если $k \neq k'$, то вакуумное среднее от коммутатора плотностей обращается в нуль в силу уже того, что каждое из двух слагаемых в правой части (2.176) имеет нулевое вакуумное среднее. Случай $k = k'$ - особый. В этом случае вакуумные средние от произведений операторов не обращаются в нуль и мы предвидим появление бесконечностей. Выход из данной трудности известен. Надо просто разбить сингулярный оператор на нормально

¹Более наглядным оказывается устанавливать коммутационные соотношения именно между Фурье-компонентами операторов плотности

¹Напомним, в случае, скажем, право-движущихся частиц, это означает, что вакуумное состояние образуется частицами с импульсами $p \in [-\infty, p_0]$.

упорядоченный и его вакуумное среднее: $\rho =: \rho : + \langle |\rho| 0 \rangle$. Итак, преобразуем выражение (2.176) к виду:

$$[\rho_k, \rho_k^\dagger] = \frac{1}{V} \sum_p \left(: a_p^\dagger a_p : - : a_{p+k}^\dagger a_{p+k} : \right) + \frac{1}{V} \sum_p \left(\langle 0 | a_p^\dagger a_p | 0 \rangle - \langle 0 | a_{p+k}^\dagger a_{p+k} | 0 \rangle \right) \quad (2.177)$$

В нормально-упорядоченных операторах, входящих в верхнюю разность (§8), допустима замена $p+k \rightarrow p$ во втором слагаемом, в силу его регулярности. Тогда эта разность обращается в нуль. Вторая разность может быть элементарно вычислена.

§9 Семинар по универсальному сопротивлению

Здесь я буду следовать работам А. Алтланда, К. Матвеева и У. Леюр.

§10 Семинар по фермиевской сингулярности

Здесь, я буду следовать замечательному обзору Аффлека]].

§11 Двугорбый потенциал. Инстантоны.

пшш

Глава 3

Решения

Задача 3 Рассмотрим гладкую деформацию контура, изображенную на рис. 3.1. Разобьем теперь контур на несколько элементарных $\gamma_{\infty 0}$, $\gamma_{-\pi 0}$, γ_{01} , γ_{\circ} , γ_{10} , $\gamma_{0\infty}$. Теперь рассчитаем интеграл

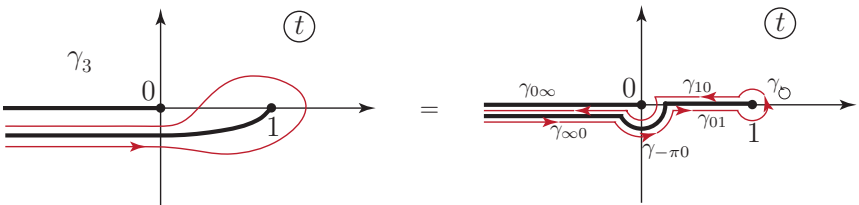


Рис. 3.1: Деформация контура γ_3

$$u(x) = \int e^{tx} \frac{(t-1)^{\beta-1}}{t^{\beta+1}} dt. \tag{3.1}$$

вдоль каждого контура, аккуратно выделив все регулярные ветви в согласии с разрезами. Радиусы всех элементов окружностей, входящих в контур полагаются стремящимися к 0. Результат таков

$$u(x) = -\left[e^{2\pi i\beta} - 1 \right] I_{\gamma_{0\infty}} - \left[e^{i\pi(\beta-1)} - e^{-i\pi(\beta-1)} \right] I_{\gamma_{-\pi 0}} - \left[e^{i\pi(\beta-1)} - e^{-i\pi(\beta-1)} \right] I_{\gamma_{01}} + I_{\gamma_{\circ}},$$

где,

$$I_{\gamma_{0\infty}} = \int_r^\infty \frac{(t+1)^{\beta-1}}{t^{\beta+1}} dt,$$

$$I_{\gamma_{01}} = \int_r^{1-\varepsilon} \frac{(1-t)^{\beta-1}}{t^{\beta+1}}$$

Решение задачи ?? Рассмотрим функцию $f(z) = z^3/(\sin^3 z)$, не имеющую полюса в точке $z = 0$. При $z \rightarrow \infty$ она растет как z^3 . Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ вблизи полюса $z_n = \pi n$:

$$g_n(z) = (-1)^n \left[\frac{(\pi n)^3}{(z - \pi n)^3} + \frac{3(\pi n)^2}{(z - \pi n)^2} + \left(3\pi n + \frac{(\pi n)^3}{2} \right) \frac{1}{z - \pi n} \right] \quad (3.2)$$

Ряд Тейлора функции $g_n(z)$ точности до z^3 равен

$$h_n(z) = -(-1)^n \left[1 + \frac{(\pi n)^2}{2} + \frac{\pi n z}{2} + \frac{z^2}{2} + z^3 \left(\frac{1}{(\pi n)^3} + \frac{1}{2\pi n} \right) \right] \quad (3.3)$$

После несложных преобразований получаем

$$g_n - h_n = \frac{(-1)^n z^3}{(z - \pi n)^3} \left[\left(\frac{1}{(\pi n)^3} + \frac{1}{2\pi n} \right) (z - \pi n)^3 + 1 + \frac{1}{2} (z - \pi n)^2 \right] \quad (3.4)$$

Наконец, находим $h(z)$

$$h(z) = 1 + \frac{z^2}{2} \quad (3.5)$$

Таким образом мы приходим к разложению

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{f(z)}{z^3} = \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{(z - \pi n)^3} + \frac{1}{(\pi n)^3} + \frac{z}{2\pi n(z - \pi n)} \right\} \quad (3.7)$$

Решение задачи 3 К

Решение задачи 17

Решение задачи 5 Изменения функций при деформации контура

$$\begin{aligned} U(s) &\rightarrow U(s) - \varepsilon V'(s)t(s) = U(s) + \delta U(s), \\ V(x) &\rightarrow V(s) + \varepsilon U'(s)t(s) = V(s) + \delta V(s), \\ s_0 &\rightarrow s_0 + \varepsilon \frac{V''(s_0)t(s_0) + V'(s_0)t'(s_0)}{U''(s_0)} = s_0 + \delta s_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

С учётом изменений (3.8) рассуждения, приводящие к формуле (1.94) в точности повторяются и приводят к такой же форме ответа. Для изменения асимптотики получаем:

$$\frac{\delta I_0(\lambda)}{I_0(\lambda)} = \lambda \left[\tilde{\delta}U + i\tilde{\delta}V + \frac{\tilde{\delta}V'V'}{U''} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\delta}U''(V')^2}{(U'')^2} \right] + \mathcal{O}(1).$$

Здесь символ $\tilde{\delta}$ учитывает как изменение функции, связанное с деформацией контура, так и изменение, обусловленное сдвигом точки экстремума на δs_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}U &= U(s_0 + \delta s_0) + \delta U(s_0) - U(s_0) = -\varepsilon V'(s)t(s), \\ \tilde{\delta}V &= V(s_0 + \delta s_0) + \delta V(s_0) - V(s_0) = \varepsilon V'(s_0)t(s). \end{aligned}$$

Для изменений U'' и V' легко получить:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}U'' &= \varepsilon A_{U''} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ A_{U''} &= \frac{U'''(s_0)}{U''(s_0)} [V''(s_0)t(s_0) + V'(s_0)t'(s_0)] \\ &\quad - t''(s_0)V'(s_0) - 2t'(s_0)V''(s_0) - t(s_0)V'''(s_0) \\ \tilde{\delta}V' &= \varepsilon A_{V'} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ A_{V'} &= \frac{V''(s_0)}{U''(s_0)} [V''(s_0)t(s_0) + V'(s_0)t'(s_0)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\delta I_0(\lambda)}{I_0(\lambda)} = \lambda \varepsilon V'(s_0) \left[-1 + i + \frac{A_{V'}}{U''(s_0)} - \frac{1}{2} \frac{V'(s_0)A_{U''}}{(U''(s_0))^2} \right] + \mathcal{O}(1)$$

Решение задачи 6 Пусть $f(z) = f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ - критическая точка функции $f(x, y)$, т.е. $f'(z)|_{z=z_0} = 0$. Рассмотрим рельеф её действительной части $U(x, y)$ вблизи критической точки. Для этого запишем ряд Тейлора с точностью до первого исчезающего порядка:

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy^2 \right). \quad (3.9)$$

Вспомним теперь, что род критической точки определяется знаком детерминанта:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 = - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 \leq 0$$

(Для получения последнего равенства были использованы условия Коши-Римана). Видим, что критическая точка аналитической функции - всегда перевал для её действительной части $U(x, y)$. Аналогичное равенство доказывается и для

Решение задачи 4

$$\begin{aligned} \tau^2 &= -\frac{f''}{2} \varepsilon^2 \left(1 + \frac{f'''}{3f''} \varepsilon + \frac{f^{(4)}}{12f''} \right) \Rightarrow \\ \tau &= \sqrt{-\frac{f''}{2}} \varepsilon \left(1 + \frac{f'''}{6f''} \varepsilon + \left[\frac{f^{(4)}}{12f''} - \frac{1}{72} \frac{f'''^2}{f''^2} \right] \varepsilon^2 \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение задачи 15

$$I(\lambda) = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\lambda \cos x) \cos(2x + a). \quad (3.11)$$

а) Рассчитать асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ и при $\lambda \rightarrow -\infty$ с точностью до членов порядка $1/\lambda^{3/2}$.

б) Найти приближенно корни уравнения $I(\lambda) = 0$ при $\lambda \gg 1$.

Ответ

$$I(\lambda) = 2 \cos a \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(\cos \left(\lambda - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{15}{8\lambda} \sin \left(\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (3.12)$$

Решение задачи 14 Рассмотрим вклад перевальных и концевых точек.

Точки перевала определяются нулями производной $f(z) = i(z - \cos z)$.

$$f'(z) = i(1 + \sin z) = 0 \Rightarrow z_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Ясно, что нам нужно рассмотреть только седловую точку $z_0 = -\pi/2$, совпадающую с началом контура интегрирования. Рассчитываем старшие производные:

$$f'' \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad f''' \left(-\frac{\pi}{2} \right) = i$$

Таким образом $z = -\pi/2$ - седло второго порядка. Тогда направление наискорейшего спуска дается уравнением $3\varphi + \arg f'''(z_0) = \pi + 2\pi k$. Имеем:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим теперь вклад концевой точки $z = 0$. $f'(0) = i$, тогда направление наискорейшего спада (см. (1.123)).

$$\varphi_2 = \pi/2$$

Теперь ясно как нужно деформировать контур и какое n выбрать в (3.13). Карта рельефа $\operatorname{Re} f(z)$ представлена на рис. ???. Из рисунка следует, что следует выбрать направление $\varphi_1 = \pi/6$. Рассчитаем вклад от перевала $z = -\frac{\pi}{2}$. Надлежащая параметризация $z = -\pi/2 + \rho e^{i\pi/6}$ приводит к результату

$$I(\lambda) \Big|_{z=-\pi/2} \simeq \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\pi/2 - \lambda\rho^3/6} \rho^2 e^{i\pi/3} d\rho e^{i\pi/6} = \frac{2i}{\lambda} e^{-i\lambda\pi/2} \quad (3.14)$$

Учтем теперь вклад от концевой точки $z = 0$. Параметризация $z = \rho e^{i\pi/2}$.

$$I(\lambda) \Big|_{z=0} \simeq \int_{\infty}^0 e^{-i\lambda - \lambda\rho} d\rho e^{i\pi/2} = -\frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda} \quad (3.15)$$

Складывая вклады (3.14) и (3.15) мы воспроизводим ответ (1.200).

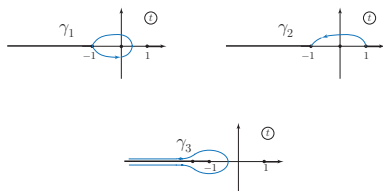


Рис. 3.3: Контур для линейно независимых решений

Решение задачи 33 Электронные операторы рождения-уничтожения: $a_{n,\alpha}$, $a_{n,\alpha}^\dagger$ and $b_{n,\alpha}$, $b_{n,\alpha}^\dagger$ (последние соответствуют подкошенной подрешетке). Гамильтониан системы:

$$H = -t \sum_{n,\sigma} a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} - t \sum_{n,\sigma} b_{n,\sigma}^\dagger b_{n,\sigma} - \quad (3.16)$$

$$J \sum_{n,\sigma} a_{n,\alpha}^\dagger \sigma_{\alpha,\alpha'}^z a_{n,\alpha'} - J \sum_{n,\sigma} b_{n,\alpha}^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{\alpha,\alpha'} b_{n,\alpha'} \quad (3.17)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{-i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Стандартным образом диагоналируем гамильтониан применяя фурье-преобразование:

$$a_{n,\alpha} = \int_{-\pi/2a}^{\pi/2a} a_{p,\alpha} e^{2pna i} \frac{dp}{2\pi}, \quad (3.18)$$

where a_p satisfy commutation relations: $\{a_{\alpha,p}, a_{\beta,q}^\dagger\} = 4\pi a \delta(p-q) \delta_{\alpha\beta}$. (3.19)

Здесь мы учли, что период подрешетки $2a$. Аналогичное фурье-разложение применяется к операторам b . Then

$$H \int \frac{dp}{2\pi} (a_{\uparrow,p}, a_{\downarrow,p}, b_{\uparrow,p}, b_{\downarrow,p}) \quad (3.20)$$

$$\times \begin{pmatrix} J & 0 & 1 + e^{2ipa} & 0 \\ 0 & -J & 0 & 1 + e^{-2ipa} \\ 1 + e^{2ipa} & 0 & J \cos \theta & J \sin \theta e^{-i\varphi} \\ 0 & 1 + e^{-2ipa} & J \sin \theta e^{-i\varphi} & J \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\uparrow,p} \\ a_{\downarrow,p} \\ b_{\uparrow,p} \\ b_{\downarrow,p} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Диагоналируя гамильтониан (3.20) получаем спектр квазичастиц:

$$\varepsilon_p = \pm \sqrt{J^2 + 4t^2 \cos^2 pa \pm 4Jt \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2}}, \quad (3.22)$$

При низких температурах, заполняется только состояние с наименьшей энергией. Разлагая по $t/J \ll 1$ получаем

$$\varepsilon_p = -J - 2t \cos \frac{\theta}{2} \cos pa \quad (3.23)$$

Видно, что частица движется вдоль решетки с эффективной постоянной a и матричным элементом перескока $t \cos \frac{\theta}{2}$. В частности, при $\theta = \pi$ (антиферромагнитное упорядочение), матричный элемент перескока обращается в нуль и транспорт невозможен. О таком явлении говорят, как о невозможности транспорта в классической антиферромагнитно-упорядоченной решетке. Ширина зоны $D = 4t \cos \theta/2$.

Решение задачи 2 Введем параметр $z = 1 - \varepsilon$ и преобразуем интеграл к виду

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1 - z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \left(1 - \frac{\varepsilon t}{1-t}\right)^{-\beta} \quad (3.24)$$

последнее выражение подсказывает замену:

$$u = \frac{t}{1-t} \quad (3.25)$$

В результате, приходим к интегралу

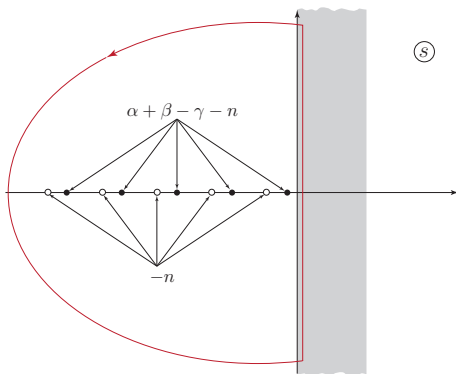


Рис. 3.4: Контур для гипергеометрической функции

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1 - z) = \int_0^{\infty} (1 - \varepsilon u)^{-\beta} u^{\alpha-1} (1 + u)^{\beta-\gamma} du \quad (3.26)$$

Видно, что интеграл соответствует начальному выражению формулы Парсевалья (1.62) с $f(u) = (1 + u)^{-\beta}$ и $g(u) = (1 + u)^{\beta-\gamma}$. Воспользуемся

формулой Парсевала для разложения в ряд интеграла. Образы Меллина функций f и g вычисляются элементарно и равны:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(\beta-s)}{\Gamma(\beta)}, \quad 0 \leq s \leq \operatorname{Re}[\beta], \\ G(s) &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(\gamma-\beta-s)}{\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad 0 \leq s \leq \operatorname{Re}[\gamma-\beta]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(здесь, для определенности я считаю $\operatorname{Re}[\beta] > 0$ и $\operatorname{Re}[\gamma-\beta] > 0$). Таким образом область определения образов Меллина - полоса $0 \leq \operatorname{Re} s \leq \min\{\operatorname{Re}[\beta], \operatorname{Re}[\gamma-\beta]\}$. И по формуле Парсевала, интеграл можно выразить как:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, 1-z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)} \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(\alpha-s)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha+s)\varepsilon^{-s} ds, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где α принадлежит полосе сходимости участвующих образов Меллина. Интеграл элементарно вычисляется вычетами. Считаем $0 < \operatorname{Re} \varepsilon < 1$. Тогда для вычисления интеграла, контур следует замкнуть в левой полуплоскости (см. рис. 3.4). Причём, для сходимости интеграла необходимо пустить контур впритык с мнимой осью, на границе полосы существования образов Меллина. Действительно, поскольку $\Gamma(-z) = \pi/(z \sim \pi z \Gamma(z))$, то при больших z сходимость интеграла контролируется только множителем $\exp s|\ln \varepsilon|$. Поэтому, участки контура, лежащие в правой полуплоскости s должны стремиться к нулю.

Имеется 2 серии вычетов, обусловленные двумя сериями полюсов Γ -функций: $s_n = -n$ и $s = \alpha + \beta - \gamma - n$, $n \geq 0$. Другие Γ -функции вклада не дадут, т.к. они имеют полюсы в точках $\beta + n$ и $\alpha + n$, находящиеся вне замкнутого контура. Выполняя суммирование по серии полюсов $s_n = -n$, полезно воспользоваться преобразованием

$$\Gamma(\gamma - \alpha - \beta - n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma - \beta - \alpha) \Gamma(1 + \alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + n + 1)},$$

следующим из зеркального соотношения для γ -функций. В результате получим:

$$\sum_{s=-n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1) \quad (3.29)$$

Суммирование по $s_n = \alpha + \beta - \gamma - n$ выполняется аналогично. Обратим внимание, что все полюса из этой серии для неотрицательных n лежат внутри контура, т.к. сходимость исходной функции при $\varepsilon = 0$ требует $\beta + \alpha - \gamma < 0$. Сумма дает:

$$\sum_{s=\alpha+\beta-\gamma-n} = \varepsilon^{\gamma-\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F(\gamma-\alpha, \beta-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta) \quad (3.30)$$

Складывая вклады (3.29) и (3.30) воспроизводим формулу (1.72)

Литература

- [1] Половинкин...
- [2] Б. Риман, Сочинения,
под ред. В.Л. Гончарова, ОГИЗ (1948).
- [3] Лаврентьев, Шабат
- [4] де'Брейн (1987).
- [5] G. Schön, A. Zaikin, Phys. Rep. **198**, 237 (1990).
- [6] The special issue on single charge tunneling, Z. Phys. B **85**, 317 (1991).
- [7] For a review, see *Single Charge Tunneling*, ed. by H. Grabert and M.H. Devoret (Plenum, New York, 1992).
- [8] Y. Blanter, M Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000).
- [9] I. Aleiner, P. Brouwer, L. Glazman, Phys. Rep. **358**, 309 (2002).
- [10] For a review, see L.I. Glazman and M. Pustilnik in *New Directions in Mesoscopic Physics (Towards to Nanoscience)*, eds. R. Fazio, G. F. Gantmakher and Y. Imry (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [11] M. Büttiker, H. Thomas, A. Pretre, Phys. Lett. A **180**, 364 (1993).
- [12] M. Büttiker, A.M. Martin, Phys. Rev. B **61**, 2737 (2000).
- [13] S.E. Nigg, R. López, and M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **97**, 206804 (2006).
- [14] M. Büttiker, S.E. Nigg Phys. Rev. B **77**, 085312 (2008).
- [15] J. Gabelli, G. Fève, J.M. Berroir, B. Placais et al., Science **313**, 499 (2006).

- [16] F. Persson, C.M. Wilson, M. Sandberg, G. Johansson, P. Delsing, arXiv:0902.4316.
- [17] K.A. Matveev, Sov. Phys. JETP **72**, 892 (1991).
- [18] H. Grabert, Physica B **194-196**, 1011 (1994); Phys. Rev. B **50**, 17364 (1994).
- [19] K.A. Matveev, Phys.Rev. B **51**, 1743 (1995).
- [20] X. Wang and H. Grabert, Phys. Rev. B **53**, 12621 (1996).
- [21] G. Göppert, H. Grabert, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **81**, 2324 (1998).
- [22] G. Mahan, *Many particle physics*. (Plenum, New York, 2000), 3rd ed.
- [23] I.S. Beloborodov, A.V. Andreev, and A.I. Larkin, Phys. Rev. B **68**, 024204 (2003).
- [24] Z Ringel, Y. Imry, O. Entin-Wohlman, Phys. Rev. B **78** 165304 (2008).
- [25] Hee Chul Park and Kang-Hun Ahn, Phys. Rev. Lett. **101**, 116804 (2008).
- [26] I. Beloborodov, K. Efetov, A. Altland, and F. Hekking, Phys. Rev. B **63**, 115109 (2001).
- [27] K.B. Efetov and A. Tschersich, Phys. Rev. B **67**, 174205 (2003).
- [28] V. Ambegaokar, U. Eckern and G. Schön, Phys. Rev. Lett. **48**, 1745 (1982).
- [29] I.S. Burmistrov, A.M.M. Pruisken Phys. Rev. Lett. **101**, 056801 (2008)
- [30] A. Altland, L. Glazman, A. Kamenev, and J. Meyer, Ann. of Phys. (N.Y) **321**, 2566 (2006).
- [31] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course in Theoretical Physics* (Pergamon, Oxford, 1981), Vol. 3.
- [32] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course in Theoretical Physics* (Pergamon, Oxford, 1981), Vol. 5.

- [33] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1963).
- [34] W. Hofstetter and W. Zwerger, Phys. Rev. Lett. **78**, 3737 (1997); Eur. Phys. J. B **5**, 751 (1998).
- [35] F. Guinea and G. Schön, Europhys. Lett. **1**, 585 (1986); S.A. Bulgadaev, JETP Lett. **45**, 622 (1987).
- [36] S.E. Korshunov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **45**, 342 (1987) [JETP Lett. **45**, 434 (1987)].
- [37] S.A. Bulgadaev, Phys. Lett. A **125**, 299 (1987).
- [38] S.V. Panyukov and A.D. Zaikin, Phys. Rev. Lett. **67**, 3168 (1991).
- [39] A.M. Polyakov, *Gauge fields and strings*, (Harwood Academic Publishers, Shur, 1987).
- [40] E. Ben-Jacob, E. Mottola and G. Schön, Phys. Rev. Lett. **51**, 2064 (1983); C. Wallisser et al., Phys. Rev. B **66**, 125314 (2002).
- [41] I.S. Burmistrov, A.M.M. Pruisken, to be published.
- [42] I.O. Kulik and R.I. Shekhter, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **68**, 623 (1975) [Sov. Phys. JETP **41**, 308 (1975)]; E. Ben-Jacob and Y. Gefen, Phys. Lett. A **108**, 289 (1985); K.K. Likharev and A.B. Zorin, J. Low Temp. Phys. **59**, 347 (1985); D.V. Averin and K.K. Likharev, J. Low Temp. Phys. **62**, 345 (1986).
- [43] A.A. Abrikosov, Physics **2**, 21 (1965).
- [44] A.I. Larkin and V.I. Melnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** 1231 (1971) [Sov. Phys. JETP **34**, 656 (1972)].
- [45] S. Sachdev and J. Ye, Phys. Rev. Lett. **70**, 3339 (1993).
- [46] L. Zhu and Q. Si, Phys. Rev. B **66**, 024426 (2002).
- [47] G. Zaránd and E. Demler, Phys. Rev. B **66**, 024427 (2002).
- [48] G. Schön Phys. Rev. B **32**, 4469 (1985).
- [49] G.M. Eliashberg, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **41**, 1241 (1961) [Sov. Phys. JETP **14**, 886 (1962)].
- [50] H. Schoeller and G. Schön, Phys. Rev. B **50**, 18436 (1994).

- [51] B.J. van Wees *et al* Phys.Rev.Lett. **60**, 848 (1988)
- [52] Yu.V. Sharvin Zh. Exp. Teor. Fiz. **48** 984 (1965) [Sov. Phys. JETP **21**, 65 (1965)]
- [53] Ya. M. Blanter, M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000), cond-mat/9910158
- [54] M. Büttiker Phys.Rev.B **4**, 7906 (1989)
- [55] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University, New York, 1997).
- [56] Ya.M. Blanter, cond-mat/0511478 (unpublished).
- [57] G. B. Lesovik and R. Loosen, JETP Lett. **65**, 295 (1997).
- [58] R. Deblock, E Onac, L Gurevich, L.P.Kouwenhoven, Science **301**, 203 (2003); E. Onac F. Balestro, B. Trauzettel, C. F. Lodewijk and L.P. Kouwenhoven , Phys. Rev. Lett. **96**, 026803 (2006).