

На правах рукописи

РОДИОНОВ Ярослав Игоревич

УДК 538.48 538.9

**Равновесный и неравновесный транспорт в одноэлектронных
устройствах**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
И. С. Бурмистров

Оглавление

Введение	5
1 Сопротивление зарядовой релаксации в задаче о кулоновской блокаде	10
1.1 Введение	10
1.2 Формализм	14
1.2.1 Гамильтониан	14
1.2.2 Кондактанс и диссипация	16
1.2.3 Модель АЭШ	18
1.3 Режим слабой связи, $g \gg 1$	20
1.3.1 Теория возмущений	20
1.3.2 Инстантоны	21
1.3.3 Инстантонная поправка к поляризационному оператору	22
1.3.4 Физические наблюдаемые и перенормировка затворной емкости	25
1.4 Режим сильной связи, $g \ll 1$	27
1.4.1 Предварительные замечания	28
1.4.2 Спиновая корреляционная функция $\Pi_{s,pf}^R(\omega)$. Первый порядок по g	31
1.4.3 Одно-петлевая структура псевдо-фермионной теории . .	33
1.4.4 Уравнение Дайсона для спиновой корреляционной функции $\Pi_{s,pf}^R(\omega)$	36

1.4.5	Адмиттанс и скорость диссипации энергии	39
1.4.6	Подход кинетического уравнения	41
1.5	Обсуждение и выводы	43
2	Динамика релаксации электронной функции распределения в задаче с кулоновской блокадой	50
2.1	Введение	50
2.2	Действие и кинетические уравнения	55
2.2.1	Действие АЭШ	55
2.2.2	Кинетические уравнения	57
2.3	Транспортные коэффициенты	59
2.4	Электронная релаксация в островке, режим слабой кулоновской блокады, $g \gg 1$	63
2.4.1	Перенормировка действия АЭШ при $g \gg 1$	64
2.4.2	Неравновесный режим	66
2.4.3	Квазиравновесный режим	68
2.5	Релаксация электронов островка, режим сильной кулоновской блокады, $g \ll 1$	69
2.5.1	Неравновесные псевдо-фермионы	70
2.5.2	Одно-петлевая структура псевдо-фермионной теории	74
2.5.3	Релаксация электронной функции распределения внутри островка	76
2.5.4	Релаксация электронной температуры внутри островка	77
2.6	Выводы	83
3	Неравновесный адмиттанс в одно-электронной коробке в режиме сильной кулоновской блокады	90
3.1	Введение	90

3.2	Вычисление адмиттанса и диссипации в режиме сильной кулоновской блокады	92
3.2.1	Адмиттанс	92
3.2.2	Параметры g' и q' в неравновесном режиме	94
3.3	Обсуждение и выводы	96
3.3.1	Адмиттанс и диссипация	96
3.3.2	Сопrotивление зарядовой релаксации, перенормированная затворная емкость	99
Заключение		101
Приложения		104
A	Приложения к части 1	104
A.1	Производная от энергии	104
A.2	Адмиттанс	106
A.3	Инстантонные вклады	109
A.4	Расчёт поляризационного оператора	111
A.5	Вероятности перехода	116
B	Приложения к части 2	119
B.1	Келдышевская форма действия АЭШ	119
B.2	Электронная собственная энергия	120
B.3	Туннельная плотность состояний	121
B.4	Перенормировка действия АЭШ в пределе $g \gg 1$	122
B.5	Перенормировка псевдо-фермионного действия	124
Публикации автора по теме диссертации		128
Литература		129

Введение

Актуальность темы.

В настоящее время исследование транспорта и динамики электронов в нульмерных системах является одним из главных направлений работ в мезоскопической физике. Исследование динамики и транспорта в них необходимо для понимания того, как управлять и контролировать устройства ограниченной геометрии, например: квантовые точки, квантовые точечные контакты, одноэлектронные транзисторы, сверх-малые туннельные контакты и короткие углеродные трубки. В этих эффективно нульмерных электронных системах кардинальное влияние на транспорт оказывает кулоновское взаимодействие. Наиболее яркому проявлению кулоновского взаимодействия в нульмерных системах – эффекту подавления электрического транспорта (кулоновской блокаде) – и посвящена представленная работа. Физика становится ещё менее тривиальной в случае, когда, помимо сильного взаимодействия, необходимо учитывать неравновесность исследуемой системы. Одноэлектронные устройства, такие как одноэлектронный транзистор (ОЭТ) или одноэлектронная коробка (ОЭК), являются наиболее простыми, и, в то же время, важнейшими системами, где кулоновская блокада является доминирующим эффектом.

Первые измерения эффектов кулоновской блокады в одноэлектронных транзисторах следует отнести ещё к 1987 г. [1]. По мере развития техники эксперимента одноэлектронные транзисторы стали стандартным инструментом для наблюдения эффектов кулоновского взаимодействия на

мезоскопических масштабах. Размер одноэлектронного транзистора $L \sim 1 \mu m$ достаточно мал, так что уже емкостная кулоновская энергия, связанная с конечностью размеров островка, $E_c \sim e^2/L \sim 1 meV \sim 10 K$, где e – заряд электрона, существенно меняет свойства электронного транспорта при низких температурах $T \lesssim 10 K$. К настоящему времени развито достаточно много теоретических [2, 3, 4] и экспериментальных [5, 6, 7] методов исследования кулоновской блокады. Свойства таких систем в высокой степени определяются электронной когерентностью и кулоновским взаимодействием.

В последнее время одноэлектронные системы стали так же полигоном для изучения влияния кулоновского взаимодействия на термо-электрические эффекты [8]. Среди важных экспериментальных достижений следует упомянуть: разработку кулоновского термометра [8], теплового выпрямителя на основе квантовой точки [9] и новой техники для измерения температурных градиентов в квантовой точке [10]. Однако, неравновесные процессы в таких системах временно оказались вне круга теоретических изысканий, ввиду сложности необходимых расчётов. Между тем, процессы релаксации температур и неравновесных распределений играют решающую роль в эксперименте и термометрии. Так в недавнем эксперименте [11] найдено, что неравновесные процессы приводят к новому физическому эффекту в углеродной нанотрубке: кулоновской аномалии при конечном транспортном напряжении. Одна из пионерских теоретических работ, посвящённая неравновесной электронной динамике, выполнена группой [12], где произведен расчет электронной релаксации в одноканальной нанопроволоке. Работа, представленная в диссертации, мотивирована недавним теоретическим и экспериментальным интересом к:

а) взаимосвязи между адмиттансом, сопротивлением и диссипацией в ОЭК в различных параметрических режимах [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19],

б) релаксации температуры в квантовой точке [20] и термо-электрическим эффектам в ОЭТ [21],

в) влиянию неравновесных условий на электрический транспорт в одно-электронных системах [22, 23, 24].

В работах [14, 15, 16] проведены первые расчеты диссипации и адмиттанса во взаимодействующей ОЭК для сверхнизких температур $T \lesssim \delta$, где δ – среднее расстояние между одно-частичными уровнями островка ОЭК. Такой температурный режим будет называться в дальнейшем режимом когерентной ОЭК. В данном режиме полное решение задачи об адмиттансе ОЭК с учетом сильного кулоновского взаимодействия построено лишь недавно [19]. Теории, описывающей адмиттанс и диссипацию при более высоких температурах $T \gg \delta$, до сих пор построено не было. Оказывается, при температурах $T \gg \delta \max\{1, g\}$, где g – безразмерный кондактанс туннельного контакта ОЭК (или ОЭТ), задача упрощается, т.к. при таком условии электронной когерентностью можно пренебречь [26]. С точки зрения эксперимента актуальным является вопрос о построении теории диссипации и адмиттанса в ОЭК в условиях неравновесия.

Важный вопрос о законе релаксации электронной температуры и функции распределения островка ОЭК в неравновесных условиях затрагивался в работе [20]. Однако, рассмотрение в работе [20] ограничилось случаем сильной кулоновской блокады и предположениями, что: во-первых, электронное распределение является ферми-функцией с некоторой температурой, отличной от равновесной; во-вторых, транспорт доминируется ко-туннелированием (режим кулоновской долины); в-третьих, температуры резервуаров и островка близки. Задача о релаксации электронов, при произвольно отличающихся характерных энергиях островка и резервуара, ещё не получила теоретического освещения.

Наконец, учёт эффектов неравновесия при изучении адмиттанса

и диссипации в ОЭК ещё не получил теоретического освещения и представляется актуальным с точки зрения эксперимента. В частности, анализ данных недавнего эксперимента [18] по измерению диссипации и сопротивления зарядовой релаксации в ОЭК показывает, что ОЭК в эксперименте может находиться в неравновесном режиме. Таким образом, представляется важным провести расчёт соответствующих эффектов.

Цель работы состоит в исследовании диссипации и адмиттанса, а так же релаксационных процессов в одно-электронной системе в режиме высоких температур $T \gg \delta \max\{1, g\}$. Для достижения этой цели была выполнена следующая программа:

1. Изучение равновесной диссипации в одноэлектронной системе с учётом сильного кулоновского взаимодействия; получение количественных предсказаний для величин адмиттанса и диссипации в предельных случаях сильной и слабой кулоновской блокады.

2. Получение квантового кинетического уравнения для ОЭТ, описывающего динамику электронов в режиме слабой и сильной кулоновской блокады; изучение закона релаксации электронной функции распределения в островке металлической ОЭК; исследование термо-ЭДС ОЭТ в режиме слабой кулоновской блокады.

3. Обобщение теории диссипации, а так же понятия сопротивления зарядовой релаксации в ОЭК с сильным кулоновским взаимодействием на неравновесный режим.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. В режиме температур $T \gg \delta \max\{1, g\}$ вычислен адмиттанс и построена теория диссипации ОЭК с сильным кулоновским взаимодействием; в предельных случаях сильной и слабой кулоновской блокады вычислено сопротивление зарядовой релаксации и перенормированная затворная

емкость ОЭК.

2. Получено квантовое кинетическое уравнение, описывающее релаксацию электронной функции распределения островка, для ОЭТ с сильным кулоновским взаимодействием при характерных энергиях электронов островка $\varepsilon_d \gg \delta \max\{1, g\}$ и справедливое для любых значений безразмерного кондактанса; приведены решения для наиболее интересных предельных случаев.

3. При характерных энергиях электронов островка $\varepsilon_d \gg \delta \max\{1, g\}$ вычислен адмиттанс и построена теория диссипации ОЭК с сильным кулоновским взаимодействием в неравновесных условиях; вычислено сопротивление зарядовой релаксации и перенормированная затворная емкость для случая сильной кулоновской блокады.

Глава 1

Сопротивление зарядовой релаксации в задаче о кулоновской блокаде

1.1 Введение

Явление кулоновской блокады стало прекрасным инструментом для наблюдения эффектов взаимодействия в одно-электронных приборах. Теоретические методы исследования хорошо развиты [2, 5, 6, 7, 3, 4]. Простейшая мезоскопическая система, обнаруживающая кулоновскую блокаду, – это одноэлектронная коробка (ОЭК). Свойства такой системы в сильной степени определяются электронной когерентностью и взаимодействием. Наша работа мотивирована значительным недавним теоретическим и экспериментальным интересом к взаимосвязи между диссипацией и сопротивлением такого прибора в различных параметрических режимах. [13, 14, 15, 16, 17, 18] Исследуемая система выглядит следующим образом. (Рис.1.1). Металлический островок соединен с равновесным электронным резервуаром через туннельный контакт. Островок соединен с затворным электродом емкостным образом. Потенциал островка определяется затворным напряжением U_g электрода. Физика системы определяется несколькими энергетическими масштабами: энергия Таулесса островка E_{Th} , зарядовая энергия E_c и среднее расстояние между

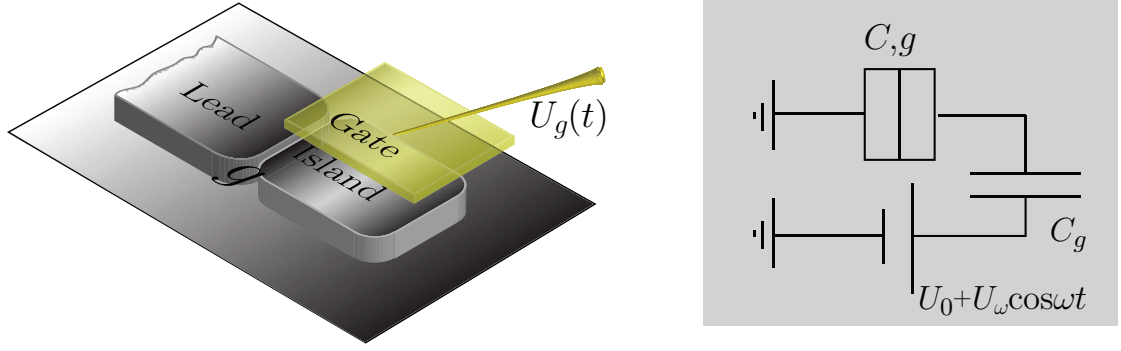


Рис. 1.1: Измерение сопротивления R_q . ОЭК находится под постоянным затворным напряжением U_0 . Диссипативный ток через туннельный контакт индуцирован слабым АС напряжением $U(t)$.

одночастичными уровнями δ . В дальнейшем энергия Таулесса будет считаться наибольшим масштабом в решаемой задаче. Это позволяет считать металлический островок нульмерным объектом с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Безразмерный кондактанс туннельного соединения g есть важный параметр задачи.

Изначально центральной величиной, которая исследовалась в ОЭК, была эффективная емкость: $\partial Q/\partial U_g$, где Q средний заряд островка [27, 28, 29, 30, 31, 32]. Статья [13] вызвала, как теоретический, так и экспериментальный интерес к функциям динамического отклика подобных систем [14, 15, 16, 17, 18, 33, 34]. Стоит заметить, что система не пропускает постоянного электрического тока, и непосредственное измерение кондактанса невозможно. Таким образом, основной динамической характеристикой системы становится адмиттанс, то есть отклик тока на переменное затворное напряжение: $U_g(t) = U_0 + U_\Omega \cos \Omega t$. Как хорошо известно, действительная часть адмиттанса определяет диссипацию энергии в электрическом контуре. Рассуждая в терминах классической физики, мы заключаем, что средняя скорость диссипации в ОЭК даётся следующим выражением:

$$W_\Omega = \frac{1}{2} \Omega^2 C_g^2 R |U_\Omega|^2, \quad R = \frac{h}{e^2 g}, \quad \hbar \Omega \ll g E_c, \quad (1.1)$$

где C_g обозначает затворную емкость, e - заряд электрона, и $h =$

$2\pi\hbar$ - постоянную Планка. Выражение (1.1) даёт нам естественную возможность выделить сопротивление системы из диссипации. Видно, что сопротивление классической системы полностью определяется туннельным контактансом контакта: $R = h/(e^2g)$. Вопрос, на который следует ответить, состоит в следующем: как квантовые эффекты, такие как электронная когерентность и взаимодействие, меняют этот результат? Можно ожидать, что правильная формула для диссипации даст обобщенное квантовое сопротивление. Очевидный камень преткновения, который сразу можно предвидеть, состоит в том, что только комбинация из двух переменных: C_g^2R , а не просто R , может быть извлечена из диссипации. Для случая полностью когерентной ОЭК эта ключевая сложность была разрешена в работе [13]. Было показано, что диссипация энергии \mathcal{W}_Ω может быть факторизована в полном соответствии со своим классическим видом (1.1), но смысл входящих физических величин преобразуется: геометрическая емкость C_g заменяется на новую наблюдаемую – мезоскопическую емкость C_μ ; это ведет к появлению другой наблюдаемой – сопротивления *зарядовой релаксации* R_q – такого, что $R \rightarrow R_q$ в уравнении (1.1). Сопротивление зарядовой релаксации когерентной системы разительно отличается от своего классического аналога. В частности, как показано в [13], сопротивление зарядовой релаксации одноканального контакта не зависит от его прозрачности.

В квазистационарном режиме адмиттанс был исследован в недавнем эксперименте группы Gabelli [17]. Измерения были проведены при низких температурах $T \lesssim \delta$, когда систему можно считать когерентной. Вопрос, оставшийся теоретически не исследованным, состоит в следующем: что происходит с диссипацией и сопротивлением при промежуточных температурах, когда тепловые флуктуации разрушают электронную когерентность, но электрон-электронное взаимодействие сильно? В недавнем эксперименте [18] диссипация энергии в ОЭК была исследована как раз при

упомянутых температурах.

Мотивированные последним экспериментом [18], мы исследовали этот вопрос теоретически. Мы рассматриваем мощность диссипации одноэлектронной коробки в так называемом "взаимодействие без когерентности" режиме. Он соответствует следующей иерархии энергетических масштабов в нашей задаче: $E_{Th} \gtrsim E_c \gg T \gg \max\{\delta, g\delta\}$. Данный температурный режим таков, что электроны остаются с одной стороны сильно коррелированными, ($T \ll E_c$), с другой – позволяет пренебречь электронной когерентностью ($T \gg \max\{\delta, g\delta\}$) [26, 35]. Мы рассчитываем мощность диссипации и ОЭК адмиттанс в предельных случаях большого ($g \gg 1$) и малого ($g \ll 1$) безразмерного туннельного кондактанса контакта.

Мы рассматриваем многоканальный контакт, но кондактанс каждого канала предполагается малым $g_{ch} \ll 1$. Тогда физика задачи может быть наиболее адекватно описана в рамках эффективного действия Амбегаокара-Эккерна-Шона (АЭШ) [36]. Полученные результаты приводят к обобщению классического результата (1.1). Мы обнаружили, что при $\Omega \rightarrow 0$ средняя скорость диссипации энергии факторизуется в обоих пределах ($g \gg 1$ и $g \ll 1$) следующим образом:

$$\mathcal{W}_\Omega = \frac{1}{2} \Omega^2 \mathcal{C}_g^2 \mathcal{R}_q |U_\Omega|^2, \quad \mathcal{R}_q = \frac{h}{e^2 g'(T)}, \quad (1.2)$$

в полной аналогии с классическим выражением (1.1). Здесь $\mathcal{R}_q \equiv \mathcal{R}_q(T)$ и $\mathcal{C}_g \equiv \mathcal{C}_g(T)$ определены, соответственно, как сопротивление зарядовой релаксации и перенормированная затворная емкость. Необходимо отметить, что физические наблюдаемые $g'(T)$ и \mathcal{C}_g определены универсальным образом для любого значения безразмерного кондактанса g . Это позволяет нам предположить, что ур. (1.2) остаётся справедливым во всем интервале значений g .

Для того, чтобы выявить физику, скрытую в величинах $g'(T)$ и \mathcal{C}_g , удобнее

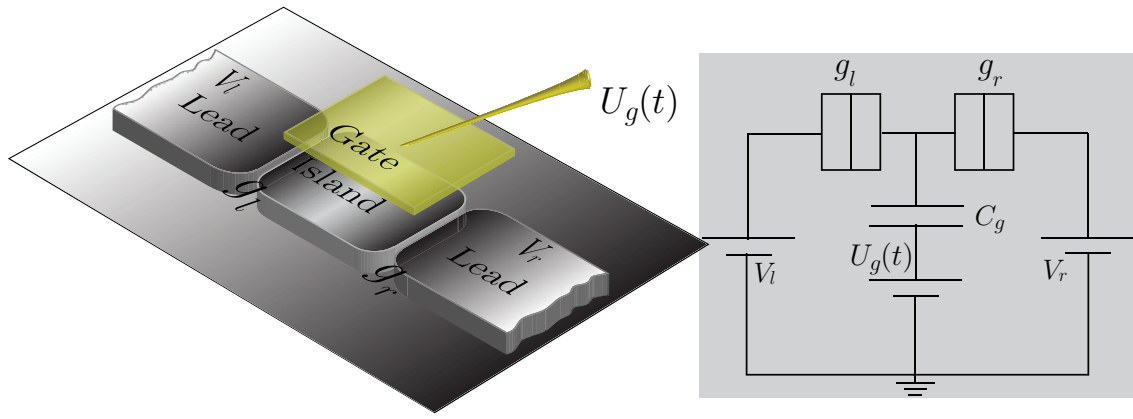


Рис. 1.2: Измерение кондуктанса. На ОЭТ подано постоянное затворное напряжение U_g и постоянное транспортное напряжение $V_{dc} = V_l - V_r$.

рассмотреть одноэлектронный транзистор (ОЭТ), чем ОЭК (см. Рис. 1.2). В отсутствие постоянного напряжения между левым и правым резервуарами ОЭТ представляет собой, по существу, ОЭК с чуть по-другому определённым параметром g . Тогда $g'(T)$ есть та самая физическая величина, которая определяет кондуктанс транзистора. Перенормированная затворная ёмкость C_g сильно отличается от эффективной ёмкости $\partial Q/\partial U_0$. В действительности, $C_g = \partial q'(T)/\partial U_0$, где $q'(T)$ - физическая наблюдаемая, введенная недавно в работе [37] для описания перенормировки θ -угла в задаче о кулоновской блокаде. Величина q' определяется не только средним зарядом Q , но, так же, и антисимметричным, так называемым *квантовым*, коррелятором токового шума в одноэлектронном транзисторе.

1.2 Формализм

1.2.1 Гамильтониан

Одноэлектронная коробка описывается гамильтонианом

$$H = H_0 + H_c + H_t, \quad (1.3)$$

где

$$H_0 = \sum_k \varepsilon_k^{(a)} a_k^\dagger a_k + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha^{(d)} d_\alpha^\dagger d_\alpha. \quad (1.4)$$

описывает свободные электроны внутри контакта и островка, H_c описывает кулоновское взаимодействие носителей в островке и H_t описывает туннелирование. Здесь, операторы a_k^\dagger (d_α^\dagger) создают частицу внутри контакта (островка). Туннельный гамильтониан

$$H_t = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha + \text{h.c.} \quad (1.5)$$

Зарядовый гамильтониан электронов в коробке взят в емкостной форме:

$$H_c = E_c (\hat{n}_d - q)^2. \quad (1.6)$$

Здесь $E_c = e^2/(2C)$ обозначает зарядовую энергию, и $q = C_g U_g/e$ – затворный заряд. Оператор числа частиц в островке:

$$\hat{n}_d = \sum_\alpha d_\alpha^\dagger d_\alpha. \quad (1.7)$$

Удобно ввести эрмитовы матрицы:

$$\hat{g}_{kk'} = (2\pi)^2 \left[\delta(\varepsilon_k^{(a)}) \delta(\varepsilon_{k'}^{(a)}) \right]^{1/2} \sum_\alpha t_{k\alpha} \delta(\varepsilon_\alpha^{(d)}) t_{\alpha k'}^\dagger, \quad (1.8)$$

$$\hat{g}_{\alpha\alpha'} = (2\pi)^2 \left[\delta(\varepsilon_\alpha^{(d)}) \delta(\varepsilon_{\alpha'}^{(d)}) \right]^{1/2} \sum_k t_{\alpha k}^\dagger \delta(\varepsilon_k^{(a)}) t_{k\alpha'}, \quad (1.9)$$

первая из которых действует в Гильбертовом пространстве состояний контакта, вторая – в пространстве состояний островка. Энергии $\varepsilon^{(a)}, \varepsilon^{(d)}$ отсчитываются от уровня энергии Ферми, и δ -функции должны быть сглажены на масштабе δE , таком что $\delta \ll \delta E \ll T$.

Собственные состояния \hat{g} (\hat{g}) описывают ‘канальные состояния’ в контакте (островке), в то время как прозрачности соответствующих каналов \mathcal{T}_γ связаны с собственными значениями g_γ . Заметим, что вообще говоря, ранг матрицы \hat{g} отличается от ранга матрицы \hat{g} , и, очевидно, количество

собственных чисел тоже различно. Это различие несущественно, так как оно проистекает из ‘закрытых каналов’ с $g_\gamma \approx 0$, т.е., из состояний, локализованных или внутри контакта, или внутри островка. Эффективный ‘канальный кондактанс’ g_{ch} и эффективное число открытых каналов N_{ch} может быть определено как [38]

$$g_{\text{ch}} = \frac{\text{tr}(\hat{g}^2)}{\text{tr} \hat{g}}, \quad N_{\text{ch}} = \frac{(\text{tr} \hat{g})^2}{\text{tr}(\hat{g}^2)}. \quad (1.10)$$

В общем случае эффективное действие может быть выписано как сумма членов, $\text{tr}(\hat{g}^k)$, по всем целым k (см работу [38]). Задача существенно упрощается в случае, когда

$$g_{\text{ch}} \ll 1, \quad N_{\text{ch}} \gg 1 \quad (1.11)$$

Будем предполагать это условие выполненным. Тогда всеми членами с $k > 1$ можно пренебречь, по сравнению с лидирующим слагаемым с $k = 1$, и, таким образом, легко воспроизводится стандартная форма АЭШ-действия. В частности, безразмерный кондактанс контакта может быть выражен как:

$$g = \text{tr} \hat{g} = \text{tr} \hat{g} = g_{\text{ch}} N_{\text{ch}}. \quad (1.12)$$

Заметим, что при выполнении условия (1.11), g может быть все ещё большим.

В дальнейшем мы везде принимаем $\hbar = e = 1$, кроме конечных результатов.

1.2.2 Кондактанс и диссипация

Для исследования электрических свойств системы мы рассчитываем диссипацию энергии, вызванную медленными осцилляциями внешнего затворного напряжения $U_g(t) = U_0 + U_\Omega \cos \Omega t$.

Средняя скорость диссипации энергии может быть тогда найдена по стандартной схеме: [39]

$$\mathcal{W}_\Omega = \frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\delta H}{\delta U_g} \right\rangle \frac{dU_g}{dt}. \quad (1.13)$$

Здесь E – энергия системы, H определяется ур. (1.3), а угловые скобки означают полное квантовое статистическое усреднение. Так как

$$\left\langle \frac{\delta H}{\delta U_g} \right\rangle = -\frac{C_g}{C} \sum_{\alpha} \langle d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} \rangle + \frac{C_g^2}{C} U_g, \quad (1.14)$$

диссипация энергии определяется откликом электронного заряда на переменное затворное напряжение $U_g(t)$. Таким образом, она может быть найдена с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы [40]:

$$\mathcal{W}_{\Omega} = \frac{C_g^2}{2C^2} \omega \operatorname{Im} \Pi^R(\Omega) |U_{\Omega}|^2. \quad (1.15)$$

Здесь $\Pi^R(\Omega)$ – запаздывающий электронный поляризационный оператор:

$$\Pi^R(t) = i\Theta(t) \langle [\hat{n}_d(t), \hat{n}_d(0)] \rangle, \quad \hat{n}_d = \sum_{\alpha} d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}, \quad (1.16)$$

причем $\Theta(t)$ обозначает θ -функцию Хевисайда.

Нас интересует квазистатический режим $\Omega \rightarrow 0$. Тогда, как будет показано ниже, поляризационный оператор $\Pi^R(\Omega)$ можно разложить в регулярный ряд по Ω :

$$\Pi^R(\Omega) = \pi_0(T) + i\Omega\pi_1(T) + \mathcal{O}(\Omega^2), \quad (1.17)$$

где $\pi_0(T)$ и $\pi_1(T)$ – действительные функции температур и других параметров ОЭК. Скорость диссипации энергии определяется только линейным коэффициентом $\pi_1(T)$ и приобретает омическую форму:

$$\mathcal{W}_{\Omega} = \frac{\Omega^2}{2} \mathcal{A}(T) |U_{\Omega}|^2, \quad \mathcal{A}(T) = \frac{C_g^2}{C^2} \pi_1(T). \quad (1.18)$$

Адмиттанс ОЭК $\mathcal{G}(\Omega)$, являясь линейным откликом переменного тока I_{Ω} на переменное напряжение U_{Ω} ($\mathcal{G}(\Omega) = I_{\Omega}/U_{\Omega}$), связан с поляризационным оператором (см. Приложение А.1):

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i\Omega C_g (1 + \Pi^R(\Omega)/C). \quad (1.19)$$

Как и ожидалось, скорость диссипации энергии пропорциональна действительной части адмиттанса: $\mathcal{W}_{\Omega} \sim \operatorname{Re} \mathcal{G}(\Omega)$. Статическая часть

поляризационного оператора $\Pi^R(\Omega)$ фиксируется эффективной емкостью $\partial Q/\partial U_0$ как

$$\pi_0(T) = \frac{C}{C_g} \frac{\partial Q}{\partial U_0} - C, \quad (1.20)$$

где $Q = \langle \hat{n}_d \rangle$ обозначает средний заряд на островке. Упомянем, что ур. (1.20) аналогично хорошо известному тождеству Уорда, связывающему статический поляризационный оператор и сжимаемость. [41] Используя ур. (1.17)-(1.20), мы приходим к следующему результату:

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i\Omega \frac{\partial Q}{\partial U_0} + \frac{C}{C_g} \mathcal{A}(T)\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (1.21)$$

который является квантовым обобщением классического соотношения

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i\Omega C_g + C_g C R \Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3). \quad (1.22)$$

Таким образом, адмиттанс и скорость диссипации энергии определяются поляризационным оператором $\Pi^R(\Omega)$ который включает одну неизвестную функцию $\pi_1(T)$ в квазистационарном режиме.

1.2.3 Модель АЭШ

Условие (1.11) делает возможным применение эффективного АЭШ-действия [36], которое описывает физику системы в терминах единственного квантового фазового поля $\varphi(\tau)$ флуктуирующего в мацубаровском времени τ :

$$S_{AES} = S_d + S_g + S_c. \quad (1.23)$$

Здесь S_d – диссипативная часть действия в стандартной форме:

$$S_d = -\frac{g}{4} \int_0^\beta \alpha(\tau_{12}) e^{i\varphi(\tau_1) - i\varphi(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2, \quad (1.24)$$

$$\alpha(\tau) = \frac{T^2}{\sin^2 \pi T \tau} = -\frac{T}{\pi} \sum_{\omega_n} |\omega_n| e^{-i\omega_n \tau},$$

где $\beta = 1/T$, $\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$, $\omega_n = 2\pi Tn$, g определяется ур.(1.12) и обозначает безразмерный (в единицах e^2/h) кондактанс туннельного соединения. Член S_g описывает связь с затворным напряжением U_0 :

$$S_g = -iq \int_0^\beta \dot{\varphi} d\tau = -2\pi q W i. \quad (1.25)$$

Целое W есть число намоток поля $\varphi(\tau)$, которое возникает из условия:

$$\varphi(\beta) - \varphi(0) = 2\pi W. \quad (1.26)$$

Ненулевое значение S_g появляется только для топологически нетривиальных полевых конфигураций. Зарядовая часть действия выглядит следующим образом:

$$S_c = \frac{1}{4E_c} \int_0^\beta \dot{\varphi}^2 d\tau. \quad (1.27)$$

Физически, производная по времени фазовой переменной $\dot{\varphi}$ описывает флуктуации напряжения в ОЭК. Действие АЭШ верно для любых g . Мы работаем в режиме $T \ll E_c$. Зарядовый член S_c , таким образом, всегда мал и даёт нам естественную ультрафиолетовую обрезку теории: $\Lambda = gE_c$.

Наша цель состоит в том, чтобы вычислить поляризационный оператор (1.16), который, согласно ур. (1.18) и (1.19), определяет диссипацию энергии и адмиттанс. Для этого необходимо выразить начальные наблюдаемые, записанные в фермионных переменных, через корреляторы бозонного поля $\varphi(\tau)$. Это сделано в приложении А.1 при помощи формализма Келдыша. Поляризационный оператор $\Pi^R(\omega)$ тогда может быть получен аналитическим продолжением $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$ следующего фазового коррелятора в мацубаровском представлении:

$$\Pi(\tau) = -C^2 \langle \mathcal{T}_\tau \dot{\varphi}(\tau) \dot{\varphi}(0) \rangle. \quad (1.28)$$

Здесь \mathcal{T}_τ обозначает временное упорядочение. До сих пор мы не делали никаких предположений относительно величины g . Модель АЭШ, однако, не

разрешима для произвольных g из-за сильной нелинейности диссипативного слагаемого. В следующем разделе мы ограничим рассмотрение случаем большого безразмерного кондактанса $g \gg 1$: величина $1/g$ тогда становится параметром разложения теории возмущения в задаче.

1.3 Режим слабой связи, $g \gg 1$

1.3.1 Теория возмущений

Чтобы разложить поляризационный оператор $\Pi(i\omega_n)$ по степеням $1/g$, удобно использовать мацубаровское частотное представление,

$$\varphi(\tau) = \sum_n \varphi_n e^{-i\omega_n \tau}, \quad \varphi_{-n} = \varphi_n^*. \quad (1.29)$$

Тогда квадратичная часть действия АЭШ принимает вид:

$$S_{AES}^{(2)} = g \sum_{n>0} \left(n + \frac{2\pi^2 T}{g E_c} n^2 \right) |\varphi_n|^2. \quad (1.30)$$

Оно определяет пропагатор поля φ как

$$\langle \varphi_n \varphi_m \rangle = \frac{1}{g} \frac{\delta_{m,-n}}{|n| + 2\pi^2 T n^2 / (g E_c)}. \quad (1.31)$$

Расчёт поляризационного оператора на древесном уровне даёт:

$$\frac{\Pi(i\omega_n)}{C^2} = -\frac{2\pi|\omega_n|}{g} + \mathcal{O}(\omega_n^2). \quad (1.32)$$

Выполняя стандартные одно-петлевые вычисления, находим

$$\frac{\Pi(i\omega_n)}{C^2} = -\frac{2\pi|\omega_n|}{g} \left(1 + \frac{2}{g} \ln \frac{g E_c e^{\gamma+1}}{2\pi^2 T} \right) + \mathcal{O}(\omega_n^2). \quad (1.33)$$

При помощи ренорм-группового анализа этот результат может быть переписан как [42]

$$\frac{\Pi(i\omega_n)}{C^2} = -\frac{2\pi|\omega_n|}{g(T)} + \mathcal{O}(\omega_n^2). \quad (1.34)$$

Здесь $g(T)$ определяется как

$$g(T) = g - 2 \ln \frac{gE_c e^{\gamma+1}}{2\pi^2 T}, \quad (1.35)$$

где $\gamma \approx 0.577$ – константа Эйлера. Ур. (1.35) описывает хорошо известную температурную перенормировку константы связи [43].

1.3.2 Инстантоны

До сих пор явление Кулоновской блокады, т.е. зависимость физических величин от q , совершенно отсутствовало во всех наших выражениях для поляризационного оператора. Чтобы поймать этот эффект, мы должны учесть инстантонные решения действия АЭШ [44, 45]. Инстантоны Коршунова записываются следующим образом:

$$e^{i\varphi_W(\tau|\{z_a\})} = \prod_{a=1}^{|W|} \left[\frac{e^{2\pi i \tau T} - z_a}{1 - z_a^* e^{2\pi i \tau T}} \right]^{\text{sgn } W}, \quad (1.36)$$

где z_a есть набор произвольных комплексных чисел. Положительные значения чисел намотки W соответствуют инстантонам со всеми $|z_a| < 1$, а отрицательные – анти-инстантонам со всеми $|z_a| > 1$. На классических решениях (1.36) диссипативная S_d и топологическая S_g части действия АЭШ становятся равными

$$S_d[\varphi_W] + S_g[\varphi_W] = \frac{g}{2}|W| - 2\pi W q i. \quad (1.37)$$

Они конечны и не зависят от параметров z_a . Эти параметры – это нулевые моды. Зарядовое слагаемое, однако, зависит от них:

$$S_c[\varphi_W] = \frac{\pi^2 T}{E_c} \sum_{a,b} \frac{1 + z_a z_b^*}{1 - z_a z_b^*}. \quad (1.38)$$

Поэтому z_a могут рассматриваться лишь как приближённые нулевые моды, и инстантонные конфигурации с $|z_a| \rightarrow 1$ подавлены.

Как видно из ур. (1.37), каждый инстантон вносит малый фактор $e^{-g/2}$ в любую наблюдаемую, которую мы хотим вычислить. В дальнейшем мы ограничимся, таким образом, одно-инстантонным приближением.

1.3.3 Инстантонная поправка к поляризованному оператору

Чтобы вычислить инстантонный вклад в поляризованный оператор, нам необходимо рассчитать одно-инстантонный вклад в коррелятор $\langle \mathcal{T}_\tau \dot{\varphi}(\tau) \dot{\varphi}(0) \rangle$.

С одно-инстантонной точностью мы находим

$$\begin{aligned} -\frac{\Pi(i\omega_n)}{C^2} &\simeq \langle \dot{\varphi} \dot{\varphi} \rangle_{\omega_n}^{(0)} \left(1 - \sum_{W=\pm 1} \frac{\mathcal{Z}_W}{\mathcal{Z}_0} \right) + \sum_{W=\pm 1} \langle \dot{\varphi} \dot{\varphi} \rangle_{\omega_n}^{(W)} \\ &= \text{I} + \text{II}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где $\langle \dot{\varphi} \dot{\varphi} \rangle_{\omega_n} = \int_0^\beta \langle \dot{\varphi}(\tau) \dot{\varphi}(0) \rangle \exp(i\omega_n \tau) d\tau$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_W &= \int_W \mathcal{D}\varphi \exp[-S_{AES}], \\ \langle \dot{\varphi} \dot{\varphi} \rangle^{(W)} &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_W \mathcal{D}\varphi \dot{\varphi}(\tau) \dot{\varphi}(0) \exp[-S_{AES}]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Индекс W под знаком интеграла означает, что функциональное интегрирование выполнено по полевым конфигурациям, подчиняющимся граничному условию (1.26). Первый член I в ур. (1.39) отвечает перенормировке статистической суммы, обусловленной присутствием инстантонов. Второй член II – это вклад инстантонных решений $\varphi_{\pm 1}$ в саму корреляционную функцию. Перенормированная статистическая сумма выглядит следующим образом [30, 32, 38, 46]:

$$1 - \sum_{W=\pm 1} \frac{\mathcal{Z}_W}{\mathcal{Z}_0} = 1 - \frac{g^2 E_c}{\pi^2 T} e^{-g/2} \ln \frac{E_c}{T} \cos 2\pi q. \quad (1.41)$$

Вклад II состоит из двух частей:

$$\begin{aligned} \text{II} &= \sum_{W=\pm 1} \langle \dot{\varphi} \dot{\varphi} \rangle_{\omega_n}^{(W)} = \sum_{W=\pm 1} \langle \dot{\varphi}_W \dot{\varphi}_W \rangle_{\omega_n}^{(W)} \\ &\quad + \sum_{W=\pm 1} \langle \delta \dot{\varphi}_W \delta \dot{\varphi}_W \rangle_{\omega_n}^{(W)}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где первый член есть коррелятор классических полевых конфигураций (1.36), усреднённый по нулевым модам z_a , а второй член приходит из флуктуаций фазы φ вокруг классического решения φ_W . Как показано в

Приложении А.2, последний член в (1.42) сокращает поправку, приходящую из статсуммы (1.41). Таким образом,

$$-\frac{\Pi(i\omega_n)}{C^2} = \langle \dot{\varphi} \dot{\varphi} \rangle^{(0)} + \sum_{W=\pm 1} \langle \dot{\varphi}_W \dot{\varphi}_W \rangle_{\omega_n}^{(W)}. \quad (1.43)$$

Первый член в правой части ур. (1.43) был вычислен в разделе 1.3.1. Как всегда бывает в инстантонной физике [47], производная $\dot{\varphi}_W(\tau)$ совпадает с нулевой модой флуктуации $\delta\varphi_W(\tau)$. Интересно отметить, что только нулевые моды флуктуаций около инстантонного решения дают вклад в непертурбативную перенормировку поляризационного оператора. Соответствующий вклад выглядит следующим образом (детали вычислений приведены в Приложении А.3):

$$\begin{aligned} \sum_{W=\pm 1} \langle \dot{\varphi}_W \dot{\varphi}_W \rangle_{\omega_n}^{(W)} &= 4g^2 E_c \left(\ln \frac{E_c}{T} - \frac{\pi|\omega_n|}{12T} \right) \\ &\times e^{-g/2} \cos 2\pi q + \mathcal{O}(\omega_n^2). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Из ур. (1.34) и (1.44) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Pi(i\omega_n)}{C^2} &= -\frac{2g^2}{C} e^{-g/2} \ln \frac{E_c}{T} \cos 2\pi q \\ &- 2\pi|\omega_n| \left(\frac{1}{g(T)} - Dg e^{-g(T)/2} \cos 2\pi q \right) \\ &+ \mathcal{O}(\omega_n^2), \end{aligned} \quad (1.45)$$

где константа $D = (\pi^2/3) \exp(-\gamma - 1)$.

Средний заряд на островке может быть выражен через статсумму следующим образом:

$$Q = q + \frac{T}{2E_c} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial q}. \quad (1.46)$$

Используя ур. (1.41), мы находим следующую зависимость среднего заряда от температуры и затворного напряжения в одно-инстантонном приближении:

$$Q = q - \frac{g^2}{\pi} e^{-g/2} \ln \frac{E_c}{T} \sin 2\pi q. \quad (1.47)$$

Выполняя стандартное аналитическое продолжение в ур. (1.45), мы получаем запаздывающий поляризационный оператор $\Pi^R(\Omega)$ в форме ур. (1.17) с $\pi_0(T)$ удовлетворяющей ур. (1.20) и

$$\pi_1(T) = 2\pi C^2 \left(\frac{1}{g(T)} - Dg e^{-g(T)/2} \cos 2\pi q \right). \quad (1.48)$$

Наконец, средняя скорость диссипации энергии дается ур. (1.18) с функцией

$$\mathcal{A}(T) = \frac{2\pi C_g^2}{g(T)} \left(1 - Dg^2(T) e^{-g(T)/2} \cos 2\pi q \right). \quad (1.49)$$

При выводе этого результата мы заменили g на $g(T)$ в множителе перед экспонентой в правой части ур. (1.48). Это допустимо с точностью, с которой мы работаем. Результат (1.49) требует интерпретации. Как и ожидалось, кулоновская блокада проявляет себя в периодической зависимости диссипации $\mathcal{A}(T)$ от затворного заряда q . Если мы припишем эту зависимость только квантовому сопротивлению, т.е., мы напишем $\mathcal{A}(T) = C_g^2 \tilde{R}_q(T)$ с $\tilde{R}_q(T)$, следующему из ур. (1.49), мы сталкиваемся с парадоксом. Кулоновская блокада подавляет туннелирование электронов между островком и берегом больше для целых значений q , чем для полуцелых. Таким образом, было бы естественно ожидать, что $\tilde{R}_q(T)$ меньше для полуцелых значений q , чем для целых. Однако, (1.49) приводит к обратному результату для $\tilde{R}_q(T)$. Упомянутый парадокс предполагает, что нам придется придумать какую-то температурную перенормировку для затворной емкости C_g .

1.3.4 Физические наблюдаемые и перенормировка затворной емкости

Как показано в работе [37], правильные физические наблюдаемые в задаче о кулоновской блокаде:

$$\begin{aligned} g'(T) &= 4\pi \operatorname{Im} \left. \frac{\partial K^R(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}, \\ q'(T) &= Q + \operatorname{Re} \left. \frac{\partial K^R(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где средний заряд Q описывается ур. (1.46). Запаздывающая корреляционная функция $K^R(\omega)$ получена из мацубаровского коррелятора

$$K(\tau_{12}) = -\frac{g}{4} \alpha(\tau_{12}) \langle e^{i[\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)]} \rangle \quad (1.51)$$

стандартным аналитически продолжением. Физические наблюдаемые $g'(T)$ и $q'(T)$ описывают отклик системы на изменение граничных условий (1.26). Одно-инстантонный вклад в физические наблюдаемые g' и q' раскрывает их периодическую зависимость от внешнего заряда q в виде [37, 49]:

$$\begin{aligned} g'(T) &= g(T) \left(1 - Dg(T)e^{-g(T)/2} \cos 2\pi q \right), \\ q'(T) &= q - \frac{D}{4\pi} g^2(T) e^{-g(T)/2} \sin 2\pi q. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Необходимо сделать несколько замечаний о физическом смысле этих величин. В пертурбативном режиме $g'(T)$ совпадает с перенормированной константой связи $g(T)$, в то время как $q'(T)$ не претерпевает никакой перенормировки и совпадает с наведённым затвором зарядом: $q'(T) = q$. Таким образом, можно думать о них как о физических наблюдаемых, отвечающих параметрам действия g и q . Физика, скрывающаяся за величинами (1.50), становится более понятной, если рассмотреть одно-электронный транзистор (см. Рис. 1.2) вместо ОЭК. В отсутствие постоянного напряжения между левым и правым берегами ОЭТ описывается тем же действием АЭШ (1.23)-(1.27), в котором $g = g_l + g_r$. Здесь $g_{l/r}$

обозначает безразмерные кондактансы левого/правого туннельного контакта. Величина $g'(T)$ тогда совпадает с кондактансом ОЭТ [38, 48] с точностью до постоянного множителя:

$$G(T) = \frac{e^2}{h} \frac{g_l g_r}{(g_l + g_r)^2} g'(T). \quad (1.53)$$

Выражение для $q'(T)$ можно записать через антисимметричный коррелятор тока: [37, 49]

$$q'(T) = Q - i \frac{(g_l + g_r)^2}{2g_l g_r} \frac{\partial}{\partial V_{dc}} \int_{-\infty}^0 \langle [\hat{I}(0), \hat{I}(t)] \rangle \Big|_{V_{dc}=0}, \quad (1.54)$$

где V_{dc} обозначает постоянное напряжение между левым и правым берегом и $\hat{I}(t) = d\hat{n}_d(t)/dt$ - оператор тока в ОЭТ.

По причинам, которые станут ясны ниже, естественно определить перенормированную емкость следующим образом:

$$C_g = \frac{\partial q'(T)}{\partial U_0}. \quad (1.55)$$

Согласно ур. (1.50) величина C_g отличается от эффективной емкости $\partial Q/\partial U_0$, которая прежде рассматривалась в литературе. На пертурбативном уровне C_g совпадает с C_g , и только инстантонные эффекты делают ее зависящей от температуры и напряжения на затворе:

$$C_g = C_g \left(1 - \frac{D}{2} g^2(T) e^{-g(T)/2} \cos 2\pi q \right). \quad (1.56)$$

Теперь, мы подставляем емкость C_g , выраженную через C_g , в ур. (1.49). Тогда инстантонные поправки сокращают друг друга и результат (1.49) для функции \mathcal{A} , которая определяет диссипацию, приобретает следующую форму:

$$\mathcal{A}(T) = \frac{2\pi C_g^2}{g(T)}. \quad (1.57)$$

С той же точностью мы можем заменить $g'(T)$ на $g(T)$ и получить окончательное выражение для скорости диссипации и адмиттанса в

квазистатическом режиме

$$\mathcal{W}_\Omega = \frac{1}{2}\Omega^2 C_g^2(T) \mathcal{R}_q |U_\Omega|^2, \quad \mathcal{R}_q = \frac{h}{e^2 g'(T)}, \quad (1.58)$$

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i\Omega \frac{\partial Q}{\partial U_0} + \frac{C}{C_g} C_g^2 \mathcal{R}_q \Omega^2. \quad (1.59)$$

Необходимо сделать несколько замечаний. Результаты (1.58) и (1.59) справедливы только в режиме слабой связи: $g'(T) \gg 1$, в котором величины $\partial Q/\partial U_0$, $g'(T)$ and C_g даются ур (1.47), (1.52) и (1.56) соответственно. Соотношения (1.58) и (1.59) дают полное описание квазистационарной динамики ОЭК. Скорость диссипации энергии факторизуется в произведение хорошо определённых физических наблюдаемых в полной аналогии с классическим выражением (1.1). Поведение адмиттанса отличается от того, которое мы ожидали увидеть. В самом деле, его мнимая и действительная части содержат две различные емкости: эффективную емкость $\partial Q/\partial U_0$ и перенормированную затворную емкость C_g . Более того, независимый от температуры множитель C/C_g выживает в действительной части $\mathcal{G}(\Omega)$.

1.4 Режим сильной связи, $g \ll 1$

Как следует из ур. (1.50), физические наблюдаемые $g'(T)$ и $q'(T)$ определены для произвольных значений g . Таким образом, расчёт скорости диссипации энергии и адмиттанса ОЭК в противоположном пределе малого безразмерного кондактанса $g \ll 1$ представляет значительный интерес. Вопрос, которым мы задаёмся, можно сформулировать так: остаются ли справедливыми результаты (1.58) и (1.59) с надлежащим образом выбранными C_g и \mathcal{R}_q ? Напомним в связи с этим, что случай $g \ll 1$ соответствует пределу сильной связи действия АЭШ с теоретико-полевой точки зрения. В дальнейшем, мы проведем расчёт скорости диссипации энергии двумя способами. Первый – это точный квантово-полевой расчёт, основанный на использовании проективного гамильтониана. [27] Второй –

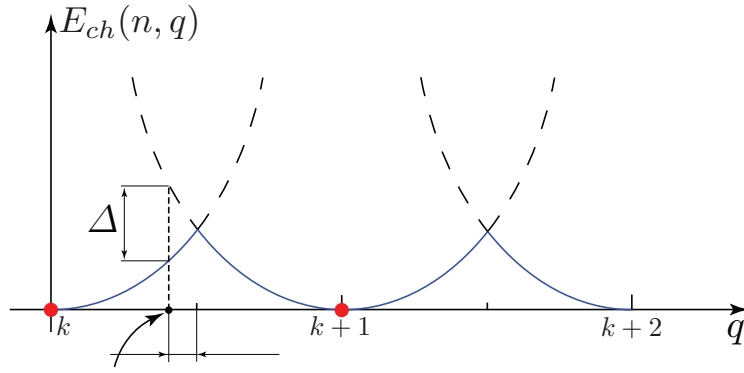


Рис. 1.3: Зарядовая энергия системы как функция наведенного затворного заряда q . n – заряд островка.

более грубый подход кинетического уравнения, на котором основана вся ортодоксальная теория кулоновской блокады. [50] Мы продемонстрируем в дальнейшем, как эти два подхода прекрасно дополняют друг друга.

1.4.1 Предварительные замечания

Мы сосредоточим наши усилия вокруг наиболее интересного случая: окрестность точки вырождения $q = k + 1/2$, где k целое (см. Рис. 1.3). Следуя работе [27], гамильтониан (1.3)-(1.6) может быть упрощен, если редуцировать гильбертово пространство электронных состояний островка, ограничь двумя зарядовыми состояниями: с $Q = k$ и $Q = k + 1$. Спроектированный гамильтониан тогда принимает форму матрицы 2×2 , действующей в пространстве этих состояний. Обозначив отклонения внешнего заряда от точки вырождения Δ : $q = k + 1/2 - \Delta/(2E_c)$, напомним спроектированный гамильтониан в следующей форме: [27]:

$$H = H_0 + H_t + \Delta S_z + \frac{\Delta^2}{4E_c} + \frac{E_c}{4}, \quad (1.60)$$

где H_0 даётся ур. (1.4) и

$$H_t = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha S^+ + \text{h.c.} \quad (1.61)$$

Здесь S^z , $S^\pm = S^x \pm iS^y$ обычные операторы (изо)спиновая $1/2$.

Присутствие малой переменной компоненты в напряжении на затворе меняет параметр Δ согласно: $\Delta \rightarrow \Delta - (eC_g/C)U_\Omega \cos \Omega t$. На этот раз, отклик системы на переменное напряжение определяется изоспиновой корреляционной функцией $\Pi_s^R(\Omega)$ (см. Приложение А.1), мацубаровское представление которой описывается выражением

$$\Pi_s(\tau) = \langle \mathcal{T}_\tau S^z(\tau) S^z(0) \rangle. \quad (1.62)$$

Скорость диссипации энергии и адмиттанс ОЭК могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\Omega &= \frac{C_g^2}{2C^2} \Omega \text{Im} \Pi_s^R(\Omega) |U_\Omega|^2, \\ \mathcal{G}(\Omega) &= -i\Omega \frac{C_g}{C} \Pi_s^R(\Omega). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Для описания спиновых операторов очень удобной представляется псевдо-фермионная техника Абрикосова [51]. Мы вводим двух-компонентные псевдо-фермионные операторы $\psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha$, так что

$$S^i = \psi_\alpha^\dagger S_{\alpha\beta}^i \psi_\beta. \quad (1.64)$$

Псевдо-фермионы вводят лишние нефизические состояния в случае, когда $\sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha > 1$. Чтобы исключить их, в гамильтониан необходимо ввести дополнительный химический потенциал η . Затем нужно устремить $\eta \rightarrow -\infty$ в конце любого вычисления. Физическая статсумма \mathcal{Z} и корреляторы $\langle \mathcal{O} \rangle$ могут быть найдены из псевдо-фермионных по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial e^{\beta\eta}} \mathcal{Z}_{pf}, \\ \langle \mathcal{O} \rangle &= \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \left\{ \langle \mathcal{O} \rangle_{pf} + \frac{\mathcal{Z}_{pf}}{\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial e^{\beta\eta}} \langle \mathcal{O} \rangle_{pf} \right\}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Элегантность псевдо-фермионной техники основана на том, что диаграммы, содержащие псевдо-фермионные петли, всегда выпадают, когда мы устремляем $\eta \rightarrow -\infty$.

Далее, подставляя представление (2.49) в гамильтониан (3.3), переходим в мацубаровский базис и интегрируем по фермионам берега и островка. Прделав это в параметрическом режиме (1.11), мы немедленно воспроизводим действие:

$$\begin{aligned}
S = & \int_0^\beta d\tau \bar{\psi} \left(\partial_\tau + \frac{\sigma_z \Delta}{2} - \eta \right) \psi \\
& + \frac{g}{4} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \alpha(\tau_{12}) [\bar{\psi}(\tau_1) \sigma_- \psi(\tau_1)] [\bar{\psi}(\tau_2) \sigma_+ \psi(\tau_2)] \\
& + \frac{\beta \Delta^2}{4E_c} + \frac{\beta E_c}{4}.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Здесь σ_i обозначают матрицы Паули и $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$. Сходное с (1.66) действие было впервые исследовано в работе Ларкина и Мельникова [52]. В современной терминологии ур. (1.66) соответствует XY случаю модели Бозе-Кондо для спина 1/2. [53, 54, 55] Эффективное действие (1.66) очень удобно для наших целей, так как его константа связи мала $g \ll 1$, оправдывая, тем самым, пертурбативные разложения.

На первом шаге установим соотношение между псевдо-фермионной и физической статсуммой. Из ур. (2.52) находим

$$\mathcal{Z} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{Z}_{pf} e^{-\beta \eta} \sum_\sigma G_\sigma(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow 0^-} \tag{1.67}$$

Здесь мы обозначили $G_\sigma(\tau) = -\langle \mathcal{T}_\tau \psi_\sigma(\tau) \bar{\psi}_\sigma(0) \rangle$ точную псевдо-фермионную функцию Грина. Фейнмановские правила для действия (1.66) приведены на Рис. 1.4. В нулевом порядке по g мы получаем

$$G_\sigma(i\varepsilon_n) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_\sigma}, \quad \mathcal{Z} = 2 \cosh \frac{\beta \Delta}{2}, \quad \mathcal{Z}_{pf} = 1, \tag{1.68}$$

где $\varepsilon_n = \pi T(2n+1)$ and $\xi_\sigma = -\eta + \sigma \Delta/2$. Спиновая корреляционная функция (1.62), записанная в терминах псевдо-фермионов, приобретает вид

$$\Pi_{s,pf}(\tau) = \frac{1}{4} \langle \mathcal{T}_\tau [\bar{\psi}(\tau) \sigma^z \psi(\tau)] [\bar{\psi}(0) \sigma^z \psi(0)] \rangle, \tag{1.69}$$

где среднее взято с действием (1.66). Физическая корреляционная функция получается из $\Pi_{s,pf}(i\omega_n)$ посредством ур. (2.52).

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \omega_n \\ \longrightarrow \\ \sigma \end{array} = \frac{1}{i\omega_n - \xi_\sigma} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow -\sigma \\ \omega_n \\ \searrow \sigma \end{array} \\ \begin{array}{c} \nearrow \sigma \\ \omega_n \\ \searrow -\sigma \end{array} \end{array} = -\frac{g|\omega_n|}{4\pi}
\end{array} \quad (1.70)$$

Рис. 1.4: Фейнмановские правила для псевдо-фермионного действия; $\xi_\sigma = -\eta + \frac{\sigma\Delta}{2}$.

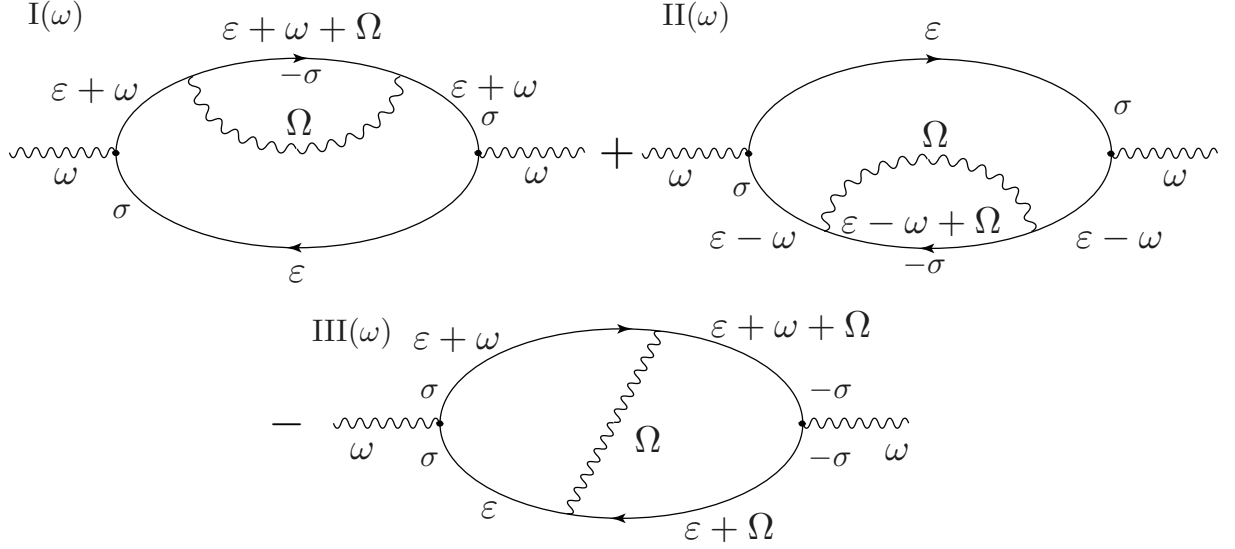


Рис. 1.5: Фейнмановские диаграммы, определяющие поляризационный оператор в наинизшем порядке.

1.4.2 Спиновая корреляционная функция $\Pi_{s,pf}^R(\omega)$. Первый порядок по g

Мы начинаем анализ с расчёта поляризационного оператора (1.69) в наинизшем порядке теории возмущений. Оказывается, что первые нетривиальные вклады в $\Pi_{s,pf}(i\omega_n)$ приходят из первого порядка теории возмущений. Соответствующие фейнмановские диаграммы показаны на Рис. 1.5. Расчёт $\Pi_{s,pf}(i\omega_n)$ приведен в приложении. Результат следующий:

$$\Pi_{s,pf}(i\omega_n) = \frac{g}{4\pi^2} \frac{F^R(i\omega_n) + F^R(-i\omega_n)}{(i\omega_n)^2} e^{\beta\eta} \sinh \frac{\beta\Delta}{2}, \quad (1.71)$$

где $F^R(\omega)$ регулярная в верхней полуплоскости ω функция:

$$F^R(\omega) = \sum_{\sigma=\pm 1} \left[(\Delta + \sigma\omega) \psi\left(\frac{\omega + \sigma\Delta}{2\pi T i}\right) - \Delta \psi\left(\frac{i\sigma\Delta}{2\pi T}\right) \right]. \quad (1.72)$$

Здесь $\psi(x)$ обозначает логарифмическую производную Γ -функции Эйлера. Аналитическое продолжение необходимо делать с осторожностью. Мы хотим получить запаздывающий поляризационный оператор $\Pi_s^R(\omega)$, регулярный в верхней полуплоскости ω . Так как $\psi(x)$ имеет полюсы $x_n = -n$ при натуральных n , оператор (1.71) имеет полюсы в обеих половинах комплексной плоскости. Чтобы избавиться от лишних полюсов, воспользуемся следующим тождеством:

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot \pi z. \quad (1.73)$$

Используя хорошо известное соотношение для действительных x

$$\operatorname{Im} \psi(ix) = \frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2} \coth \pi x \quad (1.74)$$

вместе с ур. (2.52) и (1.68), мы находим следующее выражение для мнимой части поляризационного оператора:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Pi_s^R(\omega) &= \frac{g}{8\pi} \left\{ \frac{\Delta}{\omega^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \coth \frac{\Delta - \sigma\omega}{2T} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega} \left[2 \coth \frac{\Delta}{2T} - \sum_{\sigma=\pm 1} \coth \frac{\Delta - \sigma\omega}{2T} \right] \right\} \tanh \frac{\Delta}{2T}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Выражение (1.75) содержит поразительную особенность. Оно расходится в пределе $\omega \rightarrow 0$. В самом деле,

$$\operatorname{Im} \Pi_s^R(\omega) = \frac{g}{4\pi\omega} \frac{\beta\Delta}{\sinh \beta\Delta}, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (1.76)$$

Объяснение состоит в следующем. По существу, коррелятор (1.62) описывает шум флуктуирующего заряда внутри металлического островка. Впервые он был рассчитан в работе [56]. Автор [56], однако, получил отличающийся (регулярный при $\omega \rightarrow 0$) результат. Он использовал

специальный тип аналитического продолжения, который привел его к симметричному шуму $\langle \{\hat{n}_d(t), \hat{n}_d(0)\} \rangle$. Мы, с другой стороны, заинтересованы в антисимметричной части, которая и является функцией отклика (1.16). Именно эта запаздывающая анти-симметричная функция возникает при стандартном аналитическом продолжении.

Нефизическая расходимость (1.76) происходит из нетривиальной и, по существу, непertурбативной инфракрасной структуры поляризационного оператора $\Pi_s^R(\omega)$. В последующем мы докажем, что частичное пересуммирование определённых классов диаграмм разрешает данную сингулярность, приводя к результату:

$$\text{Im } \Pi_s^R(\omega) \sim \frac{g\omega}{z^2 + \omega^2}, \quad (1.77)$$

где $z \sim g\Delta$ при $T = 0$. Как видно из ур. (1.77), пределы $\omega \rightarrow 0$ и $g \rightarrow 0$ не коммутируют, что и объясняет возникновение искусственной расходимости в ур. (1.76). Теперь мы переходим к более аккуратному вычислению коррелятора $\Pi_s^R(\omega)$.

1.4.3 Одно-петлевая структура псевдо-фермионной теории

Во всех дальнейших вычислениях нам понадобится некоторое знание одно-петлевой логарифмической структуры псевдо-фермионной теории. Голая гриновская функция изменяется за счёт собственно-энергетической части:

$$G_\sigma(i\varepsilon_n) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_\sigma - \Sigma_\sigma(i\varepsilon_n)}. \quad (1.78)$$

Главное логарифмическое приближение соответствует одно-петлевой перенормировке. Как известно [52], собственно-энергетическая часть $\Sigma_\sigma(i\varepsilon_n)$ может быть извлечена из самосогласованного уравнения Дайсона:

$$\Sigma_\sigma(i\varepsilon_n) = -\frac{g}{4\pi} T \sum_{\omega_m} |\omega_m| G_{-\sigma}(i\varepsilon_n + i\omega_m). \quad (1.79)$$

Здесь мы ввели $\omega_m = 2\pi T m$. Решающее наблюдение [52, 54, 55] состоит в том, что действие (1.66) может быть перенормировано единственным масштабным параметром Z . Выполняя стандартное аналитическое продолжение, мы находим [52, 49]

$$G_\sigma^{R,A}(\varepsilon) = \frac{Z(\lambda)}{\varepsilon - \bar{\xi}_\sigma \pm i\bar{g}\Gamma_\sigma(\varepsilon)}, \quad (1.80)$$

$$Z(\lambda) = \left(1 + \frac{g}{2\pi^2}\lambda\right)^{-1/2}, \quad \lambda = \ln \frac{E_c}{\max\{T, |\bar{\Delta}|, |\varepsilon|\}}.$$

Здесь $\bar{\xi}_\sigma = -\eta + \sigma\bar{\Delta}/2$, $\bar{g} = gZ^2(\lambda)$ и $\bar{\Delta} = \Delta Z^2(\lambda)$ – соответственно перенормированные константа связи и щель. Как видим, энергия E_c выполняет роль точки перенормировки. Важная особенность гриновской функции (2.69) состоит в том, что она приобрела ширину

$$\Gamma_\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - \bar{\xi}_{-\sigma}) \frac{\cosh \frac{\varepsilon}{2T}}{\sinh \frac{\varepsilon - \bar{\xi}_{-\sigma}}{2T} \cosh \frac{\bar{\xi}_{-\sigma}}{2T}}. \quad (1.81)$$

Иерархия энергетических масштабов, рассматриваемых в работе ($E_c \gg T$) такова, что логарифмические поправки $\sim g \ln E_c/T$ не малы и требуют отдельного внимания. Чтобы избавиться от больших логарифмов мы изменяем точку перенормировки полевой теории: (1.66) с E_c на T . С помощью результата (2.69) мы можем переписать теорию в терминах перенормированных полей и бегущих констант связи: $\psi_\sigma \rightarrow \sqrt{Z(\lambda)}\psi_\sigma^r$, $g \rightarrow \bar{g}$ и $\Delta \rightarrow \bar{\Delta}$. Действие приобретает вид

$$S[\bar{\psi}, \psi, \Delta, g] = S[\bar{\psi}^r, \psi^r, \bar{\Delta}, \bar{g}] + \delta S_{c.t.}, \quad (1.82)$$

где $\delta S_{c.t.}$ обозначает контрчленное действие. Оно ответственно за самосогласованную регуляризацию поправок более высокого (по \bar{g}) порядка к физическим наблюдаемым теории. Действие (1.82) очень удобно для наших дальнейших целей. Все большие логарифмы поглощены в переопределённые константы связи и фермионные поля. Это позволяет нам опустить контрчлены в дальнейшем. Чтобы связать наблюдаемые, определённые на

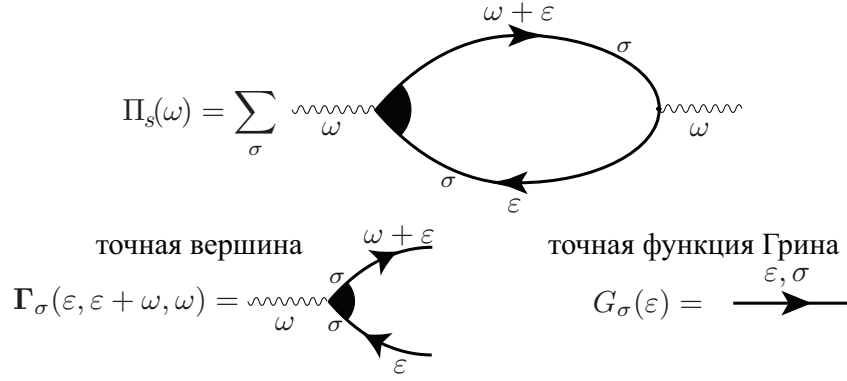


Рис. 1.6: Уравнение Дайсона для поляризационного оператора $\Pi_{s,pf}(i\omega_n)$.

масштабе E_c , с перенормированными, нам необходимо установить скейлинг псевдо-фермионной плотности $\rho_{pf} = \sum_{\sigma} \langle \bar{\psi}_{\sigma} \psi_{\sigma} \rangle$ и z -компоненты полной спиновой плотности $S_{pf}^z = (1/2) \sum_{\sigma} \sigma \langle \bar{\psi}_{\sigma} \psi_{\sigma} \rangle$. Как следует из работы [52], псевдо-фермионная плотность ρ не имеет своей скейлинговой размерности:

$$\rho_{pf} = \sum_{\sigma} \langle \bar{\psi}_{\sigma}^r \psi_{\sigma}^r \rangle, \quad (1.83)$$

где усреднение проведено с действием (1.82). Полная спиновая плотность S_z имеет ту же структуру что и слагаемое, пропорциональное Δ в действии (1.66). Таким образом, она должна обладать и той же скейлинговой размерностью:

$$S_{pf}^z = \frac{1}{2} Z^2(\lambda) \sum_{\sigma} \sigma \langle \bar{\psi}_{\sigma}^r \psi_{\sigma}^r \rangle, \quad (1.84)$$

где среднее рассчитано с действием (1.82). Строгое доказательство ур. (1.84) при помощи уравнения Каллана-Симанчика (КС) представлено в Приложении А.4.

1.4.4 Уравнение Дайсона для спиновой корреляционной функции

$$\Pi_{s,pf}^R(\omega)$$

Графическое представление уравнения Дайсона для спиновой корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \Pi_{s,pf}(i\omega_n) &= \frac{T}{4} \sum_{\varepsilon_k, \sigma} \Gamma_{\sigma}(i\varepsilon_k, i\varepsilon_k + i\omega_n, i\omega_n) \\ &\times G_{\sigma}(i\varepsilon_k) G_{\sigma}(i\varepsilon_k + i\omega_n) \end{aligned} \quad (1.85)$$

изображено на Рис. 1.6. Здесь $\Gamma_{\sigma}(i\varepsilon_k, i\varepsilon_k + i\omega_n, i\omega_n)$ обозначает точную вершинную функцию. Выполняя аналитическое продолжение в духе [57], мы находим (см. детали вычислений в Приложении А.4):

$$\begin{aligned} \Pi_{s,pf}^R(\omega) &= - \sum_{\sigma} \int \frac{d\varepsilon}{16\pi i} \left\{ \Gamma_{\sigma}^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega) G_{\sigma}^A(\varepsilon) G_{\sigma}^R(\varepsilon + \omega) \right. \\ &\quad \times \left[\tanh \frac{\varepsilon + \omega}{2T} - \tanh \frac{\varepsilon}{2T} \right] \\ &\quad + \Gamma_{\sigma}^{RRR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega) G_{\sigma}^R(\varepsilon) G_{\sigma}^R(\varepsilon + \omega) \tanh \frac{\varepsilon}{2T} \\ &\quad \left. - \Gamma_{\sigma}^{AAR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega) G_{\sigma}^A(\varepsilon) G_{\sigma}^A(\varepsilon + \omega) \tanh \frac{\varepsilon + \omega}{2T} \right\}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Наиболее важная задача состоит в том, чтобы вычленил сингулярные при $\omega \rightarrow 0$ и $\bar{g} \rightarrow 0$ вклады в (1.86). Чтобы избежать расходимостей, необходимо рассмотреть их отдельно. Сначала вспомним, что нас интересует квазистационарный режим. Таким образом, мы предполагаем в дальнейшем, что $\omega \ll \max\{|\bar{\Delta}|, T\}$, но $\omega \sim \bar{g} \max\{|\bar{\Delta}|, T\}$. Интуитивно ясно, что сингулярный вклад всегда приходит из первого слагаемого в правой части ур. (1.86), включающего произведение $G_{\sigma}^A G_{\sigma}^R$. В самом деле, мы замечаем, что в результате интегрирования, структура полюсов произведения $G_{\sigma}^A G_{\sigma}^R$ всегда приводит к сингулярному знаменателю типа $(\omega + 2i\bar{g}\Gamma_{\sigma})$. Это происходит из-за близости полюсов в G_{σ}^R и G_{σ}^A . В противоположность этому другие слагаемые, содержащие произведения $G_{\sigma}^R G_{\sigma}^R$ и $G_{\sigma}^A G_{\sigma}^A$, регулярны

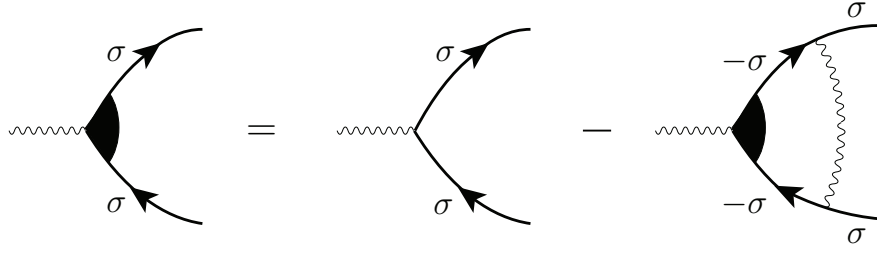


Рис. 1.7: Уравнение Дайсона для вершины Γ_σ .

при $\bar{g} = \omega = 0$ и, таким образом, свободны от расходимостей. Мы можем рассчитать их, полагая $\bar{g} = 0$ и разлагая результат в ряд по ω . Подынтегральное выражение в ур. (1.86) также содержит ряд мацубаровских полюсов, обусловленных присутствием гиперболических функций. Эти полюса приводят к логарифмически-расходящимся суммам. Последние контролируются схемой перенормировки. В нашем случае все лидирующие логарифмы отсутствуют. Они уже поглощены в переопределенные константы \bar{g} и $\bar{\Delta}$ удобным выбором точки перенормировки. Таким образом, мы можем опустить все формально расходящиеся мацубаровские суммы.

Выполняя интегрирование по ε в ур. (1.86) и разлагая выражения по ω там, где это позволено, мы приходим к гораздо более простой версии выражения для $\Pi_{s,pf}^R(\omega)$:

$$\Pi_{s,pf}^R(\omega) = \sum_{\sigma} \frac{\beta}{16 \cosh^2 \frac{\bar{\xi}_{\sigma}}{2T}} \left\{ 1 - \frac{\omega \Gamma_{\sigma}^{ARR}(\bar{\xi}_{\sigma}, \bar{\xi}_{\sigma} + \omega, \omega)}{\omega + 2i\bar{g}\Gamma_{\sigma}(\bar{\xi}_{\sigma})} \right\}. \quad (1.87)$$

Теперь нам необходимо рассчитать вершинную функцию $\Gamma_{\sigma}^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega)$. Вершинная функция $\Gamma_{\sigma}(i\varepsilon_k, i\varepsilon_k + i\omega_n, i\omega_n)$ удовлетворяет уравнению Дайсона

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma}(i\varepsilon_k, i\varepsilon_k + i\omega_n, i\omega_n) &= 1 + \frac{\bar{g}T}{4\pi} \sum_{\omega_m} |\omega_m| G_{-\sigma}(i\varepsilon_k + i\omega_m) \\ &\times G_{-\sigma}(i\varepsilon_k + i\omega_m + i\omega_n) \Gamma_{-\sigma}(i\varepsilon_k + i\omega_m, i\varepsilon_k + i\omega_m + i\omega_n, i\omega_n), \end{aligned} \quad (1.88)$$

изображенному на Рис. 1.7. Детали аналитического продолжения приведены в Приложении А.4, где доказывается, что уравнение Дайсона для вершинной

функции $\Gamma_{\sigma}^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma}^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega) &= 1 - \frac{\bar{g}}{8\pi} \int \frac{dx}{2\pi} \Gamma_{-\sigma}^{ARR}(x, x + \omega, \omega) \\ &\times G_{-\sigma}^A(x) G_{-\sigma}^R(x + \omega) (x - \varepsilon) \left[2 \coth \frac{x - \varepsilon}{2T} \right. \\ &\quad \left. - \tanh \frac{x + \omega}{2T} - \tanh \frac{x}{2T} \right]. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Чтобы его решить, необходимо сделать какие-то самосогласованные предположения. Очевидная сложность состоит в том, что кроме сингулярного множителя $G_{\sigma}^R G_{\sigma}^A$ подынтегральное выражение в правой части ур. (1.89) может иметь неизвестные полюса, содержащиеся в вершинной функции $\Gamma_{-\sigma}^{ARR}$. Мы предполагаем, что эти полюса приводят к вкладам порядка единицы и малы по сравнению с сингулярным вкладом, обусловленным произведением $G_{\sigma}^R G_{\sigma}^A$. Тогда мы можем вычислить интеграл в правой части ур. (1.89) со следующим результатом

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma}^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega) &= 1 - \frac{\bar{g}}{8\pi} \frac{\bar{\xi}_{-\sigma} - \varepsilon}{\sinh \frac{\bar{\xi}_{-\sigma} - \varepsilon}{2T}} \left\{ \frac{\cosh \frac{\varepsilon}{2T}}{\cosh \frac{\bar{\xi}_{-\sigma}}{2T}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh \frac{\varepsilon + \omega}{2T}}{\cosh \frac{\bar{\xi}_{-\sigma} + \omega}{2T}} \right\} \frac{\Gamma_{-\sigma}^{ARR}(\bar{\xi}_{-\sigma}, \bar{\xi}_{-\sigma} + \omega, \omega)}{-i\omega + 2\bar{g}\Gamma_{-\sigma}(\bar{\xi}_{-\sigma})}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Мы видим, что решение действительно имеет дополнительную серию полюсов на плоскости ε . Однако, это полюсы мацубаровского типа и несущественны, как было показано выше. Полагая внешнюю энергию $\varepsilon = \bar{\xi}_{\sigma}$, мы получаем самосогласованное уравнение $\Gamma_{\sigma}^{ARR}(\bar{\xi}_{\sigma}, \bar{\xi}_{\sigma} + \omega, \omega)$, решение которого:

$$\Gamma_{\sigma}^{ARR}(\bar{\xi}_{\sigma}, \bar{\xi}_{\sigma} + \omega, \omega) = \frac{1}{\omega} \frac{[\omega + 2i\bar{g}(\Gamma_{-\sigma} - \Gamma_{\sigma})][\omega + 2i\bar{g}\Gamma_{\sigma}]}{\omega + 2i\bar{g}(\Gamma_{-\sigma} + \Gamma_{\sigma})}. \quad (1.91)$$

Здесь $\Gamma_{\sigma} = \Gamma_{\sigma}(\bar{\xi}_{\sigma})$ ширина гриновской функции, определенной в ур. (2.73).

Собирая ур. (1.87) и (1.90), мы получаем результат для спиновой корреляционной функции:

$$\Pi_{s,pf}^R(\omega) = \frac{\bar{g}}{4\pi T} \frac{\bar{\Delta}}{\sinh \frac{\bar{\Delta}}{2T}} \left[-i\omega + \frac{\bar{g}\bar{\Delta}}{2\pi} \coth \frac{\bar{\Delta}}{2T} \right]^{-1}. \quad (1.92)$$

Наконец, учитывая ур. (1.67) и (1.68), мы получаем следующий результат для физического спинового коррелятора:

$$\Pi_s^R(\omega) = \frac{\bar{g}Z^4}{4\pi} \frac{\bar{\Delta}}{T \sinh \frac{\bar{\Delta}}{T}} \left[-i\omega + \frac{\bar{g}\bar{\Delta}}{2\pi} \coth \frac{\bar{\Delta}}{2T} \right]^{-1}. \quad (1.93)$$

Здесь мы восстановили фактор Z^4 , который отвечает правильной скейлинговой размерности спиновых полей в соответствии с ур. (1.84).

1.4.5 Адмиттанс и скорость диссипации энергии

С помощью уравнения (1.63) мы получаем адмиттанс ОЭК на частотах $\Omega \ll \max\{|\bar{\Delta}|, T\}$:

$$\mathcal{G}(\Omega) = \frac{C_g \bar{g} Z^4}{C} \frac{\bar{\Delta}}{4\pi T \sinh \frac{\bar{\Delta}}{T}} \frac{-i\Omega}{-i\Omega + \frac{\bar{g}\bar{\Delta}}{2\pi} \coth \frac{\bar{\Delta}}{2T}}. \quad (1.94)$$

Средний заряд Q и физические наблюдаемые $g'(T)$ и $q'(T)$ могут быть найдены из псевдо-фермионной теории (1.66), если подставить поперечную корреляционную функцию

$$K_s(\tau_{12}) = -\frac{g}{4} \alpha(\tau_{12}) \langle S^+(\tau_1) S^-(\tau_2) \rangle \quad (1.95)$$

вместо $K(\tau_{12})$ в ур. (1.50) [37, 49]. В главном логарифмическом приближении средний заряд и физическая наблюдаемая g' вычислены в [58]

$$Q(T) = k + \frac{1}{2} - \frac{Z^2}{2} \tanh \frac{\bar{\Delta}}{2T}, \quad (1.96)$$

$$g'(T) = \frac{\bar{g}}{2} \frac{\bar{\Delta}}{T \sinh \frac{\bar{\Delta}}{T}}. \quad (1.97)$$

Температурная зависимость другой физической наблюдаемой q' вычислена в [49]:

$$q'(T) = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \frac{\bar{\Delta}}{2T}. \quad (1.98)$$

Чтобы получить скорость диссипации, энергии мы разлагаем выражение (1.94) по Ω . Используя тождество $d\bar{\Delta} = -Z^2 dU_0/C$ и ур. (1.96)-(1.98), мы получаем скорость диссипации энергии и адмиттанс в ОЭТ в

квази-стационарном режиме:

$$\mathcal{W}_\Omega = \frac{1}{2}\Omega^2 C_g^2(T) \mathcal{R}_q |U_\Omega|^2, \quad \mathcal{R}_q = \frac{h}{e^2 g'(T)}, \quad (1.99)$$

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i\Omega \frac{\partial Q}{\partial U_0} + \frac{C}{C_g} C_g^2 \mathcal{R}_q \Omega^2. \quad (1.100)$$

Здесь перенормированная затворная емкость и эффективная емкость принимают вид:

$$C_g = \frac{\partial q'}{\partial U_0} = C_g \frac{Z^2}{2} \frac{E_c}{T \cosh^2 \frac{\Delta}{2T}}, \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial U_0} = C_g \frac{Z^4}{2} \frac{E_c}{T \cosh^2 \frac{\Delta}{2T}}. \quad (1.102)$$

Результаты (1.99) и (1.100) верны в режиме сильной связи $g \ll 1$ и возле точки вырождения $|\Delta| \ll E_c$. Точность, с которой мы работаем (главное логарифмическое приближение), позволяет нам сделать следующее ключевое наблюдение. Выражения для скорости диссипации энергии (1.99) и адмиттанса (1.100), выраженные в терминах величин $\partial Q/\partial U_0$, $g'(T)$ и C_g , совпадают с ранее полученными в режиме слабой связи. Это позволяет предположить, что результаты (1.99) и (1.100) справедливы во всем температурном интервале $E_c \gg T \gg \delta \max\{1, g\}$ и для всех значений g .

Отметим, что формула (1.99) для \mathcal{R}_q – это истинно непертурбативный по g результат. Несмотря на очевидные трудности на пути его получения, выражение для $g'(T)$ (без всех логарифмических масштабных множителей) может быть получено в более простом подходе последовательного туннелирования. Этот подход, известный как ‘ортодоксальная теория’ кулоновской блокады поможет разъяснить физический смысл результатов (1.99) и (1.100). Дальнейшие вычисления сформулированы на языке кинетического уравнения [50], лежащего в основании ортодоксальной теории.

1.4.6 Подход кинетического уравнения

Подход кинетического уравнения менее общий, так как, по существу, он основан на использовании золотого правила Ферми. Подход пренебрегает виртуальными процессами и не в состоянии воспроизвести логарифмический скейлинг физических наблюдаемых. С другой стороны, кинетические уравнения проще решать, чем соответствующие уравнения Дайсона, использованные выше в теоретико-полевым подходе. Покажем, как кинетические уравнения позволяют получить адмиттанс для частот, неограниченных условием $\Omega \ll \max\{|\bar{\Delta}|, T\}$ наложенным полевым подходом. В конечном счёте мы придумаем рецепт, который позволит нам обобщить формулу (1.94) на произвольные (но все же не слишком большие $\Omega \ll E_c$) частоты.

Как и выше будем учитывать только два зарядовых состояния. Обозначим их так: состояние 0 соответствует среднему заряду $Q = k$ и состояние 1 – среднему заряду $Q = k + 1$. Вероятности каждого из этих состояний обозначим p_0 и p_1 . Они удовлетворяют соотношению $p_0 + p_1 = 1$. Кинетическое уравнение имеет стандартную форму [50]:

$$\dot{p}_0 = -\Gamma_{10}p_0 + \Gamma_{01}p_1. \quad (1.103)$$

Здесь Γ_{01} и Γ_{10} туннельные скорости переходов соответственно *из* и *в* металлический островок. Полезно помнить, что туннельные скорости $\Gamma_{01/10}$ пропорциональны безразмерному кондактансу туннельного соединения g , являющимся параметром разложения в нашей задаче. Средний ток через контакт: $I = -\dot{p}_0$. Так как нас интересует линейный отклик тока на переменное затворное напряжение $U(t) = U_0 + U_\Omega \cos \omega t$, мы разлагаем туннельные скорости до первого порядка по амплитуде U_Ω :

$$\Gamma_{01/10}(t) = \Gamma_{01/10}^0 + \frac{C_g U_\Omega}{2C} \left[\gamma_{01/10}(\Omega) e^{-i\Omega t} + \gamma_{01/10}(-\Omega) e^{i\Omega t} \right]. \quad (1.104)$$

Тогда легко найти следующее соотношение для адмиттанса:

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i\Omega \frac{C_g}{C} \frac{\gamma_{10}(\Omega)\Gamma_{01}^0 - \gamma_{01}(\Omega)\Gamma_{10}^0}{(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{10}^0)(-i\Omega + \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{10}^0)}. \quad (1.105)$$

Равновесные туннельные скорости перехода хорошо известны [50]:

$$\Gamma_{01/10}^0 = \frac{g\Delta}{4\pi} \left(\coth \frac{\Delta}{2T} \pm 1 \right). \quad (1.106)$$

Напомним, что с точностью до логарифмических поправок $\Gamma_{01/10}^0 = 2g\Gamma_{\pm}$. Прямое вычисление туннельных скоростей перехода даёт см. Приложение А.5

$$\gamma_{01/10}(\omega) = \mp \frac{g}{4\pi} \left[1 \pm \frac{i}{\pi\omega} F^R(\omega) \right], \quad (1.107)$$

где функция $F^R(\omega)$ была введена нами ранее в уравнении (1.72). Подставляя ур. (1.106)-(1.107) в ур. (1.105) мы приходим к общему выражению для адмиттанса:

$$\mathcal{G}(\Omega) = \frac{C_g}{C} \frac{g}{4\pi \coth \frac{\beta\Delta}{2}} \frac{-i\Omega \coth \frac{\Delta}{2T} - \frac{1}{\pi} F^R(\Omega)}{-i\Omega + \frac{g\Delta}{2\pi} \coth \frac{\Delta}{2T}}. \quad (1.108)$$

Чтобы связать полученный результат с теоретико-полевым (1.94), мы разлагаем функцию $F^R(\omega)$ до первого порядка по ω включительно:

$$F^R(\Omega) = i\pi\omega \left(\frac{\Delta}{2T \sinh^2 \frac{\Delta}{2T}} - \coth \frac{\Delta}{2T} \right) + \mathcal{O}(\Omega^2). \quad (1.109)$$

Подставляя это в (1.105), мы получаем знакомое выражение:

$$\mathcal{G}(\Omega) = \frac{C_g}{C} \frac{g}{4\pi \sinh \beta\Delta} \frac{\beta\Delta}{-i\Omega + \frac{g\Delta}{2\pi} \coth \frac{\Delta}{2T}}, \quad (1.110)$$

верное при $\Omega \ll \max\{|\Delta|, T\}$, и которое практически повторяет результат (1.94) для адмиттанса. Единственная разница состоит в скейлинговом множителе Z , отсутствующем в подходе кинетического уравнения. Теперь мы можем легко угадать рецепт, как обобщить уравнение ур. (1.94) на произвольные Ω . Правильно определённый наблюдаемый адмиттанс обязан масштабироваться как Z^4 . Он так же должен быть выражен

в терминах только перенормированных параметров \bar{g} и $\bar{\Delta}$. Это приводит нас к следующему результату

$$\mathcal{G}(\Omega) = \frac{C_g}{C} \frac{\bar{g}Z^4}{4\pi \coth \frac{\bar{\Delta}}{2T}} \frac{-i\Omega \coth \frac{\bar{\Delta}}{2T} + \frac{1}{\pi} \bar{F}^R(\Omega)}{-i\Omega + \frac{\bar{g}\bar{\Delta}}{2\pi} \coth \frac{\bar{\Delta}}{2T}}, \quad (1.111)$$

который, как мы полагаем, описывает адмиттанс для всех $\Omega \ll E_c$ в режиме сильной связи $g \ll 1$. Здесь функция $\bar{F}^R(\Omega)$ дается $F^R(\Omega)$, в которой $\bar{\Delta}$ подставлена вместо Δ . Наконец, напомним, что на конечной частоте Ω параметр λ , который входит в масштабный множитель Z в ур. (2.69) должен быть изменен в соответствии с:

$$\lambda = \ln \frac{E_c}{\max\{T, |\Delta|, |\Omega|\}}. \quad (1.112)$$

1.5 Обсуждение и выводы

Как мы продемонстрировали в предыдущих главах, скорость диссипации энергии \mathcal{W}_Ω даётся ур. (1.2) с $\mathcal{R}_q = h/e^2 g'(T)$ и $C_g = \partial q'(T)/\partial U_0$ в режимах слабой и сильной связи. Подчеркнём, что физические наблюдаемые g' и q' определены в терминах корреляционной функции фазового поля $\varphi(\tau)$ модели АЭШ (см ур. (1.50)). Таким образом, они могут быть найдены, хотя бы в принципе, не только в предельных режимах сильной и слабой связи, но для произвольных значений g и q . Следовательно, естественно предположить, что ур. (1.2) так же, как и ур. (1.59), остаются верными в общем случае для ОЭК при условиях, совпадающих с условиями применимости модели АЭШ, которые есть: $E_{\text{Th}} \gtrsim E_c \gg T \gg \delta \max\{1, g\}$ и $g_{ch} \ll 1$, $N_{ch} \gg 1$.

Изначально, физическая величина $q'(T)$ [37] была введена для ОЭТ, и её физический смысл был интерпретирован в терминах среднего заряда на островке и антисимметричной корреляционной функции тока (см. ур. (1.54)). Если мы введем несимметризованный токовый коррелятор шума ОЭТ [59, 60]

$$S_I(\omega, V_{dc}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \hat{I}(t) \hat{I}(0) \rangle, \quad (1.113)$$

тогда мы можем представить ур. (1.54) как

$$q' = Q + \frac{(g_l + g_r)^2}{2\pi g_l g_r} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\partial S_I(\omega, V_{dc})}{\partial V_{dc}} \Big|_{V_{dc}=0}. \quad (1.114)$$

Таким образом, для измерения $q'(T)$ необходимо поставить два отдельных эксперимента: измерение среднего заряда на островке при $V_{dc} = 0$ и измерение несимметризованного токового шума $S_I(\omega, V_{dc})$. Хотя экспериментальные схемы, способные измерять несимметричный шум, уже предлагались [61], и измерения недавно были проведены на нескольких электронных квантовых приборах [62], все же обсуждаемые здесь измерение пока остаётся трудной проблемой. Представленные нами результаты указывают, что величина q' связана с перенормированной затворной емкостью C_g . А именно: $C_g = \partial q' / \partial U_0$ при условии, что результат (1.2) справедлив в общем случае (не только в режимах сильной и слабой связи). Обсуждаемая емкость может быть извлечена из измерения скорости диссипации энергии и кондактанса ОЭК.

Недавно скорость диссипации энергии ОЭК была измерена экспериментально посредством радиочастотной рефлектометрии (суть метода состоит в том, что прибор непрерывно облучается радио частотным сигналом). [18] Была изучена зависимость величины $[\Omega^2 \mathcal{A}(T)]^{-1}$ от температуры и внешнего заряда. Последняя величина авторами статьи была названа *сизифовым* сопротивлением [18]. В их эксперименте туннельный кондактанс был приблизительно оценен равным $g \approx 0.5$, так что ОЭК была в режиме сильной связи. В [18] ‘сизифово’ сопротивление рассчитывалось в рамках подхода кинетического уравнения (см. ур.(4) в работе [18]). Полученный в работе [18] результат соответствует результату (1.110) для адмиттанса. Однако, конечный результат для адмиттанса (1.111) более общий чем ур.(4) работы [18]. Последний не учитывает не только логарифмические перенормировки параметров ОЭК, но так же и отличие функции $F^R(\Omega)$ от линейной. Хотя величины параметров ОЭК наблюдаемой в [18] таковы, что

отличие масштабного множителя Z от единицы лишь несколько процентов, логарифмические перенормировки в выражении для адмиттанса дают весьма заметный эффект. Это показано на Рис. 1.8. Вдобавок ко всему, функция $F^R(\Omega)$ может быть записана как линейная только для частот: $\Omega \ll \max\{|\Delta|, T\}$, что не выполняется для низкотемпературных данных работы [18]. Таким образом, экспериментальные данные в [18] следует проанализировать с учётом ур. (1.111).

Авторы [18] утверждают, что их результаты для ‘сизифова’ сопротивления указывают на нарушение законов Кирхгофа. А именно, утверждается, что измеренный адмиттанс не соответствует эквивалентному контуру ОЭК с затворной емкостью C_g и туннельным кондактансом g . Однако, используя такую же логику, можно было бы утверждать, что правила Кирхгофа нарушаются при измерении кондактанса ОЭТ $G(T)$, ведь он отличается от $g_l g_r / (g_l + g_r)$. Полученные в этой главе результаты подразумевают, что скорость диссипации энергии (величина, обратная ‘сизифову’ сопротивлению) в ОЭТ может быть получена из правил Кирхгофа, если заменить C_g и g на C_g и $g'(T)$ в эквивалентном контуре. Как можно видеть из Рис. 1.8, скорость диссипации энергии максимальна для $\Delta = 0$, что соответствует полуцелым значениям затворного заряда q . Так получается потому что, чем больше величина Δ , тем больше отношение $\Gamma_{01}^0 / \Gamma_{10}^0$. Напомним, что $\Gamma_{01/10}^0$ есть скорость перехода из (в) состояние с $Q = k + 1$ в (из) состояния с $Q = k$. Увеличение Δ уменьшает вероятность возбуждения системы в состояние с $Q = k + 1$ осциллирующим затворным напряжением и, таким образом, уменьшает диссипацию. Конечно, это интуитивное объяснение основано на модели только с двумя зарядовыми состояниями. Оно правомерно только при $g \ll 1$. Однако, при $g'(T) \gg 1$ скорость диссипации энергии также имеет максимум при полуцелых значениях внешнего заряда q (см. ур. (1.49)). Последний результат не может

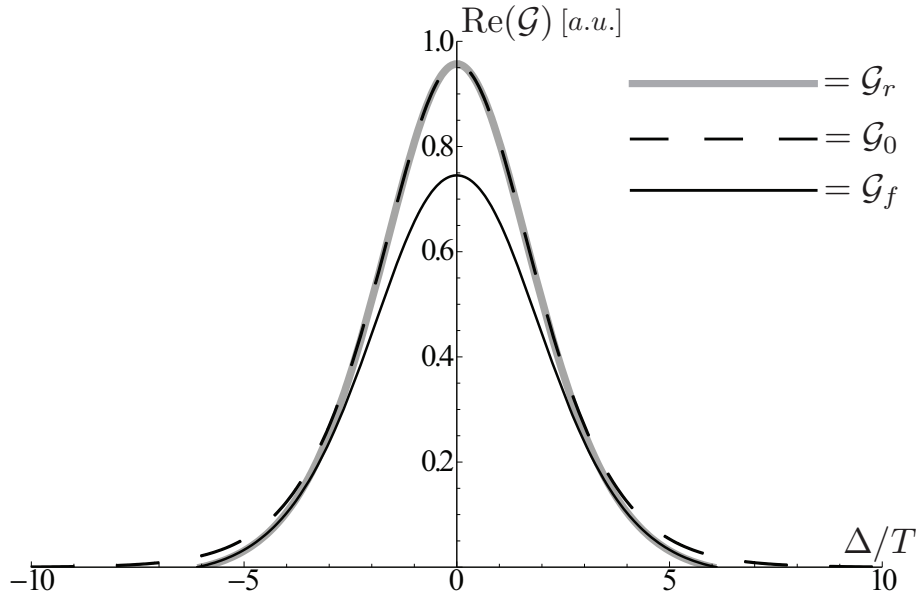


Рис. 1.8: Диссипативная часть адмиттанса в ОЭК при фиксированной Ω как функция Δ . Представлены три графика иллюстрирующих три различные формулы. G_r дается уравнением (1.108), G_0 дается (1.110), G_f дается (1.111). Мы используем $g = 0.5$, $E_c = 10T$ и $\Omega = 0.8T$.

быть объяснен в терминах ‘ортодоксальной теории’, так как нет хорошо определённых зарядовых состояний в режиме слабой связи.

Диссипация, вызванная туннелированием электронов, не единственная в задаче. Внутренние электронные переходы в металлическом островке индуцируют дополнительные потери энергии. Этот механизм, однако, ответственен за металлическую проводимость. Подобный вид диссипации должен носить, главным образом, классический характер. Он отвечает за излучение энергии металлической таблеткой, помещенной в квазистационарное электрическое поле. Классическая диссипация может быть удобно описана двумя предельными режимами: низко-частотные омические потери и высоко-частотное неомическое излучение (скин-эффект):

$$\begin{aligned}
 W_{\Omega}^c &\sim \frac{\hbar}{g_{\text{Th}}e^2} L^2 \Omega^2 |U_{\Omega}|^2, & \Omega \ll \Omega_0, & \quad \Omega_0 = \frac{E_c}{g_{\text{Th}}\alpha^2 \hbar} \\
 W_{\Omega}^c &\sim \frac{\hbar}{g_{\text{Th}}e^2} L^2 \Omega^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{3/2} |U_{\Omega}|^2, & \Omega \gg \Omega_0 &
 \end{aligned}
 \tag{1.115}$$

Здесь $\alpha = e^2/\hbar c$ постоянная тонкой структуры, $g_{\text{Th}}e^2/\hbar = e^2E_{\text{Th}}/\hbar\delta$ есть внутренний (таулессовский) кондактанс островка, L - его характерный размер и Ω_0 - разделяющая частота. Чтобы прояснить параметрические условия, при которых квантовая диссипация \mathcal{W}_Ω , обусловленная присутствием туннельного соединения, доминирует над классической, нужно провести некоторые оценки. Квантовая диссипация может быть так же разбита на омический и неомический предельные случаи. Соответствующая разделяющая частота обозначена Ω_s . Мы хотим сделать лишь простые оценки и опускаем сравнительно слабые логарифмические поправки во всех формулах для квантового случая. Результаты наиболее удобно объяснить на фазовой диаграмме, представленной на Рис.1.9 и дополненной таблицами 1.0(a) и 1.0(b).

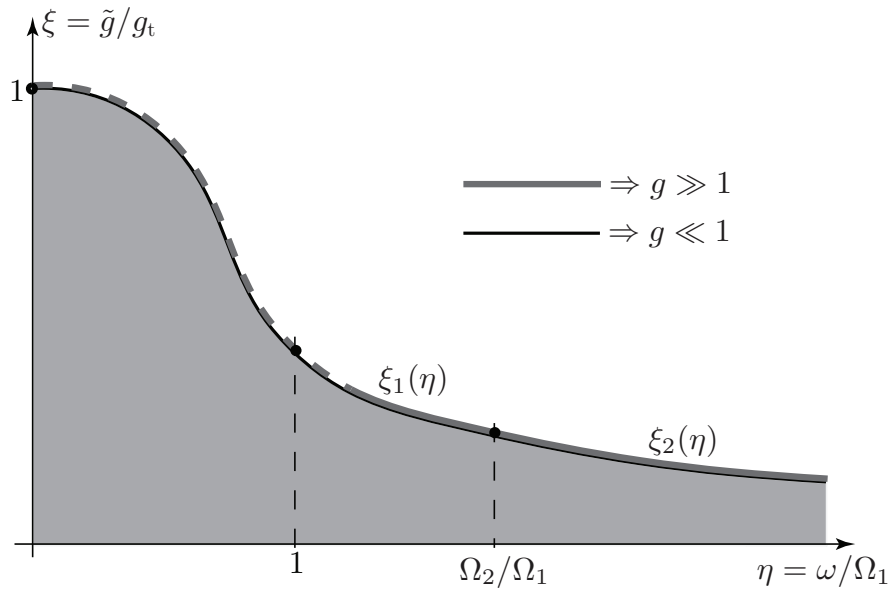


Рис. 1.9: Фазовая диаграмма для сравнения квантового и классического механизма диссипации. Квантовая диссипация доминирует в штрихованной области.

В полностью когерентном режиме адмиттанс ОЭК исследовался в работе [13] с помощью S -матричного формализма. Было показано, что адмиттанс ОЭК может быть разбит в соответствии с его классическим аналогом (1.22), но определение образующих его физических величин меняется. В работе [13]

(a) Функции для Рис. 1.9			(b) Параметры для Рис. 1.9		
	$\Omega_0 \leq \Omega_s$	$\Omega_0 > \Omega_s$		Ω	\tilde{g}
Ω_1	Ω_0	Ω_s	$g \gg 1$	gE_c/\hbar	g
Ω_2	Ω_s	Ω_0	$g \ll 1, \Delta \ll T$	gT/\hbar	$g \left(\frac{T}{E_c}\right)^2$
ξ_1	$1/\eta^{3/2}$	$1/\eta^2$	$g \ll 1, \Delta \gg T$	$g\Delta/\hbar$	$g \frac{\Delta T}{E_c^2} e^{\Delta/T}$
ξ_2	$\frac{1}{\eta^{7/2}} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2$	$\frac{1}{\eta^{7/2}} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{3/2}$			

Таблица 1.1: Таблицы фазовых функций и параметров

был проведен расчёт, показывающий, что зарядовая ёмкость C_g и туннельное сопротивление R должны быть заменены мезоскопической ёмкостью C_μ и сопротивлением зарядовой релаксации. Однако, согласно полученным результатам, пусть и применимым только в полностью некогерентном пределе, в адмиттанс ОЭК в квазистационарном режиме входят две ёмкости: эффективная ёмкость $\partial Q/\partial U_0$, которая определяется мнимой частью $\mathcal{G}(\Omega)$, и перенормированная ёмкость C_g , которая вместе с сопротивлением \mathcal{R}_q определяет температурное поведение $\text{Re } \mathcal{G}(\Omega)$. Мезоскопическую ёмкость определяет именно эффективная ёмкость $\partial Q/\partial U_0$. Появление эффективной ёмкости $\partial Q/\partial U_0$ во мнимой части адмиттанса продиктовано законом сохранения заряда посредством тождества Уорда (1.20). Естественно ожидать, что в общем случае адмиттанс ОЭК должен включать две физически различные ёмкости. Недавно адмиттанс ОЭК был исследован в некогерентном режиме в рамках S -матричного формализма. [16] В частности, было предсказано, что в полностью некогерентном режиме и при низких температурах сопротивление зарядовой релаксации $R_q = h/(ge^2)$. Это противоречит нашему результату $R_q = h/(e^2 g'(T))$, так как при низких температурах $g'(T)$ может сильно отличаться от g (см уравнения (1.52) и (1.97)). Причина данного расхождения в следующем. Кулоновское взаимодействие в работе [16] было учтено только на уровне классических уравнений движения, которые были просто законом сохранения

заряда. В то же время квантовые флуктуации заряда очень сильны, как видно из всего нашего анализа, и нет никакой причины ими пренебрегать.

В этой главе была исследована скорость диссипации энергии в одноэлектронной коробке, вызванная медленно осциллирующим затворным напряжением. Был рассмотрен режим не слишком низких температур, когда электронной когерентностью можно пренебречь, но квантовые флуктуации заряда сильны из-за Кулоновского взаимодействия. Мы рассмотрели случаи слабой и сильной связи. В обоих пределах мы установили, что диссипация энергии описывается одним и тем же выражением, включающим две физические наблюдаемые: $g'(T)$ и C_g . Этот результат для скорости диссипации энергии может быть получен из эквивалентной электротехнической схемы для ОЭК, если подставить $g'(T)$ и C_g вместо g и C_g соответственно. Ожидается, что универсальное выражение, которое получено для скорости диссипации энергии, справедливо для произвольной величины туннельного кондактанса.

Глава 2

Динамика релаксации электронной функции распределения в задаче с кулоновской блокадой

2.1 Введение

Недавно явление кулоновской блокады в одно-электронных системах [2]–[6] оказалось в центре термо-электрических исследований. [8] Среди значительных экспериментальных достижений можно перечислить: создание одно-электронного термометра, [8] теплового выпрямителя на основе квантовой точки, [63] новую технику для измерения температурных градиентов в квантовой точке [10] и т.д. Стандартной характеристикой термо-электричества является *коэффициент полезности*, который определяется как произведение кондактанса, квадрата термо-ЭДС и обратного теплового кондактанса. Измерения термо-ЭДС и теплового кондактанса в ОЭТ и квантовых точках проводились в последние десятилетия в различных температурных режимах [9, 64, 65]. Теория термо-электрических эффектов в одно-электронных системах была заложена в работах [66, 67]. В последнее десятилетие термо-ЭДС и тепловой кондактанс были изучены в ОЭТ и квантовых точках [21], [68]–[73], а

также в гранулированных металлах [32], [74]–[77] в различных режимах. Однако, термо-ЭДС и тепловой кондактанс суть коэффициенты линейного отклика и, таким образом, описывают только равновесное поведение системы. В этой главе мы, напротив, сконцентрируемся на свойствах неравновесных одно-электронных систем, оказавшихся недавно в центре многих теоретических исследований. В частности: недавно был вычислен кондактанс квантовой точки, на которую подано напряжение накачки в стационарном неравновесном режиме [22] и исследован её токовый шум [24]; рассчитана неравновесная скорость дефазировки и кулоновская аномалия для ОЭТ [23]; в полностью неравновесном ОЭТ исследована статистика температурных и токовых флуктуаций [78, 79]. Так же выполнено обобщение $P(E)$ -теории Назарова [80] на неравновесный режим [81, 82]. Однако, упомянутые работы рассматривают такие режимы, в которых функция распределения электронов на квантовой точке или островке ОЭТ фиксируется внешними источниками, например, переменным или постоянным (транспортным) напряжением.

В этой главе решается другая задача: как электронное распределение, будучи приготовлено, релаксирует к термодинамически равновесному. Помимо общего физического интереса в понимании неравновесного режима, ответ на этот вопрос важен для физики термометрии [8].

Как и раньше будем рассматривать простейшую систему ОЭТ. Система изображена на рис. 2.1. Металлический островок соединен с равновесными электронными резервуарами с помощью туннельных контактов. В зависимости от задачи, резервуары и островок могут поддерживаться при разных температурах (T_l , T_r соответственно), разных химических потенциалах (постоянных или переменных во времени: $\mu_l(t)$, $\mu_r(t)$), или к системе может быть приложено квазистационарное затворное напряжение ($U_g(t) = U_0 + U_\Omega \cos \Omega t$). Как и в первой главе, температура

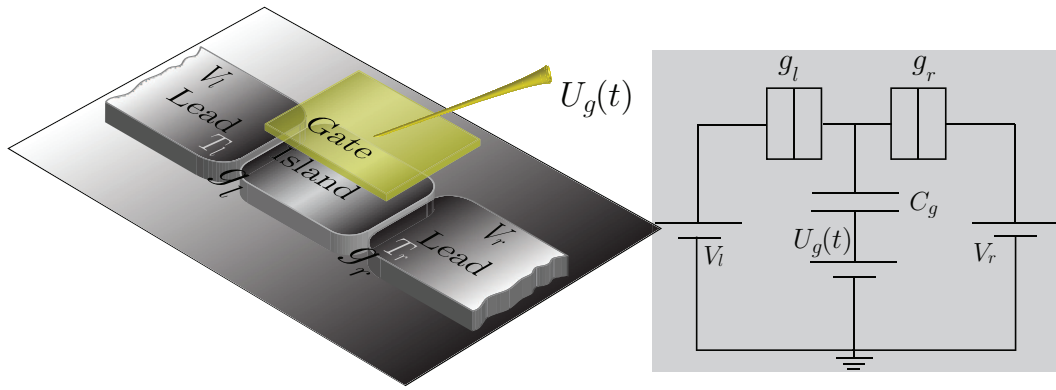


Рис. 2.1: Схематичное изображение ОЭТ. Контакты поддерживаются при различных температурах (химических потенциалах), градиенты которых индуцируют тепловой и электрический транспортные токи

предполагается достаточно низкой: $T \ll \max\{1, g\}E_c$, чтобы электроны были сильно скоррелированы, благодаря кулоновскому взаимодействию. Мы так же ограничимся режимом не слишком низких температур, когда электронной когерентностью можно пренебречь. Тогда физика описывается действием АЭШ. Действие АЭШ имеет свои пределы применимости. При выводе действия подразумевается, что в любом расчёте произведения гриновских функций, усреднённые по беспорядку, заменяются на произведения усреднённых (по беспорядку) гриновских функций. По этой причине процессы многократного когерентного рассеяния от одной и той же примеси исключаются из рассмотрения. Пределы применимости действия АЭШ в режиме $g \gg 1$ и $g \ll 1$ обсуждались в деталях в работах [25] и [26] соответственно. Было показано, что при температурах $T \gg \max\{1, g\}\delta$, применение действия АЭШ оправдано. Следуя [38], мы назовем температурный интервал $\max\{1, g\}E_c \gg T \gg \max\{1, g\}\delta$ *некогерентным, сильно взаимодействующим* режимом. Такой режим вполне доступен экспериментально, например, в экспериментах [64] и [9] необходимые условия были соблюдены.

В случае сильной кулоновской блокады ($g \ll 1$) теоретическое

исследование релаксации электронного распределения в некогерентном сильно взаимодействующем режиме было проведено в работе [20] для квантовой точки и в [83] для цепочки квантовых точек. Однако, рассмотрение, проведённое в работе [20], ограничилось предположениями, что: а) электронное распределение является ферми-функцией с некоторой температурой, отличной от равновесной; б) транспорт определяется ко-туннелированием (режим кулоновской долины); в) температуры резервуаров и островка близки.

Мы исследуем релаксацию электронного распределения без вышеуказанных ограничений. Так как мы хотим уловить неравновесную физику, мы применяем формализм действия АЭШ в его неравновесной форме. Мы дополняем его кинетическим уравнением для исследования динамики релаксации. Для ОЭТ с большим числом транспортных каналов мы выводим квантовое кинетическое уравнение с интегралом столкновений, обусловленным электронным обменом между островком и резервуарами. Оно справедливо во всем интервале значений g и обобщает результат, полученный в [22] в приближении последовательного туннелирования (первый порядок по g) и ко-туннелирования (второй порядок по g) в рамках ортодоксальной теории кулоновской блокады. В действительности полученный в этой главе интеграл столкновений всегда бесконечного порядка по g . В самом деле, событие туннелирования всегда сопровождается излучением плазмона. Вот почему интеграл столкновений становится бесконечного порядка по электронной функции распределения внутри островка. Такая ситуация отличается от ферми-жидкостной и приводит к интересным законам релаксации.

В качестве теста квантового кинетического уравнения в режиме линейного отклика выводятся аналитические выражения для транспортных коэффициентов: кондактанса, теплового кондактанса и отклика

электрического тока на разность температур. В режиме слабой кулоновской блокады ($g \gg 1$) установлены следующие новые результаты для транспортных коэффициентов: а) кондактанс и тепловой кондактанс нарушают закон Видемана-Франца, и отклонение числа Лоренца \mathcal{L} от $\pi^2/3e^2$ содержит слабую периодическую зависимость от затворного напряжения; б) термо-ЭДС слабо осциллирует как функция затворного напряжения возле нулевого значения. Слабые осцилляции числа Лоренца и термо-ЭДС как функций затворного напряжения в режиме $g \gg 1$ – суть проявление известной зависимости этих величин от затворного напряжения [66, 21] в режиме сильной кулоновской блокады $g \ll 1$.

В режимах сильной и слабой кулоновской блокады квантовое кинетическое уравнение применено для решения задачи о релаксации электронного распределения в двух случаях: а) распределение электронов внутри островка есть ферми-функция с некоторой температурой; б) распределение электронов внутри островка произвольно. В первом случае найдена релаксационная динамика электронной температуры; во втором – получена эволюция функции распределения. В обоих случаях предполагается, что электронный обмен с резервуарами – это главный механизм релаксации. В общем случае интеграл столкновений квантового кинетического уравнения не локализован по энергии из-за неупругой природы туннельных процессов. Излучение плазмона всегда сопровождает туннельное событие. В некоторых параметрических режимах – слабой кулоновской блокады и сильной кулоновской блокады в кулоновском пике – ядро интеграла столкновений приобретает квазиупругий вид. Однако, интеграл столкновений остаётся нелокальным из-за наличия перенормировок. Режим ко-туннелирования качественно отличается, так как ядро интеграла столкновений полностью неупруго.

Основной результат этой главы состоит в том, что несмотря на

квазиупругую форму интеграла столкновений, сильное кулоновское взаимодействие существенно меняет законы релаксации по сравнению с экспоненциальными, которые естественно было бы ожидать из соображений, основанных на применении золотого правила Ферми. Подобные соображения предполагают, что электронная скорость релаксации пропорциональна ширине электронных одно-частичных уровней внутри островка $g\delta$, и приводят к экспоненциальной релаксации. Эффекты перенормировки делают ширину электронных уровней зависящей от электронного распределения и приводят к неэкспоненциальной релаксации. Например, в режиме последовательного туннелирования обнаружено, что существует временной интервал, когда релаксация электронной температуры в ОЭТ не зависит от прозрачности туннельного контакта g .

Как и в первой главе, в обсуждаемом режиме используется универсальный гамильтониан (1.3) с той лишь разницей, что резервуаров теперь два:

$$H_0 = \sum_{k,i} \varepsilon_k^{(i)} a_k^{(i)\dagger} a_k^{(i)} + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}^{(d)} d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}. \quad (2.1)$$

Операторы $a_k^{(i)\dagger}$ (d_{α}^{\dagger}) рождают электрон в i -том резервуаре (островке), а туннельный гамильтониан имеет вид

$$H_t = \sum_{k,\alpha,i} t_{k\alpha}^{(i)} a_k^{(i)\dagger} d_{\alpha} + \text{H.c.} \quad (2.2)$$

2.2 Действие и кинетические уравнения

2.2.1 Действие АЭШ

Чтобы рассмотреть систему, находящуюся в неравновесии, нам необходимо применить неравновесный формализм. Формализм функционального интеграла, записанного для контура Келдыша, представляется наиболее подходящим. Мы применим келдышевскую форму действия АЭШ (основные

детали вывода вынесены в приложение Б.1) [2, 85]:

$$S = S_c + S_d, \quad (2.3)$$

где

$$S_c = \frac{1}{E_c} \int \dot{\varphi}_c \dot{\varphi}_q dt + 2q \int \dot{\varphi}_q dt. \quad (2.4)$$

Здесь $\varphi_{c,q} = (\varphi_+ \pm \varphi_-)/2$ с φ_{\pm} означает бозонное поле на обеих частях келдышевского контура. Физически, бозонное поле есть флуктуирующий электрический потенциал. В терминах классической и квантовой бозонных экспонент

$$X_{c,q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi_+} \pm e^{i\varphi_-}), \quad (2.5)$$

диссипативная часть действия АЭШ выглядит так:

$$S_d = \frac{g}{4} \int (\bar{X}_c(t) \bar{X}_q(t)) \begin{pmatrix} 0 & \Pi^A(t, t') \\ \Pi^R(t, t') & \Pi^K(t, t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_c(t') \\ X_q(t') \end{pmatrix} dt dt'. \quad (2.6)$$

Здесь $\Pi^{R,A,K}$ - соответствующие компоненты электронного поляризаационного оператора. Они даются стандартными формулами, приведёнными в приложении Б.1. В случае постоянной плотности состояний в островке и резервуарах ядро действия АЭШ может быть упрощено:

$$\Pi^{R,A,K}(t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \Pi_{\omega}^{R,A,K}(\tau) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (2.7)$$

$$\Pi_{\omega}^{R,A}(\tau) = \mp i \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{g} \int [F_{\varepsilon}^d(\tau) - F_{\varepsilon-\omega}^{\alpha}(\tau)] \frac{d\varepsilon}{2\pi}, \quad (2.8)$$

$$\Pi_{\omega}^K(\tau) = 2i \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{g} \int (1 - F_{\varepsilon}^d(\tau) F_{\varepsilon-\omega}^{\alpha}(\tau)) \frac{d\varepsilon}{2\pi}. \quad (2.9)$$

Здесь мы вводим *медленное* время $\tau = (t + t')/2$. Функция $F_{\varepsilon}(\tau)$ определяется через преобразование Вигнера $f_{\varepsilon}(\tau)$ электронной функции распределения $f(t, t')$: $F_{\varepsilon}(\tau) = 1 - 2f_{\varepsilon}(\tau)$. $\Pi_{\omega}^{R,A,K}(\tau)$ суть вигнеровские образы, соответствующие функциям во временном представлении.

Как видно из структуры правой части уравнения (2.9), удобно ввести функцию $F_\varepsilon^r = (\sum_\alpha g_\alpha F_\varepsilon^\alpha)/g$, совпадающую с функцией распределения электронов на островке ОЭТ в равновесии.

Уравнения (2.8)- (2.9) являются точными, но мы будем пренебрегать в дальнейшем всеми производными по медленному времени τ . Так же удобно ввести функцию $B_\omega(\tau)$:

$$\Pi_\omega^K(\tau) = 2i \operatorname{Im} \Pi_\omega^R(\tau) B_\omega(\tau), \quad (2.10)$$

связывающую келдышевскую компоненту с запаздывающей (опережающей) компонентой поляризационного оператора. Функция $B_\omega(\tau)$ играет роль *функции распределения электрон-дырочных возбуждений*. В равновесии она просто равна $\coth(\omega/2T)$.

В дальнейшем будем предполагать, что электроны в резервуарах термолизованы, так что $f_\varepsilon^{l,r}(\tau)$ это Ферми-функции. В зависимости от параметров модели на островке возможен, как квазиравновесный, так и неравновесный режим. Таким образом, мы не делаем никаких дополнительных предположений о функции распределения электронов $F_\varepsilon^d(\tau)$ островка, считая ее изначально произвольной. Теперь мы хотим вывести кинетическое уравнение для $F_\varepsilon^d(\tau)$.

2.2.2 Кинетические уравнения

Отправной точкой вывода кинетических уравнений для ОЭТ служит уравнение Дайсона для келдышевской компоненты гриновской функции [86]:

$$(\partial_t + \partial_{t'}) F^d(t, t') = \frac{i}{4\pi^2 \nu_d} \left[\Sigma^K - \Sigma^R \cdot F^d + F^d \cdot \Sigma^A \right]_{t,t'}. \quad (2.11)$$

Здесь: $\nu_d = \delta^{-1} = \overline{\sum_\alpha \delta(\varepsilon_\alpha^d)}$ – усредненная одно-частичная плотность состояний в островке и $\Sigma^{K,R,A}$ – компоненты собственной энергии в келдышевском пространстве. Во втором порядке по туннельному

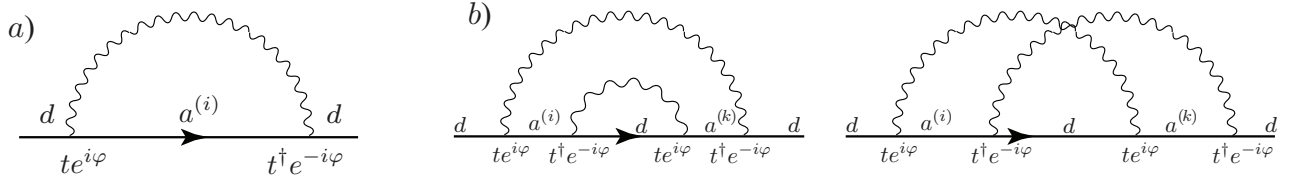


Рис. 2.2: Фейнмановские диаграммы для собственно энергетической части: а) второй порядок по H_T ; б) четвертый порядок по H_T .

гамильтониану H_T (низший порядок по $1/N_{\text{ch}}$) вигнеровское преобразование собственно-энергетической части (см. Рис. 2.2) есть (см. приложение Б.2)

$$\begin{aligned}\Sigma_\varepsilon^{R,A}(\tau) &= \pm \frac{\pi g}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[\mathcal{D}_\omega^K(\tau) \pm 2F_{\varepsilon-\omega}^r(\tau) \mathcal{D}_\omega^{R,A}(\tau) \right], \\ \Sigma_\varepsilon^K(\tau) &= \pi g \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[F_{\varepsilon-\omega}^r(\tau) \mathcal{D}_\omega^K(\tau) + 2i \text{Im} \mathcal{D}_\omega^R(\tau) \right],\end{aligned}\quad (2.12)$$

где корреляционные функции бозевских экспонент:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^R(t, t') &= -i \langle X_c(t) \bar{X}_q(t') \rangle, \\ \mathcal{D}^A(t, t') &= -i \langle X_q(t) \bar{X}_c(t') \rangle, \\ \mathcal{D}^K(t, t') &= -i \langle X_c(t) \bar{X}_c(t') \rangle.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Удобно параметризовать $\mathcal{D}^K(t, t')$ через бозевскую функцию распределения $\mathcal{B}(t, t')$:

$$\mathcal{D}_{t,t'}^K = \left(\mathcal{D}^R \cdot \mathcal{B} - \mathcal{B} \cdot \mathcal{D}^A \right)_{t,t'}.\quad (2.14)$$

Стоит отметить, что следующий (4-ого порядка по H_T) вклад в собственно энергитическую часть, показанный на Рис. 2.2(b), имеет порядок g^2/N_{ch} . Этот вклад имеет тот же порядок малости, что и слагаемые, опущенные при выводе действия АЭШ (2.6). В рассмотренном пределе $N_{\text{ch}} \gg 1$ им можно пренебречь.

Выполняя преобразование Вигнера уравнения (2.11), и пренебрегая всеми производными по медленному времени в его правой части, мы получаем квантовое кинетическое уравнение для функции распределения электронов

на островке ОЭТ:

$$\begin{aligned} \partial_\tau F_\varepsilon^d(\tau) = & - \sum_{\alpha=l,r} \frac{g_\alpha}{2\pi\nu_d} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Im } \mathcal{D}_\omega^R(\tau) \\ & \times \left\{ \left(F_{\varepsilon-\omega}^\alpha(\tau) - F_\varepsilon^d(\tau) \right) \mathcal{B}_\omega(\tau) + 1 - F_\varepsilon^d(\tau) F_{\varepsilon-\omega}^\alpha(\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Полученное квантовое кинетическое уравнение составляет один из главных результатов настоящей главы. Оно описывает эволюцию функции распределения $F_\varepsilon^d(\tau)$ электронов островка, обусловленную взаимодействием с бозонным полем φ и туннелированием в резервуары. Уравнение (2.15) получено для любых значений g_r and g_l . Ввиду присутствия $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R(\tau)$ и \mathcal{B}_ω , правая часть ур. (2.15) может быть разложена в ряд по степеням g . Бозонная функция распределения \mathcal{B}_ω определяется электронным распределением $F_\varepsilon^d(\tau)$ и находится из АЭШ-действия (2.3).

Как и ожидается [35], при $g \gg 1$ ядро ($\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$) интеграла столкновений квантового кинетического уравнения (2.15) напоминает ядро квантового кинетического уравнения для неупорядоченной электронной жидкости [88]–[89] на энергиях $\omega \gg g\delta$. При $g \ll 1$ квантовое кинетическое уравнение (2.15), учитывающее эффекты перенормировки (через мнимую часть $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$) обобщает кинетическое уравнение, полученное в работе [22] в рамках ортодоксальной теории кулоновской блокады [50] для последовательного туннелирования и неупругого ко-туннелирования.

2.3 Транспортные коэффициенты

Используя квантовое кинетическое уравнение (2.15), нетрудно вывести общие формулы для всех транспортных коэффициентов ОЭТ при произвольных g . Разность потенциалов ($\Delta V = V_r - V_l$) и температур ($\Delta T = T_r - T_l$) на ОЭТ вызывают электрический ($I^{(e)}$) и тепловой ($I^{(q)}$) токи. Электрические и

термо-электрические транспортные коэффициенты определяются как

$$\begin{pmatrix} I^{(e)} \\ I^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_V & G_T \\ M & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta T \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Здесь коэффициенты M и G_T (отклик теплового тока на приложенную разность потенциалов и отклик электрического тока на разность температур соответственно) связаны соотношением Онсагера $M = G_T T$ [90]. Коэффициент теплопроводности κ обычно определяется как $\kappa = K - G_V T S^2$, где $S = G_T / G_V$ обозначает термо-ЭДС. Электрический и тепловой токи в резервуаре α находятся как

$$\begin{pmatrix} I_\alpha^{(e)} \\ I_\alpha^{(q)} \end{pmatrix} = -\frac{g_\alpha}{4\pi} \int d\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Im} \mathcal{D}_\omega^R(\tau) \quad (2.17)$$

$$\times \left\{ \left(F_{\varepsilon+\omega}^d(\tau) - F_\varepsilon^\alpha(\tau) \right) \mathcal{B}_\omega(\tau) - 1 + F_\varepsilon^\alpha(\tau) F_{\varepsilon+\omega}^d(\tau) \right\}. \quad (2.18)$$

Сохранение электрического тока отвечает условию $I_l^e + I_r^e = 0$. Оно фиксирует бозевскую функцию распределения \mathcal{B}_ω равной её электрон-дырочной функции распределения B_ω введенную в уравнении (2.10):

$$B_\omega(\tau) = \frac{\Pi_\omega^K(\tau)}{2i \text{Im} \Pi_\omega^R(\tau)} = \frac{\sum_{\alpha=l,r} g_\alpha \int d\varepsilon \left[1 - F_\varepsilon^d(\tau) F_{\varepsilon-\omega}^\alpha(\tau) \right]}{\sum_{\alpha=l,r} g_\alpha \int d\varepsilon \left[F_\varepsilon^d(\tau) - F_{\varepsilon-\omega}^\alpha(\tau) \right]}. \quad (2.19)$$

Сохранение теплового тока $I_l^q + I_r^q = 0$ определяет равновесную температуру островка:

$$T_d^{(\text{eq})} = \frac{g_l T_l + g_r T_r}{g_l + g_r}. \quad (2.20)$$

Прямое вычисление электрического и теплового тока дает:

$$\begin{pmatrix} I_l^{(e)} \\ I_l^{(q)} \end{pmatrix} = -\frac{g_l g_r}{g} \frac{e}{4\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\text{Im} \mathcal{D}_\omega^R}{\sinh^2 \frac{\beta\omega}{2}} \begin{pmatrix} \beta\omega & -\frac{(\beta\omega)^2}{2} \\ -\frac{\beta\omega^2}{2} & \omega \frac{\pi^2 + (\beta\omega)^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e\Delta V \\ \Delta T \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Вводя величины g' , g'_T и k' в соответствии с

$$\begin{pmatrix} G_V & G_T \\ M & K \end{pmatrix} = \frac{e^2}{h} \frac{g_l g_r}{(g_l + g_r)^2} \begin{pmatrix} g' & -\frac{1}{e} g'_T \\ -\frac{T}{e} g'_T & \frac{T}{e^2} k' \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

мы получаем

$$\begin{pmatrix} g' \\ g'_T \\ k' \end{pmatrix} = -g \int \frac{d\omega}{4\pi} \frac{\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R}{\sinh^2 \frac{\beta\omega}{2}} \beta\omega \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta\omega}{2} \\ \frac{\pi^2 + (\beta\omega)^2}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Подчеркнём, что уравнение (2.23) справедливо для любой величины туннельного кондактанса g . Оно обобщает выражения для транспортных коэффициентов, полученные в работах [58, 21] для $g \ll 1$ на случай произвольных g .

Полезно переписать уравнение (2.23) в терминах туннельной плотности состояний электронов внутри островка (см. приложение Б.3):

$$\nu_d(\varepsilon) = -\nu_d \int \text{Im } \mathcal{D}_\omega^R \left\{ \coth \frac{\omega}{2T} - \tanh \frac{\varepsilon + \omega}{2T} \right\} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.24)$$

Подставляя выражение (2.24) для туннельной плотности состояний и выполняя стандартное интегрирование с фермиевскими и бозевскими функциями, можно удостовериться, что результаты (2.23) могут быть *точно* переписаны в виде

$$\begin{pmatrix} g' \\ g'_T \\ k' \end{pmatrix} = g \int d\varepsilon \frac{\nu_d(\varepsilon)}{\nu_d} \left(-\frac{\partial f_\varepsilon^d}{\partial \varepsilon} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Уравнения (2.25) для транспортных коэффициентов напоминают соответствующие ферми-жидкостные [41, 90]. Однако, в отличие от ферми-жидкости, туннельная плотность состояний $\nu_d(\varepsilon)$ имеет сильную зависимость от энергии при $\varepsilon \rightarrow 0$. В общем случае $\nu_d(\varepsilon) = \nu_d^{\text{even}}(\varepsilon) + \nu_d^{\text{odd}}(\varepsilon)$, где $\nu_d^{\text{even/odd}}(\varepsilon)$ четная/нечетная функция ε . Может быть показано, что $\nu_d^{\text{even/odd}}(\varepsilon)$ есть четная/нечетная функция наведенного затворного заряда q . Таким образом, g' и k' – чётные функции q , в то время как g'_T – нечетная функция затворного заряда.

Для макроскопических образцов обычных металлов закон Видемана-Франца дает взаимосвязь между кондактансом и тепловым кондактансом. Он утверждает, что отношение Лоренца $\mathcal{L} = \kappa/(G_V T)$ есть константа, равная числу Лоренца $\pi^2/3e^2$. Как следует из уравнения (2.25), можно ожидать нарушения закона Видемана-Франца в присутствии сильной зависимости $\nu_d(\varepsilon)$ от энергии.

В режиме $g \gg 1$ можно вычислить пертурбативное разложение по $1/g$ и принять во внимание непертурбативные поправки. Функция $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$ приобретает следующий вид в равновесии [49]:

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{D}_\omega^R = & -\frac{\pi}{T} \left[1 - \frac{2}{g} \ln \frac{gE_c e^\gamma}{2\pi^2 T} - \frac{g^2 E_c}{\pi^2 T} e^{-g/2} \cos 2\pi q \right] \omega \delta(\omega) \\ & - \frac{2\pi}{g\omega} \left[1 + \frac{g^3 E_c}{2\pi^2 T} e^{-g/2} \cos 2\pi q \right] \\ & + \frac{g^2 E_c}{\pi T} e^{-g/2} \cos 2\pi q \frac{\omega}{\omega^2 + 4\pi^2 T^2} \\ & - \frac{g^2 E_c}{T} e^{-g/2} \sin 2\pi q \left(\delta(\omega) - \frac{2T}{\omega^2 + 4\pi^2 T^2} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь функцию $\omega \delta(\omega)$ следует понимать как $\text{Im } a/[\pi(\omega + a + i0)]$, где предел $a \rightarrow 0$ следует брать последним во всех вычислениях, (подобным вычислением может быть, например, интегрирование по ω). Непертурбативные по $1/g$ поправки (экспоненциально малые слагаемые порядка $\exp(-g/2)$) приходят от вклада коршуновских инстантонов [44] действия АЭШ. Используя уравнение (2.26), мы находим из (2.23)

$$g' = g - 2 \ln \frac{gE_c}{T} - \frac{g^3 E_c}{6T} e^{-g/2} \cos 2\pi q, \quad (2.27)$$

$$g'_T = -\frac{2g^3 E_c}{\pi T} e^{-g/2} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \right) \sin 2\pi q, \quad (2.28)$$

$$k' = \frac{\pi^2}{3} \left(g' + \frac{4}{3} + \frac{2g^3 E_c}{\pi^2 T} \cos 2\pi q \left[\frac{\pi^2}{3} - 3 \right] \right). \quad (2.29)$$

Результат для g' был получен в работе [38]. Уравнения (2.28)-(2.29) являются новыми результатами и верны при температурах $T \gg g^2 E_c \exp(-g/2)$. Подчеркнём, что g'_T содержит только непертурбативный (инстантонный)

вклад. Тоже верно и для термо-ЭДС:

$$S = -\frac{2g^2 E_c}{\pi e T} \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) \exp\left(-\frac{g}{2}\right) \sin 2\pi q. \quad (2.30)$$

При $g \gg 1$ нарушение закона Видемана-Франца мало и число Лоренца дается выражением

$$\mathcal{L} = \frac{\pi^2}{3e^2} \left[1 + \frac{4}{3g} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{9}{\pi^2}\right) \frac{g^2 E_c}{T} e^{-g/2} \cos 2\pi q \right]. \quad (2.31)$$

Благодаря непертурбативному вкладу, число Лоренца зависит от температуры и осциллирует как функция внешнего затворного заряда q .

В режиме сильной кулоновской блокады $g \ll 1$ уравнение (2.23), дополненное надлежащим выражением для $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$ (см. ур. (2.65) и (2.104)) приводит в точности к результатам для транспортных коэффициентов, полученных в работах [21, 58, 71, 73].

2.4 Электронная релаксация в островке, режим слабой кулоновской блокады, $g \gg 1$

Далее мы хотим проиллюстрировать возможности кинетического уравнения (2.15) с учетом квантово-полевого скейлинга основных физических величин. Мы рассматриваем задачу о релаксации электронов островка к равновесию за счёт обмена электронами с резервуарами. Возможны два сценария. Первый можно назвать квазиравновесным: электронное распределение внутри островка даётся ферми-функцией с неравновесной температурой T_d , которая релаксирует к своему равновесному значению. Второй сценарий соответствует полностью неравновесному режиму, когда функция распределения электронов островка произвольна. Сценарий релаксации зависит от отношения τ_E/τ_{ee} , где τ_E обозначает время релаксации, обусловленной электронным туннелированием, и τ_{ee} – время

релаксации, обусловленной кулоновским взаимодействием электронов внутри островка. Неравновесный режим устанавливается при условии $\tau_E \ll \tau_{ee}$, в то время как квазиравновесие имеет место при $\tau_E \gg \tau_{ee}$. Как будет показано ниже, оба сценария возможны.

Существует ещё один важный временной масштаб, связанный с релаксацией: τ_{RC} , определяющий время растекания электрического заряда по островку. В режиме слабой кулоновской блокады τ_{RC} дается следующей классической оценкой: $\tau_{RC} \simeq 2\pi/gE_c$. Как мы увидим ниже, $\tau_E \gg \tau_{RC}$. Таким образом, можно считать, что сначала происходит быстрое растекание электрического заряда, и затем медленная релаксация электронной функции распределения или температуры к термодинамическому равновесию. Формально это означает, что начальное электронное распределение $F_\varepsilon^d(0)$ удовлетворяет условию $\int d\varepsilon [F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r] = 0$.

Как обсуждалось в вводной части, перенормировка физических наблюдаемых сильно меняет динамику релаксации системы. Следовательно, перед тем как решать кинетическое уравнение, необходимо получить скейлинг констант связи теории при неравновесных условиях.

2.4.1 Перенормировка действия АЭШ при $g \gg 1$

Действие АЭШ перенормируется благодаря своей нелинейной форме. В равновесии перенормировка действия общеизвестна (см., например, работу [2]). В нашем случае неравновесность делает задачу менее тривиальной. Как и в равновесии мы ожидаем обязательный скейлинг константы связи g . Дополнительный, неизбежно возникающий вопрос: остаётся ли структура ядра действия АЭШ (компоненты поляризационного оператора Π_ω в пространстве Келдыша в ур. (2.6)) инвариантной при перенормировке? Детали расчёта представлены в приложении Б.4. Оказывается, структура голого действия полностью сохраняется, ядро

действия АЭШ действительно инвариантно по отношению к ренорм-групповой (РГ) процедуре. Константа связи перенормируется в соответствии с правилом

$$g(\underline{\Lambda}) = g(\bar{\Lambda}) - 2 \int_{\omega=\underline{\Lambda}}^{\bar{\Lambda}} \frac{B_\omega(\tau)}{\omega} d\omega. \quad (2.32)$$

Здесь обрезка $\bar{\Lambda}$ естественно фиксируется первым слагаемым в уравнении (2.4): $\bar{\Lambda} \sim gE_c$. Чтобы продемонстрировать, что интеграл в (2.32) в самом деле логарифмический, исследуем поведение подынтегрального выражения при $\omega \rightarrow \infty$. Довольно просто получить следующую асимптотику для функции B_ω при $\omega \rightarrow \infty$:

$$B_\omega = \text{sgn } \omega + \delta B_\omega, \quad (2.33)$$

$$\delta B_\omega = (F_\omega^d - \text{sgn } \omega) + \frac{1}{2\omega} \sum_\alpha \frac{g_\alpha}{g} \int (\varepsilon + \omega) (F_{\varepsilon+\omega}^d - F_\omega^d) \partial_\varepsilon F_\varepsilon^\alpha d\varepsilon.$$

Мы ожидаем, что любая физическая функция распределения подчиняется условию $F_\varepsilon^d \rightarrow \text{sgn } \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta B_\omega = 0. \quad (2.34)$$

Таким образом, асимптотика функции B_ω на высоких энергиях дается $\text{sgn } \omega$, как и в равновесии. Отсюда следует логарифмическое поведение интеграла (2.32).

Чтобы получить перенормированное действие, необходимо проинтегрировать по всем высоко-частотным полям вплоть до наинизшего масштаба ω_0 , при котором РГ останавливается. Этот масштаб определяется условием

$$\delta B(\omega_0) \sim 1. \quad (2.35)$$

Пусть ε_d - характерный энергетический масштаб электронной функции распределения островка (масштаб, при котором электронная функция распределения F_ε^d переходит в функцию $\text{sgn } \varepsilon$). Тогда можно легко

удостовериться, что верна следующая оценка (см. приложение Б.4, где вычисление изложено в деталях)

$$\omega_0 \sim \max\{\varepsilon_d, T_r, T_l\}, \quad (2.36)$$

где T_r, T_l температуры резервуаров. Энергетический масштаб ω_0 служит естественным обрезанием, $\underline{\Lambda} = \omega_0$, в РГ-процедуре. Наконец, мы находим

$$g(\omega_0) = g - 2 \ln \frac{gE_c}{\omega_0}. \quad (2.37)$$

В равновесии $\varepsilon_d = T_r = T_l = T$. Таким образом, получаем $\omega_0 \sim T$. Уравнения (2.36)-(2.37) описывают перенормировку действия АЭШ в неравновесных условиях.

2.4.2 Неравновесный режим

Задача о релаксации формулируется следующим образом. При $t = 0$ островок нагрет и образуется некая функция распределения $F_\varepsilon^d(0)$. Характерная энергия ε_d электронов на островке больше, чем температуры резервуаров, которые поддерживаются равными $\varepsilon_d > T_r = T_l$. Систему отпускают, и островок остывает, благодаря туннельному обмену горячих электронов островка с холодными электронами резервуаров.

Разлагаясь по полям $\varphi_{c,q}$ до второго порядка, находим (см. детали в приложении Б.4)

$$\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R = -\frac{2\pi\delta(\omega)}{B_\omega} \left(1 - \frac{1}{g} \int \frac{B_\omega}{\omega} d\omega\right) - \frac{2\pi}{g\omega}. \quad (2.38)$$

Напомним, что этот результат обобщает пертурбативное (независящее от q) выражение, полученное в уравнении (2.26) на неравновесный режим. При помощи равенства (2.38) можно рассчитать интеграл столкновений в правой части квантового кинетического уравнения (2.15) и получить

$$\begin{aligned} \partial_\tau F_\varepsilon^d(\tau) &= -\frac{\mathcal{G}(\tau)\delta}{2\pi} (F_\varepsilon^d(\tau) - F_\varepsilon^r), \\ \mathcal{G}(\tau) &= g - \int \frac{B_\omega(\tau)}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь мы пренебрегаем последним слагаемым в уравнении (2.38) по следующим причинам: оно дает вклад порядка 1, в то время как первый член в (2.38) содержит $\int d\omega B_\omega/\omega \sim \ln gE_c/\varepsilon_d \gg 1$. Хотя уравнение (2.39) имеет квазиупругий вид, в действительности, оно является сильно нелинейным уравнением ($\mathcal{G}(\tau)$ содержит информацию об электронном распределении на всех энергиях).

Как было показано выше, величина $\mathcal{G}(\tau)$ имеет смысл перенормированной константы взаимодействия теории. Простая алгебра приводит нас к дифференциальному уравнению на функцию $\mathcal{G}(\tau)$ [91]:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{G}(\tau) &= -\frac{\delta \mathcal{G}(\tau)}{2\pi} (\mathcal{G}(\tau) - \mathcal{G}_r), \\ \mathcal{G}_r &= g - \int \frac{d\omega}{\omega} \coth \frac{\omega}{2T_r}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Решение выглядит следующим образом:

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{\mathcal{G}(0)\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(0) + (\mathcal{G}_r - \mathcal{G}(0))e^{-\frac{\mathcal{G}_r\delta}{2\pi}\tau}}. \quad (2.41)$$

Теперь, используя этот результат, мы можем проинтегрировать уравнение (2.39) и получить эволюцию электронной функции распределения F_ε^d :

$$\begin{aligned} F_\varepsilon^d(\tau) &= F_\varepsilon^r + \left(F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r \right) \\ &\times \left\{ \frac{\mathcal{G}(0)}{\mathcal{G}_r} \left[\exp \left(\frac{\mathcal{G}_r\delta}{2\pi} \tau \right) - 1 \right] + 1 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Решение (2.42) демонстрирует локальную по энергии релаксацию электронного распределения. Это является прямым следствием квазиупругой формы кинетического уравнения (2.39). Однако, из-за эффектов перенормировки форма закона релаксации отлична от экспоненциальной.

Определим характерную энергию ε_d как $\varepsilon_d^2 - T_r^2 = (3/\pi^2) \int d\varepsilon \varepsilon (F_\varepsilon^r - F_\varepsilon^d)$, так что $\varepsilon_d = T_d$ в квазиравновесном случае $F_\varepsilon^d = \tanh(\varepsilon/2T_d)$. Тогда, в случае $\varepsilon_d(0) \gg T_r$ и при не слишком долгих временах $\tau \ll 2\pi/\delta\mathcal{G}_r$, из

уравнения (2.42) находим, что характерная энергия падает по степенному закону:

$$\varepsilon_d(\tau) = \varepsilon_d(0) \left[1 + \frac{\delta \mathcal{G}(0)}{2\pi} \tau \right]^{-1/2}. \quad (2.43)$$

2.4.3 Квазиравновесный режим

В квазиравновесном режиме необходимо учесть интеграл столкновений $I_\varepsilon^{(ee)}$, обусловленный электрон-электронным взаимодействием в островке [87, 88]. Когда это слагаемое добавляется в правую часть уравнения (2.15), оно делает электронное распределение F_ε^d фермиевским. Домножая обе части уравнения (2.15) на ε и интегрируя по энергии, получаем следующее уравнение (используется известное свойство $\int d\varepsilon \varepsilon I_\varepsilon^{(ee)} = 0$):

$$\frac{dT_d^2}{d\tau} = -\frac{g\delta}{2\pi}(T_d^2 - T_r^2). \quad (2.44)$$

Здесь мы используем главную (классическую) часть уравнения (2.38) ($\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R = -2\pi\delta(\omega)/B_\omega$). Уравнение (2.44) приводит к стандартной экспоненциальной релаксации к равновесию. В пределе $T_d \gg T_r$ ($\mathcal{G}(0) \gg \mathcal{G}_r$) возможно также рассчитать интеграл столкновений, используя полное однопетлевое выражение (2.38) для его ядра. Вполне естественно, что однопетлевые поправки проявляют себя в логарифмической перенормировке g в правой части (2.44). Используя (2.38), мы находим

$$\begin{aligned} \frac{dT_d^2}{d\tau} &= -\frac{\mathcal{G}(\tau)\delta}{2\pi}T_d^2, \\ \mathcal{G}(\tau) &= g - 2 \ln \frac{gE_c}{cT_d(\tau)}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где c - численная константа порядка единицы, не влияющая на конечный результат. Решение (2.45) выглядит так:

$$\begin{aligned} T_d(\tau) &= T_d(0) \exp \left(-\frac{\mathcal{G}(0)}{2} \left[1 - e^{-\delta\tau/2\pi} \right] \right) \\ \tau &\ll \frac{2\pi}{\delta} \ln \frac{\mathcal{G}(0)}{\mathcal{G}_r}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Условие во второй строке уравнения (2.46) подразумевает, что решение справедливо для не слишком больших времен, а именно, когда $T_d(\tau) \gg T_r$ ($\mathcal{G}(\tau) \gg \mathcal{G}_r$). Логарифмическая перенормировка кондактанса меняет характер температурной релаксации. На больших временах $2\pi/\delta \ll \tau \ll (2\pi/\delta) \ln \mathcal{G}(0)/\mathcal{G}_r$ охлаждение островка замедляется по сравнению с типичным экспоненциальным спадом, развитым в начальный момент $\tau \ll 2\pi/\delta$:

$$T_d(\tau) = T_d(0)e^{-\frac{\mathcal{G}(0)\delta\tau}{4\pi}}. \quad (2.47)$$

Полезно сравнить релаксацию температуры в квази-равновесном режиме и характерную энергию ε_d в неравновесном режиме, описываемую уравнениями (2.47) и (2.43) на временах $\tau \ll 2\pi/\delta\mathcal{G}_r$ соответственно. Первая демонстрирует экспоненциальный спад, в то время как последняя уменьшается степенным образом.

2.5 Релаксация электронов островка, режим сильной кулоновской блокады, $g \ll 1$

Как и в предыдущей главе мы считаем, что электронный заряд внутри островка быстро растекается, и только после этого начинается медленная релаксация электронного распределения. В режиме сильной кулоновской блокады такая картина вполне оправдана, так как $1/\tau_{RC} \simeq g \max\{T, \Delta\} \gg 1/\tau_E$.

Как и в первой главе мы концентрируемся на наиболее интересном случае окрестности точки вырождения: $q = k + 1/2$, где k целое. Напомним, что универсальный гамильтониан (1.3) в этом случае может быть упрощен редукцией гильбертова пространства электронов на островке к двум зарядовым состояниям: с $Q = k$ и $Q = k + 1$ (см. Рис. 1.3). Спроецированный на эти два состояния гамильтониан принимает форму (3.3)

с той лишь разницей, что слагаемое H_0 описывает на этот раз электроны двух резервуаров:

$$H_t = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha S^- + \text{h.c.} \quad (2.48)$$

Здесь S^z , $S^\pm = S^x \pm iS^y$, как обычно, – операторы (изо)спина $1/2$.

2.5.1 Неравновесные псевдо-фермионы

Для квантового описания спиновых операторов, как и в предыдущей главе, будем использовать псевдо-фермионы Абрикосова [51]. Вводим двух-компонентные псевдо-фермионные операторы ψ_α^\dagger , ψ_α такие, что

$$S^i = \psi_\alpha^\dagger S_{\alpha\beta}^i \psi_\beta. \quad (2.49)$$

Неравновесные псевдо-фермионы обсуждались ранее в работах [92, 93]. Как обычно вводится келдышевский контур и удваивается число фермионов. Система, находящаяся в неравновесии, требует очень аккуратного рассмотрения. Псевдо-фермионная функция распределения \mathcal{F}_ε не известна a priori. Она должна определяться самосогласованно из соответствующего кинетического уравнения. Псевдо-фермионы так же подчиняются ограничению на их число:

$$\mathcal{N}(t) = \sum_{\alpha} \psi_\alpha^\dagger(t) \psi_\alpha(t) = 1. \quad (2.50)$$

Таким образом, состояние системы должно проецироваться на состояние с $\mathcal{N} = 1$ в каждый момент времени. Число частиц сохраняется гамильтонианом (2.1)-(2.2) (соответствующий оператор коммутирует с гамильтонианом). Следовательно, оператор проекции на подпространство физических состояний $\mathcal{N} = 1$ также коммутирует с гамильтонианом. Это означает, что проецирование на подпространство физических состояний необходимо осуществить только в одной точке келдышевского контура. Мы вставляем множитель $\exp(\eta \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha})$ в матрицу плотности и берем предел

$\eta \rightarrow -\infty$ в конце каждого вычисления. Тогда

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \frac{\langle \mathcal{O} \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}}{\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}}. \quad (2.51)$$

Если оператор \mathcal{O} имеет нулевое среднее значение в секторе с нулевым псевдо-фермионным числом ($\mathcal{N} = 0$), уравнение (2.51) может быть упрощено

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \frac{\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{pf}}}{\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}}. \quad (2.52)$$

Диссипативное действие следует переписать в келдышевском представлении. Мы подставляем выражение (2.49) в гамильтониан (2.48) и интегрируем по электронным полям островка и резервуара. Это приводит к следующему действию

$$\begin{aligned} S = & \int dt \bar{\psi} \left(i\partial_t - \frac{\sigma_z \Delta}{2} + \eta \right) \psi \\ & + \frac{g}{8} \int \bar{\psi}(t) \gamma_i \sigma_- \psi(t) \Pi_{ij}(t, t') \bar{\psi}(t') \gamma_j \sigma_+ \psi(t') dt dt' \end{aligned} \quad (2.53)$$

Здесь σ – матрицы Паули ($\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$) и

$$\gamma_1 = \gamma_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \gamma_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

матрицы в пространстве Келдыша. Псевдо-фермионные операторы ψ следует понимать как векторы в тензорном произведении изоспинового и келдышевского пространства. Π_{ij} обозначает матрицу поляризационного оператора (2.6)-(2.7). Далее мы выписываем преобразование Вигнера квантового кинетического уравнения для псевдо-фермионной функции распределения

$$-i\partial_{\tau} \mathcal{F}_{\varepsilon}(\tau) = \Sigma_{\varepsilon}^K(\tau) - \Sigma_{\varepsilon}^R(\tau) \mathcal{F}_{\varepsilon}(\tau) + \Sigma_{\varepsilon}^A(\tau) \mathcal{F}_{\varepsilon}(\tau). \quad (2.55)$$

Здесь как и раньше, мы пренебрегли всеми производными по медленному времени τ в правой части. Все функции, входящие в уравнение (2.55), понимаются как матрицы в изоспиновом пространстве. Из вида

уравнения (2.55) мы заключаем, что характерное время релаксации псевдо-фермионной функции распределения $\mathcal{F}_\varepsilon(\tau)$ есть $\tau_{\text{pf}} \sim 1/(g \max\{\Delta, T\})$ и существенно меньше чем τ_E .

Это позволяет нам считать псевдо-фермионы находящимися в стационарном состоянии. Тогда левая часть кинетического уравнения (2.55) исчезает, и мы приходим к самосогласованному уравнению на псевдо-фермионное распределение:

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\tau) = \frac{\Sigma_\varepsilon^K(\tau)}{2i \operatorname{Im} \Sigma_\varepsilon^R(\tau)}. \quad (2.56)$$

Учитывая (2.53), мы записываем уравнения для псевдо-фермионных собственных энергий (Рис. 3.7):

$$\begin{aligned} \Sigma_+(t, t') &= \frac{ig}{8} \sum_{ij} \Pi_{t't}^{ij} \gamma_j G_{tt', -\gamma_i}, \\ \Sigma_-(t, t') &= \frac{ig}{8} \sum_{ij} \Pi_{tt'}^{ji} \gamma_j G_{tt', +\gamma_i}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $G_{tt', \sigma}$ обозначает псевдо-фермионные функции Грина, соответствующие первой строке в уравнении (2.53), а Σ_\pm – матрицы в келдышевском пространстве. Нам понадобятся явные выражения для вигнеровских преобразований:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varepsilon, \sigma}^K &= -\frac{ig}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \Pi_\omega^R \operatorname{Im} G_{\varepsilon+\sigma\omega, -\sigma}^R \left\{ \mathcal{F}_{\varepsilon+\sigma\omega}^{-\sigma} B_\omega - \sigma \right\}, \\ \operatorname{Im} \Sigma_{\varepsilon, \sigma}^R &= -\frac{g}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \Pi_\omega^R \operatorname{Im} G_{\varepsilon+\sigma\omega, -\sigma}^R \left\{ B_\omega - \sigma \mathcal{F}_{\varepsilon+\sigma\omega}^{-\sigma} \right\}, \\ \operatorname{Re} \Sigma_{\varepsilon, \sigma}^R &= -\frac{g}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \Pi_\omega^R \operatorname{Re} G_{\varepsilon+\sigma\omega, -\sigma}^R B_\omega. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Здесь σ обозначает \pm и

$$G_{\varepsilon, \sigma}^R = \left(\varepsilon + \eta - \frac{\Delta\sigma}{2} + i0 \right)^{-1}. \quad (2.59)$$

Объединяя уравнения (2.56) и (2.58), находим следующее уравнение для псевдо-фермионной функции распределения

$$\mathcal{F}_\varepsilon^\sigma = \frac{B_{-\sigma(\varepsilon + \frac{\Delta\sigma}{2} + \eta)} \mathcal{F}^{-\sigma} - \sigma}{B_{-\sigma(\varepsilon + \frac{\Delta\sigma}{2} + \eta)} - \sigma \mathcal{F}^{-\sigma}} \quad (2.60)$$

где $\mathcal{F}^\sigma = \mathcal{F}_{\Delta\sigma/2-\eta}^\sigma$. Подставляя $\varepsilon = \Delta\sigma/2 - \eta$ мы приходим к самосогласованному уравнению на \mathcal{F}^σ :

$$B_{-\Delta}(\mathcal{F}^\sigma - \mathcal{F}^{-\sigma}) = (\mathcal{F}^\sigma \mathcal{F}^{-\sigma} - 1)\sigma. \quad (2.61)$$

Теперь нам необходимо исследовать асимптотические свойства функций \mathcal{F}^σ , при $\eta \rightarrow -\infty$. Естественно ожидать, что равновесное свойство

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \mathcal{F}^\sigma = 1 \quad (2.62)$$

остаётся справедливым и в неравновесии. Как легко проверить, это предположение удовлетворяет уравнению (2.61).

Для решения квантового кинетического уравнения (2.15), необходимо рассчитать $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$ в режиме сильной кулоновской блокады $g \ll 1$. С помощью уравнений (2.48) и (2.49), легко получить в нулевом порядке по g :

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{D}_{\omega,\text{pf}}^R &= \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \text{Im } G_{\varepsilon+\omega}^{R,-} \text{Im } G_\varepsilon^{R,+} (\mathcal{F}_\varepsilon^+ - \mathcal{F}_{\varepsilon+\omega}^-) \\ &= \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \Delta) (\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Теперь выражаем физическую корреляционную функцию через псевдофермионную $\text{Im } \mathcal{D}_{\omega,\text{pf}}^R$. Используя следующий результат для псевдофермионного числа в нулевом порядке по g

$$\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}} = \sum_\sigma \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \text{Im } G_{\varepsilon,\sigma}^R (\mathcal{F}_\varepsilon^\sigma - 1) = 1 - \frac{\mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^-}{2}, \quad (2.64)$$

получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{D}_\omega^R &= -\pi \delta(\omega + \Delta) \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{F}^- + 1}{2B_{-\Delta} + 1 - \mathcal{F}^-} \\ &= -\frac{\pi \delta(\omega + \Delta)}{B_\omega}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Уравнение (2.65) – есть обобщение равновесного результата для корреляционной функции $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$ (см. работы [58, 49]) на неравновесный случай.

Далее, используя уравнения (2.48) и (2.49), находим в нулевом порядке по g :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\omega,\text{pf}}^K &= -2i \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \text{Im} G_{\varepsilon+\omega,-}^R \text{Im} G_{\varepsilon,+}^R (1 - \mathcal{F}_{\varepsilon+\omega}^- \mathcal{F}_{\varepsilon}^+) \\ &= \pi i \delta(\omega + \Delta) (\mathcal{F}^+ \mathcal{F}^- - 1).\end{aligned}\quad (2.66)$$

Выражая физическую корреляционную функцию через псевдо-фермионную $\mathcal{D}_{\omega,\text{pf}}^K$, получаем

$$\mathcal{D}_{\omega}^K = -2\pi i \delta(\omega + \Delta).\quad (2.67)$$

Этот результат подразумевает, что бозевская функция распределения \mathcal{B}_{ω} определяется B_{ω} так же, как и в режиме слабой кулоновской блокады,

$$\mathcal{B}_{\omega} = B_{\omega}.\quad (2.68)$$

Прежде чем решать квантовое кинетическое уравнение, необходимо осуществить одно-петлевую перенормировку псевдо-фермионной теории. Это необходимо сделать для того, чтобы просуммировать все поправки, содержащие большие логарифмы (появляющиеся в пертурбативном анализе), и включить их в определение перенормированных физических констант теории.

2.5.2 Одно-петлевая структура псевдо-фермионной теории

В данном разделе мы устанавливаем неравновесное обобщение скейлинга основных параметров псевдо-фермионной теории (кулоновской щели Δ и константы связи g), функций Грина и среднего числа псевдо-фермионов $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}$. Мы ожидаем, что действие (2.53) может быть перенормировано при помощи единственного параметра Z , как и в равновесном случае [52, 54, 55]. Это оказалось действительно так, и полученная схема перенормировки явилась естественным обобщением равновесной. Перенормированная псевдо-

фермионная функция Грина принимает вид

$$\bar{G}_{\varepsilon,\sigma}^{R,A} = \frac{Z(\lambda)}{\varepsilon - \bar{\xi}_\sigma \pm i\bar{g}\Gamma_\sigma(\varepsilon)}, \quad \bar{\xi}_\sigma = -\eta + \sigma\bar{\Delta}/2, \quad (2.69)$$

где

$$Z(\lambda) = \left(1 + \frac{g}{2\pi^2}\lambda\right)^{-1/2}, \quad \lambda = \int \frac{B_\omega}{2\omega} d\omega. \quad (2.70)$$

Детали вычислений приведены в приложении Б.5. Непосредственной проверкой убеждаемся, что константа связи g и кулоновская щель Δ перенормируется следующим образом:

$$\bar{g} = gZ^2(\lambda), \quad \bar{\Delta} = \Delta Z^2(\lambda). \quad (2.71)$$

Для полноты картины перенормировки необходимо установить скейлинговую размерность псевдо-фермионного числа $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}$. Оказалось, что $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}$ перенормируется в полной аналогии с работой [52].

$$\overline{\langle N \rangle}_{\text{pf}} = \langle N \rangle_{\text{pf}} \quad (2.72)$$

Перенормировку завершает строгое доказательство соотношения (2.72) через уравнение Каллана-Симанчика, изложенное в приложении Б.5.

Интеграл в (2.70) берется по частотам $E_c \gg |\omega| \gg \omega_0 = \max\{T_r, \varepsilon_d, \bar{\Delta}\}$. Энергия ω_0 определяет естественный масштаб, на котором должна останавливаться РГ-процедура. Функция Грина (2.69) приобретает ширину

$$\Gamma_\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - \bar{\xi}_{-\sigma})[\bar{\mathcal{F}}^{-\sigma} + B_{\varepsilon - \bar{\xi}_{-\sigma}}], \quad (2.73)$$

где $\bar{\mathcal{F}}^\sigma \equiv \mathcal{F}_{\bar{\xi}_\sigma}^\sigma$. Таким образом, перенормированная физическая корреляционная функция становится равной

$$\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R = -Z^2(\lambda) \frac{\pi\delta(\omega + \bar{\Delta})}{B_\omega}, \quad (2.74)$$

$$\mathcal{D}_\omega^K = -2\pi i Z^2(\lambda) \delta(\omega + \bar{\Delta}).$$

2.5.3 Релаксация электронной функции распределения внутри островка

В этой части мы рассмотрим релаксацию в неравновесном режиме, $\tau_E \ll \tau_{ee}$. Мы сконцентрируемся на наиболее интересном случае кулоновского пика: $\Delta = 0$. Тогда квантовое кинетическое уравнение (2.15) сильно упрощается (см. ур. (2.39)):

$$\partial_\tau F_\varepsilon^d = -\frac{\mathcal{G}(\tau)\delta}{2\pi} (F_\varepsilon^d - F_\varepsilon^r), \quad (2.75)$$

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{g}{2} \left[1 + \frac{g\lambda}{2\pi^2} \right]^{-1}. \quad (2.76)$$

Подчеркнём, что кинетическое уравнение (2.75)-(2.76) *бесконечного* порядка по электронной функции распределения на островке. В самом деле, F_ε^d входит в λ через электрон-дырочную функцию распределения B_ω .

Формальное решение выглядит так

$$F_\varepsilon^d(\tau) = F_\varepsilon^r + (F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r) \exp \left[-\delta \int_0^\tau \frac{d\tau'}{2\pi} \mathcal{G}(\tau') \right]. \quad (2.77)$$

Функция $\mathcal{G}(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_\tau \mathcal{G}(\tau) = -\frac{\delta}{2\pi} \mathcal{G}^2(\tau) \left[\frac{\mathcal{G}(\tau)}{\mathcal{G}_r} - 1 \right]. \quad (2.78)$$

Решение (2.78) дается следующим выражением

$$\frac{\delta \mathcal{G}_r \tau}{2\pi} = f \left(\frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(0)} \right) - f \left(\frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(\tau)} \right), \quad (2.79)$$

$$f(z) = z + \ln(1 - z).$$

Используя соотношение

$$\delta \int_0^\tau \frac{d\tau'}{2\pi} \mathcal{G}(\tau') = \frac{\delta \mathcal{G}_r \tau}{2\pi} - \frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(0)} + \frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(\tau)}, \quad (2.80)$$

следующее из (2.78), мы получим

$$F_\varepsilon^d(\tau) = F_\varepsilon^r + (F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r) \exp \left[-\frac{\delta \mathcal{G}_r \tau}{2\pi} + \frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(0)} - \frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(\tau)} \right]. \quad (2.81)$$

Так как уравнение (2.79) не может быть решено аналитически относительно $\mathcal{G}(\tau)$, полезно рассмотреть предельные случаи.

Предположим, что эффективная энергия электронов островка $\varepsilon_d \gg T_r$ такова, что $\mathcal{G}(0) \gg \mathcal{G}_r$. Тогда, разлагая $f(z)$ в ряд по степеням z , находим

$$F_\varepsilon^d(\tau) = F_\varepsilon^r + \left(F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r \right) \times \exp \left[\frac{\mathcal{G}_r}{\mathcal{G}(0)} - \sqrt{\frac{\mathcal{G}_r^2}{\mathcal{G}^2(0)} + \frac{\delta\mathcal{G}_r\tau}{\pi}} \right]. \quad (2.82)$$

Уравнение (2.82) справедливо при условии $\mathcal{G}(\tau) \gg \mathcal{G}_r$, т.е., для не слишком больших времен: $\tau \ll \pi/\delta\mathcal{G}_r$. Стоит отметить, что стандартная экспоненциальная релаксация

$$F_\varepsilon^d(\tau) = F_\varepsilon^r + \left(F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r \right) \exp \left(-\frac{\delta\mathcal{G}(0)\tau}{2\pi} \right), \quad (2.83)$$

имеющая место в начальный момент $\tau \ll \pi\mathcal{G}_r/(\delta\mathcal{G}^2(0))$, перетекает в более медленный промежуточный режим $\pi\mathcal{G}_r/(\delta\mathcal{G}^2(0)) \ll \tau \ll \pi/(\delta\mathcal{G}_r)$:

$$F_\varepsilon^d(\tau) = F_\varepsilon^r + \left(F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r \right) \exp \left(-\sqrt{\frac{\delta\mathcal{G}_r\tau}{\pi}} \right). \quad (2.84)$$

На больших временах $\tau \gg \pi/(\delta\mathcal{G}_r)$ функция $\mathcal{G}(\tau)$ почти сравнивается с \mathcal{G}_r , и система вновь возвращается к стандартной экспоненциальной эволюции:

$$F_\varepsilon^d(\tau) = F_\varepsilon^r + \left(F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r \right) \exp \left[-\frac{\delta\mathcal{G}_r\tau}{2\pi} \right]. \quad (2.85)$$

Та же самая экспоненциальная релаксация, как в ур. (2.85), справедлива и в случае, когда эффективная энергия электронов островка ε_d лишь слегка выше чем T_r , так что $\mathcal{G}(0) - \mathcal{G}_r \ll \mathcal{G}(0), \mathcal{G}_r$.

2.5.4 Релаксация электронной температуры внутри островка

Теперь мы исследуем релаксацию в квазиравновесном режиме, $\tau_E \gg \tau_{ee}$.

Кулоновский пик, $\Delta = 0$

Мы начнём с режима кулоновского пика: $\Delta = 0$. В квазиравновесном режиме в правую часть уравнения (2.75) необходимо добавить интеграл столкновений $I_\varepsilon^{(ee)}$, описывающий электрон-электронное взаимодействие внутри островка. Именно эта добавка делает электронное распределение фермиевским. Используя хорошо известное соотношение $\int d\varepsilon \varepsilon I_\varepsilon^{(ee)} = 0$, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{dT_d^2}{d\tau} = -\frac{\mathcal{G}(\tau)\delta}{2\pi} \left(T_d^2(\tau) - T_r^2 \right), \quad (2.86)$$

где $\mathcal{G}(\tau)$ дается выражением (2.76). В квазиравновесном случае мы не можем вывести замкнутое уравнение для $\mathcal{G}(\tau)$ как в неравновесном режиме, ввиду присутствия дополнительного слагаемого $I_\varepsilon^{(ee)}$ в правой части (2.75).

Предполагая, что $T_d(0) \gg T_r$, λ оценивается с логарифмической точностью как $\lambda = \ln E_c/T_d$, находим из (2.86):

$$\mathcal{G}(\tau) = \mathcal{G}(0) \left[1 + \frac{\delta\mathcal{G}^2(0)\tau}{2\pi^3} \right]^{-1/2} \quad (2.87)$$

и

$$T_d(\tau) = T_d(0) \exp \left[\frac{\pi^2}{\mathcal{G}(0)} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\delta\mathcal{G}^2(0)\tau}{2\pi^3}} \right) \right]. \quad (2.88)$$

Решение (2.88) справедливо до тех пор, пока выполняется условие $T_d(\tau) \gg T_r$.

Если $T_d(0) \gg T_r \exp(\pi^2/\mathcal{G}(0))$, то экспоненциальная релаксация

$$T_d(\tau) = T_d(0) \exp \left[-\frac{\delta\mathcal{G}(0)\tau}{4\pi} \right], \quad (2.89)$$

развивающаяся в начальный период $\tau \ll 2\pi^3/[\delta\mathcal{G}^2(0)]$, перетекает в режим более медленной релаксации в промежуточном временном интервале:

$$T_d(\tau) = T_d(0) \exp \left[-\sqrt{\frac{\pi\delta\tau}{2}} \right], \quad (2.90)$$

$$\frac{2\pi^3}{\delta\mathcal{G}^2(0)} \ll \tau \ll \frac{2}{\pi\delta} \ln^2 \frac{T_d(0)}{T_r}.$$

Отметим, что в этом режиме температурная релаксация не зависит от величины $\mathcal{G}(0)$, определяющей кондуктанс ОЭТ. В противоположном случае ($T_d(0) \ll T_r \exp(\pi^2/\mathcal{G}(0))$) температура $T_d(\tau)$ эволюционирует в соответствии с уравнением (2.89) для $\tau \ll (4\pi/\delta\mathcal{G}(0)) \ln T_d(0)/T_r$.

Через длительное время $\tau \gg (4\pi/\delta\mathcal{G}_r) \ln T_d(0)/T_r$ температура $T_d(\tau)$ становится порядка T_r : $T_d(\tau) - T_r \ll T_r$ и мы возвращаемся к стандартной экспоненциальной релаксации:

$$T_d(\tau) = T_r + (T_d(0) - T_r) \exp\left(-\frac{\delta\mathcal{G}_r\tau}{4\pi}\right). \quad (2.91)$$

Эволюция электронной температуры островка представлена на Рис. 2.3. Отметим универсальность релаксации на больших временах, когда разница температур между электронами островка и резервуаров становится малой. В неравновесном $\tau_E \ll \tau_{ee}$ и квазиравновесном $\tau_E \gg \tau_{ee}$ режимах, релаксация экспоненциальная с соответствующим декрементом, пропорциональным $\delta\mathcal{G}_r$. Такая же экспоненциальная релаксация, как в ур. (2.91), имеет место при температуре электронов островка $T_d(0)$ слегка больше: T_r , $T_d(0) - T_r \ll T_d(0), T_r$.

Необходимо отметить, что существует временной параметрический интервал $\mathcal{G}_r/(\delta\mathcal{G}(0)^2) \ll \tau \ll 1/(\delta\mathcal{G}(0)^2)$, когда релаксация функции распределения идет существенно медленней $\ln(F_\varepsilon^d(\tau) - F_\varepsilon^r)/(F_\varepsilon^d(0) - F_\varepsilon^r) \sim -\sqrt{\tau}$, чем релаксация ферми-распределения в квазиравновесном режиме, т.е. релаксация температуры $\ln(T_d/T_d(0)) \sim -\tau$.

Кулоновская долина, $\bar{\Delta} \gg T_d(0)$

Теперь мы рассмотрим релаксацию электронной температуры на островке в режиме кулоновской долины, $\bar{\Delta} \gg T_d(0)$. Используя уравнение (2.74), переписываем квантовое кинетическое уравнение (2.15) в виде

$$\partial_\tau F_\varepsilon^d = \frac{\bar{g}\delta}{4\pi} \left(F_{\varepsilon+\bar{\Delta}}^r - F_\varepsilon^d + \frac{1 - F_\varepsilon^d F_{\varepsilon+\bar{\Delta}}^r}{B_{-\bar{\Delta}}} \right). \quad (2.92)$$

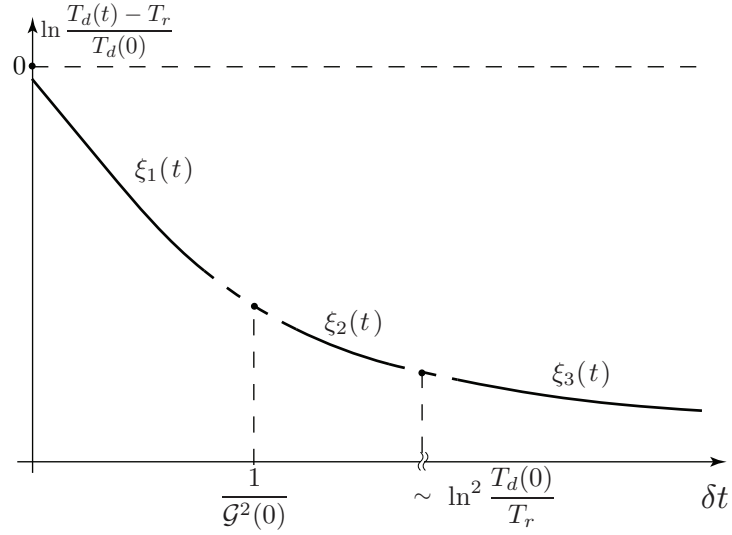


Рис. 2.3: Динамика релаксации температуры, $g \ll 1$, $T_d(0) \gg T_r \exp(\pi^2/\mathcal{G}(0))$. Здесь $\xi_1(t) \sim -\mathcal{G}(0)\delta t$, $\xi_2(t) \sim -\sqrt{\delta t}$, $\xi_3(t) \sim -\mathcal{G}_r\delta t$.

Вспомним, что рассматривается квазиравновесный режим. Тогда необходимо добавить в правую часть уравнения (2.92) интеграл столкновений $I_\varepsilon^{(ee)}$, описывающий электрон-электронное взаимодействие внутри островка. Далее будем считать, что выполняется условие $T_d(0) \gg T_r$. При помощи результатов:

$$\int d\varepsilon \varepsilon (1 - F_\varepsilon^d F_{\varepsilon-\omega}^r) = T_d^2 \operatorname{sgn} \omega \left[\frac{\omega^2}{T_d^2} - \frac{\pi^2}{3} - 4\operatorname{li}_2(-e^{-|\omega|/T_d}) + \frac{4|\omega|}{T_d} \ln \left(1 + e^{-|\omega|/T_d} \right) \right], \quad (2.93)$$

$$B_\omega = \frac{2T_d}{\omega} \ln \left(2 \cosh \frac{\omega}{2T_d} \right), \quad (2.94)$$

верных при $T_r \ll T_d$ ($\operatorname{li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ обозначает интегральный логарифм), мы получаем из (2.92)

$$\frac{dT_d}{d\tau} = -\frac{3\delta\mathcal{G}(\tau)}{4\pi^3} T_d(\tau), \quad (2.95)$$

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{\bar{g}\bar{\Delta}}{T_d(\tau)} \exp\left(-\frac{\bar{\Delta}}{T_d(\tau)}\right). \quad (2.96)$$

Мы можем оценить параметр λ с логарифмической точностью $\lambda = \ln E_c/\bar{\Delta}$, так как температура электронов островка $T_d \ll \bar{\Delta}$. Таким образом, \bar{g} и $\bar{\Delta}$ не

зависят от τ . Интегрирование уравнения (2.92) даёт

$$\frac{3\delta\bar{g}\tau}{4\pi^3} = h\left(\frac{\bar{\Delta}}{T_d(0)}\right) - h\left(\frac{\bar{\Delta}}{T_d(\tau)}\right), \quad (2.97)$$

$$h(z) = e^z/z - \text{Ei}(z), \quad (2.98)$$

где $\text{Ei}(z) = -\int_{-z}^{\infty} dt \exp(-t)/t$ обозначает интегральную экспоненту.

Используя асимптотику $h(z) = \exp(z)/z^2$ при $z \gg 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\tau) = \mathcal{G}(0) & \left[1 + \frac{T_d(0)}{\bar{\Delta}} \ln \left(1 + \frac{3\delta\bar{\Delta}\mathcal{G}(0)\tau}{4\pi^3 T_d(0)} \right) \right]^{-1} \\ & \times \left[1 + \frac{3\delta\bar{\Delta}\mathcal{G}(0)\tau}{4\pi^3 T_d(0)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.99)$$

и

$$T_d(\tau) = T_d(0) \left[1 + \frac{T_d(0)}{\bar{\Delta}} \ln \left(1 + \frac{3\delta\bar{\Delta}\mathcal{G}(0)\tau}{4\pi^3 T_d(0)} \right) \right]^{-1}. \quad (2.100)$$

Результаты (2.99) и (2.100) справедливы для не слишком больших времен

$$\tau \ll \frac{4\pi^3 T_d(0)}{3\delta\bar{\Delta}\mathcal{G}(0)} \exp\left(\frac{\bar{\Delta}}{T_r}\right). \quad (2.101)$$

Как и ожидалось, из-за экспоненциально малого кондактанса ОЭТ в приближении последовательного туннелирования температурная релаксация очень медленна, а именно, логарифмическая. Таким образом, полезно рассмотреть вклад в температурную релаксацию от ко-туннелирования.

Режим неупругого ко-туннелирования

Как хорошо известно, из-за экспоненциального подавления последовательного туннелирования в кулоновской долине при $T_d \ll \bar{\Delta}$ транспорт определяет неупругое ко-туннелирование - процесс более высокого порядка [94]. В отличие от случая последовательного туннелирования, вклад в интеграл столкновений в правой части (2.15) от ко-туннелирования приходит с частот порядка $\omega \sim T_d \ll |\bar{\Delta}|$.

В псевдо-фермионной технике неупругое ко-туннелирование проявляется как уширение δ -пиков мнимой части запаздывающей и опережающей псевдо-фермионной функции Грина [58, 49]. При учёте уравнения (2.73) подынтегральное выражение в (2.63) приобретает сложную полюсную структуру. Существуют два близко лежащих полюса

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \xi_+ \pm i\bar{g}\Gamma_+(\bar{\xi}_+), \\ \varepsilon &= \xi_- - \omega \pm i\bar{g}\Gamma_-(\bar{\xi}_-).\end{aligned}\tag{2.102}$$

Кроме того, существует дополнительный ряд полюсов мацубаровского типа, приходящих из функций распределения $\mathcal{F}_\varepsilon^+$ и $\mathcal{F}_{\varepsilon+\omega}^-$. Они приводят к логарифмически расходящимся суммам. Последние контролируются схемой перенормировки. В нашем случае все главные логарифмы уже включены в определение перенормированных констант \bar{g} и $\bar{\Delta}$ надлежащим выбором точки перенормировки. Таким образом, мы опускаем все расходящиеся суммы мацубаровского типа. Разлагаясь в ряд по степеням $\omega/\bar{\Delta}$, мы получаем

$$\text{Im } \mathcal{D}_{\omega,\text{pf}}^R = \frac{\bar{g}Z^2\omega}{8\pi} \frac{\mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^-}{\bar{\Delta}^2}, \quad |\omega| \ll |\bar{\Delta}|.\tag{2.103}$$

Далее мы используем те же аргументы, которые привели нас к выражению (2.65). Функция $\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R$ тогда становится равной

$$\text{Im } \mathcal{D}_\omega^R = -\frac{\bar{g}Z^2}{4\pi} \frac{\omega}{\bar{\Delta}^2}, \quad |\omega| \ll |\bar{\Delta}|.\tag{2.104}$$

Используя результат (2.104), мы переписываем квантовое кинетическое уравнение (2.15) в виде

$$\partial_\tau F_\varepsilon^d = \frac{\bar{g}^2\delta}{16\pi^3\bar{\Delta}^2} \int d\omega \omega \left[(F_{\varepsilon-\omega}^r - F_\varepsilon^d) B_\omega + 1 - F_\varepsilon^d F_{\varepsilon-\omega}^r \right].\tag{2.105}$$

Напомним, что мы рассматриваем случай квазиравновесия. Уравнение (2.105) совпадает с кинетическим уравнением, выведенным в режиме ко-туннелирования в работе [22]. Теперь необходимо добавить в правую часть (2.105) интеграл столкновений $I_\varepsilon^{(ee)}$, описывающий электрон-электронное взаимодействие внутри островка. В случае $T_d - T_r \ll T_r$ мы

получаем

$$\frac{dT_d}{d\tau} = -\frac{3\delta\mathcal{G}_r}{5\pi}(T_d - T_r), \quad (2.106)$$

где $\mathcal{G}_r = \bar{g}^2 T_r^2 / (6\bar{\Delta}^2)$ обозначает равновесный кондактанс ОЭТ в приближении ко-туннелирования. В противоположном пределе $T_d \gg T_r$, используя (2.105), мы приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{dT_d}{d\tau} = -\frac{3\delta\mathcal{G}(\tau)}{20\pi}T_d(\tau), \quad (2.107)$$

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{\bar{g}^2 T_d^2(\tau)}{6\bar{\Delta}^2}, \quad (2.108)$$

которые определяют температурную релаксацию. Важно отметить, что если заменить \mathcal{G}_r на $\mathcal{G}(\tau)$ в уравнении (2.106), оно становится похожим на уравнение (4) работы [20] для $V = 0$ и в отсутствии фононов. Однако, ввиду различия численных коэффициентов в правой части уравнений (2.106) и (2.107), подобная замена невозможна даже на уровне интерполяции. Таким образом, в случае $T_d - T_r \sim T_r$ необходимо решать уравнение (2.105) численно.

Хотя ур. (2.106) приводит к стандартной экспоненциальной релаксации, результат (2.107) приводит к степенной эволюции. В самом деле, решая систему (2.107)-(2.108), получаем

$$\mathcal{G}(\tau) = \mathcal{G}(0) \left(1 + \frac{3\delta\mathcal{G}(0)\tau}{10\pi}\right)^{-1} \quad (2.109)$$

и

$$T_d(\tau) = T_d(0) \left[1 + \frac{3\delta\mathcal{G}(0)\tau}{10\pi}\right]^{-1/2} \quad (2.110)$$

Уравнения (2.109) и (2.110) справедливы для времен

$$\tau \ll \frac{10\pi}{3\delta\mathcal{G}(0)} \frac{T_d^2(0)}{T_r^2}. \quad (2.111)$$

2.6 Выводы

В этой главе изучена динамика релаксации ОЭТ в полностью неравновесных условиях. Метод кинетического уравнения оказался наиболее подходящим

для решения поставленной задачи. Аналитические результаты получены в предельных случаях слабой $g \gg 1$ и сильной $g \ll 1$ кулоновской блокады. Все релаксационные уравнения (см. уравнения (2.39), (2.75), (2.86), (2.95)), полученные в работе, обнаруживают неожиданную общность. А именно,

$$\dot{X}_d \sim -\delta \mathcal{G}(X_d)(X_d - X_r). \quad (2.112)$$

Здесь X_d - релаксирующая физическая величина (температура, функция распределения), и $\mathcal{G}(X_d)$ - кондактанс ОЭТ, который сам по себе зависит от X_d . Уравнение (2.112) имеет прозрачную физическую интерпретацию. В самом деле, характерный временной масштаб в правой части уравнения (2.112) есть просто время пребывания частицы внутри металлического островка, [24] т.е. $\tau_E^{-1} \sim \mathcal{G}\delta$. Обратное время пребывания может быть так же оценено как отношение теплового кондактанса κ к теплоемкости островка. Последняя пропорциональна T_d/δ . Общность уравнения (2.112), однако, обманчива, так как уравнение приводит к совершенно различной временной эволюции физических величин в случае малых и больших g .

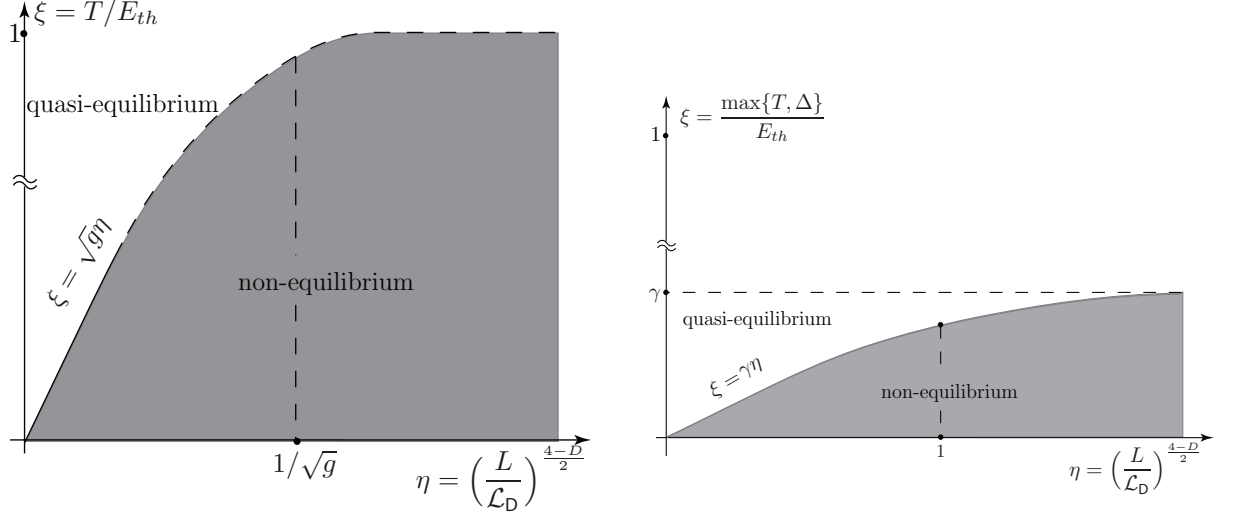
На протяжении всего анализа мы пренебрегали влиянием электрон-фононного (э-ф) взаимодействия. Причина в следующем. Декремент э-ф затухания был хорошо изучен для двумерного электронного газа с беспорядком [95]. Была найдена следующая оценка:

$$\tau_{e-ph}^{-1} \approx 8.3 \times 10^8 T^3 [s^{-1} K^{-3}]. \quad (2.113)$$

Электрон-электронное (э-э) затухание в мезоскопических системах также подробно изучено (см., например, [96]). Для малых диффузных систем и при $T \ll E_{Th}$ существует два параметрических случая [97, 96]

$$\tau_{ee}^{-1} \sim \frac{T^2 \delta}{E_{Th}^2}, \quad L \gg \mathcal{L}_D, \quad (2.114)$$

$$\tau_{ee}^{-1} \sim \frac{T^2}{E_F}, \quad L \ll \mathcal{L}_D, \quad (2.115)$$



(a) $g \gg 1$. Неравновесный (квазиравновесный) режим преобладает в (не) заштрихованной области. При $\Delta = 0$, $\gamma = \sqrt{g}$ и $\gamma = g$ для режима ко-туннелирования при $T \ll \Delta$.

(b) $g \ll 1$. Неравновесный (квазиравновесный) режим преобладает в (не) заштрихованной области.

Рис. 2.4: Фазовые диаграммы режимов релаксации для $g \gg 1$ и $g \ll 1$

где $\mathcal{L}_{\mathbb{D}} = (k_F l)^{\frac{2}{4-\mathbb{D}}}/k_F$ и L обозначает размер островка. Уравнение (2.115) – является типичное ферми-жидкостное выражение и набирается с больших импульсов порядка обратной длины экранировки. Верхнее уравнение имеет диффузионное происхождение и приходит с импульсов $\sim 1/L$. Обсудим, какой режим преобладает в различных параметрических ситуациях. Релаксация, обусловленная туннелированием электронов может быть оценена как

$$1/\tau_E \sim \mathcal{G}\delta. \quad (2.116)$$

Сравнивая уравнения (2.114), (2.115) и (2.116), можно видеть, что в пределах $g \gg 1$ и $g \ll 1$ возможна, как квазиравновесная, так и неравновесная релаксация. Соответствующие фазовые диаграммы представлены на Рис. 2.4(a) и 2.4(b).

Для оценки э-э затухания мы используем экспериментальные данные работы [98], где был исследован эффект кулоновской блокады для маленького

островка двумерного электронного газа. Экспериментальные данные: среднее расстояние между уровнями $\delta \approx 85 \text{ mK}$; энергия Ферми $E_F \approx 47 \text{ K}$; упругая длина свободного пробега $l \approx 15 \text{ }\mu\text{m}$; размер островка $L \approx 1 \text{ }\mu\text{m}$. Приведённые данные позволяют нам оценить энергию Таулесса $E_{\text{Th}} \approx 8 \text{ K}$ и декремент э-э затухания

$$\tau_{ee}^{-1} \approx 1.7 \times 10^8 T^2 [K^{-2}s^{-1}]. \quad (2.117)$$

Типичная температура современного мезоскопического эксперимента $T \lesssim 100 \text{ mK}$. Как видно, с понижением температуры декремент э-ф затухания быстро уменьшается. С другой стороны, скорость релаксации, обусловленная электронным обменом между островком и резервуарами:

$$\tau_E^{-1} \sim g \times 10^8 [s^{-1}] \quad (2.118)$$

Оценки (2.113)-(2.118) показывают, что для всех рабочих температур э-ф взаимодействием можно пренебречь. Далее, сравнивая оценки (2.117) и (2.118), заключаем, что при изменении g , оба сценария релаксации, обсуждаемых в работе, действительно реализуемы в эксперименте.

В дополнение к релаксации, рассмотренной выше и обусловленной обменом электронами с резервуарами, существует дополнительный механизм энергетической релаксации, обусловленный кулоновским взаимодействием U_{ir} электронов островка с электронами резервуаров. Для простоты мы предположим, что типичный параметр взаимодействия $r_s \sim 1/(k_F a_B) \sim 1$, где a_B обозначает Борковский радиус. В случае $L \ll \mathcal{L}_{\mathbb{D}}$ скорость релаксации из-за взаимодействия U_{ir} электронов в островке с электронами в резервуарах может быть оценена как

$$\frac{1}{\tau_{ee}^{(ir)}} \sim [\nu_d U_{ir}(k_F)]^2 \frac{T^2}{E_F}. \quad (2.119)$$

Здесь $U_{ir}(k)$ обозначает преобразование Фурье от взаимодействия $U_{ir}(\mathbf{r})$. При

$k_F d \gg 1$ $U_{ir}(k_F)$ сильно подавлено, $\nu_d U_{ir}(k_F) \ll 1$ и

$$\frac{1}{\tau_{ee}^{(ir)}} \ll \frac{1}{\tau_{ee}}. \quad (2.120)$$

В противоположном пределе большого островка $L \gg \mathcal{L}_{\mathbb{D}}$, и при $a_B \ll L$ оценка дает

$$\frac{1}{\tau_{ee}^{(ir)}} \sim \frac{U_{ir}^2(k_L)}{U^2(k_L) - U_{ir}^2(k_L)} \frac{1}{\nu_d U(k_L)} \frac{T^2}{E_{Th}^2} \delta. \quad (2.121)$$

Здесь $k_L \sim 1/L$ и $U(k)$ обозначает Фурье образ взаимодействия между электронами островка, $k = 0$ компонента которого приводит к зарядовому члену H_c в гамильтониане (1.6). Как можно видеть, оба случая $\tau_{ee} \gg \tau_{ee}^{(ir)}$ и $\tau_{ee} \ll \tau_{ee}^{(ir)}$ возможны при $L \gg \mathcal{L}_{\mathbb{D}}$.

При $d \ll L$, где d - характерная длина туннельного контакта между островком и резервуаром, выражение (2.121) можно упростить:

$$\frac{1}{\tau_{ee}^{(ir)}} \sim \frac{a_B}{d} \frac{T^2}{E_{Th}^2} \delta. \quad (2.122)$$

Для эксперимента [98] мы оценили Боровский радиус $a_B \approx 10 \text{ nm}$ и предположили типичный размер d порядка 100 nm . Таким образом, мы ожидаем, что режим, в котором главный механизм релаксации энергии электронов островка обусловлен электронным обменом, вполне достигим в лабораторных условиях.

Мы исследовали тепловой транспорт и процессы релаксации в ОЭТ с большим числом транспортных каналов в широком интервале параметров. В режиме линейного отклика мы получили аналитические выражения для транспортных коэффициентов (кондактанс, тепловой кондактанс и отклик электрического тока на разность температур) во всем интервале значений g . Оказалось возможным придать коэффициентам линейного отклика ферми-жидкостной вид. Существует, однако, важная разница, а именно: туннельная плотность состояний претерпевает сильную перенормировку, обусловленную кулоновским взаимодействием. Последняя приводит к

нарушению закона Видемана-Франца: в пределе $g \gg 1$ отношение Лоренца \mathcal{L} приобретает слабую периодическую зависимость от затворного напряжения (предвестник кулоновской блокады). Метод квантового кинетического уравнения, дополненный неравновесным действием АЭШ, позволяет произвести точный учёт кулоновского взаимодействия. Мы получили временную эволюцию электронной температуры (в квазиравновесном режиме) и функции распределения (в неравновесном режиме) островка ОЭТ, обусловленную электронным обменом между островком и резервуаром. Соответствующий интеграл столкновений всегда нелокален по энергии, ввиду неупругой природы кулоновского взаимодействия. Излучение плазмонной моды φ всегда сопровождает туннелирование. Это приводит, вообще говоря, к довольно сложным интегро-дифференциальным кинетическим уравнениям. Удалось показать, что кинетические уравнения могут быть редуцированы к простым дифференциальным в ряде широких параметрических режимов, а именно: $g \gg 1$ (ОЭТ со слабой кулоновской блокадой) и $g \ll 1$ (ОЭТ с сильной кулоновской блокадой в приближении последовательного туннелирования с учётом кулоновской перенормировки). Подобное упрощение достигается благодаря выраженному разделению масштабов в задаче $g\delta \ll T_d$ или $g\delta \ll \varepsilon_d$. В самом деле, характерная частота, с которой меняется функция распределения $\omega \sim g\delta$, в то время как масштаб, на котором осуществляется перенормировка $\omega \gtrsim T_d$ или $\omega \gtrsim \varepsilon_d$. Упомянутое разделение и позволяет нам сначала учесть кулоновское взаимодействие, а затем решить задачу временной эволюции.

Квантовые флуктуации заряда сильно меняют законы релаксации в сравнении с обычными экспоненциальными, которые свойственны квазиклассической физике при $g \gg 1$ и ортодоксальной теории при $g \ll 1$. Режим $g \ll 1$, $\Delta \gg T$ контролируется процессом ко-туннелирования. В последнем случае кинетическое уравнение сохраняет

интегро-дифференциальную форму и может быть решено численно. Измерения предсказанной релаксации остаются сложной экспериментальной задачей.

Глава 3

Неравновесный адмиттанс в одно-электронной коробке в режиме сильной кулоновской блокады

3.1 Введение

Благодаря недавнему прогрессу в изучении неравновесных систем, в центре теоретических [22, 24, 23, 78, 79, 99, 100] и экспериментальных [8, 63, 10] исследований оказалась кулоновская блокада при неравновесных условиях. Как известно, простейшей мезоскопической системой, обнаруживающей кулоновскую блокаду, является ОЭК.

В этой главе будет рассмотрена задача о вычислении адмиттанса ОЭК в неравновесных условиях в режиме сильной кулоновской блокады $g \ll 1$. Напомним, что представляет из себя ОЭК. Металлический островок (см. Рис.3.1). соединен с равновесным электронным резервуаром (температура T_r) туннельным контактом. Островок связан емкостным образом с затворным электродом. Потенциал островка контролируется напряжением на затворном электроде U_g . Функция распределения электронов в резервуаре предполагается равновесной (ферми-распределение), в то время как распределение электронов F_ε^d в островке произвольно.

Как и в предыдущей главе мы допустим, что характерная энергия электронов на островке подчиняется условию

$$\delta \ll \varepsilon_d \ll E_c, E_{Th}, \quad (3.1)$$

а безразмерный кондактанс туннельного соединения будем считать малым $g \ll 1$. Основная динамическая характеристика ОЭК – это адмиттанс. Недавний эксперимент [18] исследовал диссипацию энергии и адмиттанс при промежуточных температурах (3.1). Адмиттанс измерялся при фиксированной частоте как функция амплитуды накачки U_Ω и постоянной составляющей затворного напряжения U_0 в широком параметрическом режиме. Теоретический анализ данных в работе [18] проводился в предположении, что отклик тока на приложенное переменное напряжение линеен: электроны островка предполагались находящимися в равновесии с резервуаром. Однако это не было проверено экспериментально. Естественно ожидать, что это предположение нарушается для достаточно больших амплитуд U_Ω .

В этой главе будет изучен адмиттанс ОЭК в неравновесных условиях. Рассматривается линейный отклик ОЭК с произвольным электронным распределением внутри островка на приложенное переменное затворное напряжение

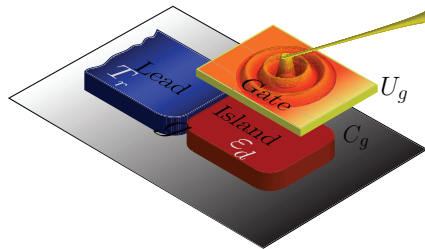


Рис. 3.1: Система. ОЭК поддерживается при постоянном затворном потенциале U_0 . Ток через туннельное соединение вызван малым переменным затворным напряжением $U_g(t)$.

3.2 Вычисление адмиттанса и диссипации в режиме сильной кулоновской блокады

Как обсуждалось в главе 1 диссертации, адмиттанс системы определяется авто-корреляционной функцией флуктуирующего числа частиц (1.19). В силу присутствия кулоновского взаимодействия, поведение авто-корреляционной функции нетривиально. Она соответствует коллективным бозонным модам, по аналогии с ферми-жидкостью, где коррелятор плотность-плотность определяется электрон-дырочными возбуждениями [41, 103, 104]. Последние определяют поведение авто-корреляционной функции в отсутствие кулоновского взаимодействия. В неравновесном режиме мы ожидаем, что распределение коллективных мод отличается от распределения электрон-дырочных пар. Как показано в главе 2 диссертации, распределение коллективных мод совпадает с таковым для электрон-дырочных пар даже вне равновесия (см. уравнения (2.7) (2.10)):

$$\mathcal{B}_\omega(\tau) = B_\omega(\tau) = \frac{\int [1 - F_\varepsilon^d(\tau) F_{\varepsilon-\omega}^r(\tau)] d\varepsilon}{\int [F_\varepsilon^d(\tau) - F_{\varepsilon-\omega}^r(\tau)] d\varepsilon}. \quad (3.2)$$

В равновесии, $B_\omega = \coth(\omega/2T_r)$.

3.2.1 Адмиттанс

Вычисление адмиттанса в неравновесном случае похоже на изложенный в главе 1 вывод для равновесного случая. Поэтому ниже мы приводим только главные шаги вывода результата. Как обычно, в режиме сильной кулоновской блокады мы фокусируем наше внимание на окрестности кулоновского пика: $q = k + 1/2$, где k целое. Транспорт в этом случае доминируется двумя ближайшими по энергии зарядовыми состояниями. Следуя работе [27], записываем гамильтониан (1.3) в редуцированном гильбертовом пространстве электронов островка, учитывая только два зарядовых состояния: $Q = k$ и $Q = k + 1$ (см. Рис. 1.3). В этом

случае спроектированный гамильтониан принимает форму матрицы 2×2 , действующей в пространстве этих состояний:

$$\mathcal{H} = H_0 + H_t + \Delta S_z + \Delta^2/4E_c, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{H}_t = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha S^- + \text{H.c.} \quad (3.4)$$

и S^z , $S^\pm = S^x \pm iS^y$ обычные операторы $1/2$ изоспина. Адмиттанс пропорционален динамической (изо)спиновой восприимчивости $\Pi_s^R(t) = i\theta(t)\langle[S^z(t), S^z(0)]\rangle$ (см. ур. (1.63)). Как обычно, для описания спиновых операторов мы вводим неравновесные псевдо-фермионы Абрикосова ψ_α^\dagger , ψ_α [93, 92]. Интегрируя по электронным степеням свободы в пределе $N_{\text{ch}} \gg 1$, приходим к стандартному келдышевскому эффективному действию в форме (2.53)-(2.7). Псевдо-фермионная динамическая спиновая восприимчивость определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Pi_{s,pf}^R(\omega) = Z^2 \sum_{\sigma} \int \left\{ \Gamma_{\sigma}^{RKR}(\varepsilon + \omega, \varepsilon, \omega) \bar{G}_{\sigma, \varepsilon + \omega}^R \bar{G}_{\sigma, \varepsilon}^R \right. \\ \left. + \Gamma_{\sigma}^{RAR}(\varepsilon + \omega, \varepsilon, \omega) \left[\bar{G}_{\sigma, \varepsilon + \omega}^R \bar{G}_{\sigma, \varepsilon}^K + \bar{G}_{\sigma, \varepsilon + \omega}^K \bar{G}_{\sigma, \varepsilon}^A \right] \right. \\ \left. + \Gamma_{\sigma}^{KAR}(\varepsilon + \omega, \varepsilon, \omega) \bar{G}_{\sigma, \varepsilon + \omega}^A \bar{G}_{\sigma, \varepsilon}^A \right\} \frac{d\varepsilon}{16\pi i}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где перенормированная функция Грина выписана в (2.69)-(2.71). Приведем соответствующие выражения ещё раз для удобства.

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\sigma, \varepsilon}^{R,A} = \frac{Z(\lambda)}{\varepsilon - \bar{\xi}_{\sigma} \pm i\bar{g}\Gamma_{\sigma}(\varepsilon)}, \quad \bar{\xi}_{\sigma} = -\eta + \sigma\bar{\Delta}/2, \\ \Gamma_{\sigma}(\varepsilon) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - \bar{\xi}_{-\sigma})[\mathcal{F}_{\bar{\xi}_{-\sigma}}^{-\sigma} + B_{\varepsilon - \bar{\xi}_{-\sigma}}]. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Псевдо-фермионная функция распределения $\mathcal{F}_{\varepsilon}^{\sigma}$ не известна *a priori* и должна определяться самосогласованно из соответствующего кинетического уравнения. В пределе низкой внешней частоты $\Omega \ll \max\{T_r, \varepsilon_d, |\bar{\Delta}|\}$ она

удовлетворяет уравнению:

$$\mathcal{F}_\varepsilon^\sigma = \frac{B_{-\sigma(\varepsilon + \frac{\Delta\sigma}{2} + \eta)} \mathcal{F}_{\bar{\xi}_\sigma}^{-\sigma} - \sigma}{B_{-\sigma(\varepsilon + \frac{\Delta\sigma}{2} + \eta)} - \sigma \mathcal{F}_{\bar{\xi}_\sigma}^{-\sigma}}. \quad (3.7)$$

Как обсуждалось в первой главе диссертации, все слагаемые вида $G^R G^R$ и $G^A G^A$ приводят к большим логарифмам. Они контролируются схемой перенормировки и их необходимо опустить, так как все большие логарифмы учтены в перенормированных параметрах теории $\bar{\Delta}$ и \bar{g} . Тогда ур. (3.5) упрощается:

$$\Pi_{s,pf}^R(\omega) = \frac{Z^4}{8} \sum_\sigma \partial_{\bar{\xi}_\sigma} \mathcal{F}_{\bar{\xi}_\sigma}^\sigma \left[1 - \frac{\omega \Gamma_\sigma^{RAR}(\bar{\xi}_\sigma + \omega, \bar{\xi}_\sigma, \omega)}{\omega + 2i\bar{g}\Gamma_\sigma} \right], \quad (3.8)$$

где $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\bar{\xi}_\sigma)$. Вершинная функция Γ^{RAR} удовлетворяет следующему уравнению Дайсона

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^{RAR}(\varepsilon + \omega, \varepsilon, \omega) &= 1 + \frac{ig}{4} \int \frac{dx}{2\pi} \bar{G}_{-\sigma, \varepsilon + \omega + x}^R \bar{G}_{-\sigma, \varepsilon + x}^A \\ &\times \text{Im} \Pi_x^R(B_x - \sigma) \Gamma_{-\sigma}^{RAR}(\varepsilon + \omega + x, \varepsilon + x, \omega). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя (3.7)-(3.8) и решение ур. (3.9)

$$\frac{\Gamma_\sigma^{RAR}(\bar{\xi}_\sigma + \omega, \bar{\xi}_\sigma, \omega)}{\omega + 2i\bar{g}\Gamma_\sigma} = \frac{1}{\omega} \frac{\omega + 2i\bar{g}(\Gamma_{-\sigma} - \Gamma_\sigma)}{\omega + 2i\bar{g}(\Gamma_{-\sigma} + \Gamma_\sigma)}, \quad (3.10)$$

получаем следующее выражение (3.11) для адмиттанса при внешней частоте $\Omega \ll \max\{|\bar{\Delta}|, T_r, \varepsilon_d\}$:

$$\mathcal{G}_\Omega = \frac{C_g}{C} \frac{Z^4 \bar{g}}{4\pi} \frac{\bar{\Delta} \partial_{\bar{\Delta}} B_{-\bar{\Delta}}}{B_{-\bar{\Delta}}} \frac{i\Omega}{-i\Omega - \frac{\bar{g}\bar{\Delta} B_{-\bar{\Delta}}}{2\pi}}, \quad (3.11)$$

где скейлинг Z определен в (2.70), а \bar{g} , $\bar{\Delta}$ перенормированные константа связи и кулоновская щель, определённые в (2.71). Как и в предыдущей главе, интеграл в (2.70) берется в пределах $E_c \gg |\omega| \gg \omega_0 = \max\{T_r, \varepsilon_d, |\bar{\Delta}|\}$.

3.2.2 Параметры g' и q' в неравновесном режиме

Вычисление q' и g' связано с вычислением K_ω^R (см. ур. (1.50)). Используя определение $K^R(t)$ через операторы $X(t) = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha$, можно получить

следующее выражение:

$$K_{\omega}^R = -\frac{g}{8\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left[i \operatorname{Im} \mathcal{D}_{\omega'}^R (B_{\omega'} - B_{\omega'-\omega}) + \operatorname{Re} \mathcal{D}_{\omega'}^R B_{\omega'-\omega} \right] \int (F_{\varepsilon+\omega'-\omega}^d - F_{\varepsilon}^r) d\varepsilon. \quad (3.12)$$

Здесь мы ввели поперечную спиновую восприимчивость $\mathcal{D}^R(t) = i\theta(t)\langle[S^-(t), S^+(0)]\rangle$. С помощью ур. (1.50) непосредственно устанавливаются следующие соотношения:

$$g' = g \int \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \mathcal{D}_{\omega}^R \partial_{\omega} B_{\omega}, \quad (3.13)$$

$$q' = Q + \frac{g}{4\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Re} \mathcal{D}_{\omega}^R \partial_{\omega} (\omega B_{\omega}). \quad (3.14)$$

Средний заряд на островке определяется через оператор среднего изоспина как: $Q = k + 1/2 - \langle S_z \rangle$. Используя результат для поперечной спиновой восприимчивости (см. ур.(2.65)):

$$\mathcal{D}_{\omega}^R = \frac{1}{B_{-\bar{\Delta}}} \frac{Z^2(\lambda)}{\omega + \bar{\Delta} + i0^+}, \quad (3.15)$$

получаем следующие результаты (3.16) для g' и q'

$$g' = -\frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Delta} \partial_{\bar{\Delta}} \ln B_{-\bar{\Delta}}, \quad q' = k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{B_{-\bar{\Delta}}}. \quad (3.16)$$

Уравнения (3.16) обобщают результаты для g' [48, 58] и q' [37], полученные для равновесия. Как и в случае равновесия, физика, скрытая в параметрах (3.16), может быть лучше понята, если перейти от ОЭК к ОЭТ. В отсутствие транспортного напряжения на ОЭТ он физически эквивалентен ОЭК. Величина g' тогда совпадает с кондактансом ОЭТ в неравновесных условиях (например, когда температура островка отличается от температуры резервуаров) [22]. Величина q' специфична для физики кулоновской блокады и может быть названа квази-частичным зарядом [37].

3.3 Обсуждение и выводы

3.3.1 Адмиттанс и диссипация

Результат (3.11) справедлив для произвольной функции распределения. Для получения более детальных предсказаний, для примера, рассмотрим квазиравновесный случай $F_\varepsilon^d = \tanh \varepsilon/2T_d$, $T_d > T_r$. Подобный случай типичен для ОЭК, созданной на базе металлического островка. Такой режим устанавливается, когда скорость электронной релаксации, обусловленной электрон-электронным взаимодействием в островке, $1/\tau_{ee} \gg g\delta$ (см. Главу 2).

Реальная часть адмиттанса (3.11) при Ω как функция q показана на Рис. 3.2 для квазиравновесного режима $T_d > T_r$. При фиксированных C_g , C и g высота максимума определяется эффективной температурой электрон-дырочных возбуждений $T_{eh} = \lim_{\bar{\Delta} \rightarrow 0} (\bar{\Delta}/2)B_{\bar{\Delta}}$ [105]. Как легко показать, опираясь на результаты предыдущей главы, $T_r \leq T_{eh} \leq T_d$ и $T_{eh} \approx T_d \ln 2$ при $T_d \gg T_r$. Таким образом, значения неравновесного адмиттанса ограничены интервалом $\text{Re } \mathcal{G}_{\Omega, T_d} < \text{Re } \mathcal{G}_\Omega < \text{Re } \mathcal{G}_{\Omega, T_r}$, где $\mathcal{G}_{\Omega, T_d}(\mathcal{G}_{\Omega, T_r})$ равновесные адмиттансы при температурах $T_d(T_r)$.

Диссипативная часть адмиттанса в ОЭК изучалась экспериментально с помощью радио-частотной рефлектометрии. На систему посылали непрерывный радио-частотный сигнал [18]. В эксперименте туннельный кондактанс оценивался как $g = 0.5$, так что ОЭК находилась в режиме сильной кулоновской блокады. Мы построили реальную часть адмиттанса (3.11) при фиксированной внешней частоте Ω как функцию q на Рис. 3.3. На рисунке для сравнения мы приводим $\text{Re } \mathcal{G}_\Omega$, рассчитанный: а) в равновесии без учета кулоновских перенормировок, т.е., при $Z = 1$ и $B_{\bar{\Delta}} = \coth \bar{\Delta}/2T_r$ (пунктирная линия); б) в равновесии и с учетом эффектов перенормировки, т.е., с $B_{\bar{\Delta}} = \coth \bar{\Delta}/2T_r$ (точечная линия); в)

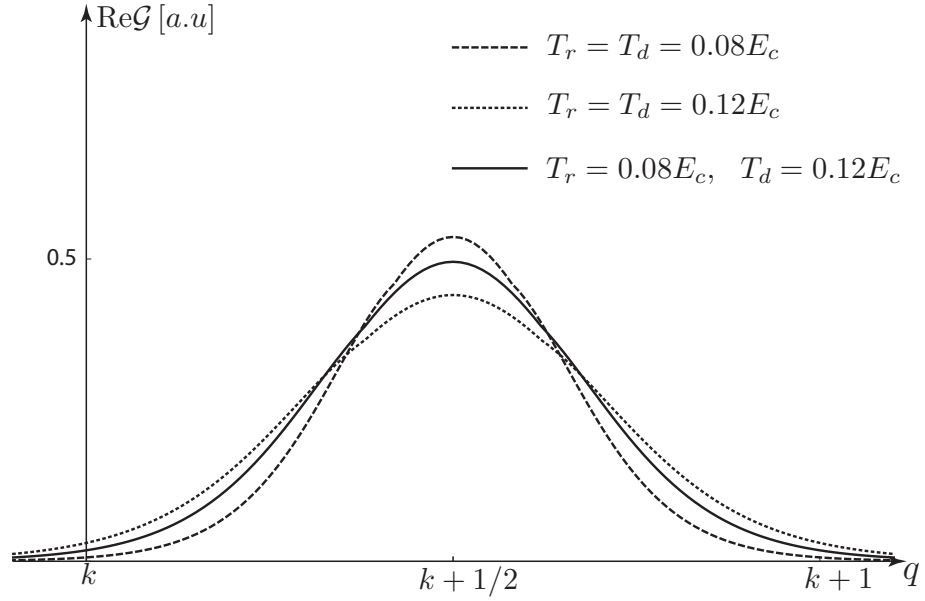


Рис. 3.2: Fig. 3.2 Действительная часть адмиттанса ОЭК при фиксированной частоте Ω как функция q . $g = 0.5$, $\Omega = 0.02E_c$ and $C_g/C = 0.24$. См. Текст

в неравновесии с $T_d > T_r$ и $B_{\bar{\Delta}}$, определённой уравнением (3.2) (жирная линия). Во всех трёх случаях мы используем одни и те же величины g , E_c и Ω , соответствующие эксперименту [18]. Небольшое изменение отношений C_g/C и $T_{r,d}/E_c$ позволяет сделать кривые а), б) и в) неразличимыми. В работе [18] предполагалось, что электроны внутри островка находятся в термодинамическом равновесии с резервуаром и эффекты кулоновской перенормировки незначительны (случай а) Рис. 3.3). Значения C_g/C и T_r/E_c используются как фиттирующие параметры. Кривые, представленные на Рис. 3.3, однако, указывают на более тонкую физику. Как можно видеть, удачное фиттирование экспериментальных данных теоретической кривой не даёт уверенности в том, что сделанные предположения справедливы. Таким образом, необходим более внимательный анализ экспериментальных данных работы [18].

Аналитическая структура адмиттанса, как функция внешней частоты Ω , полностью определяется электрон-дырочным распределением \mathcal{B}_ω при $\omega = -\bar{\Delta}$. Масштабный параметр Z , приходящий из перенормировки,

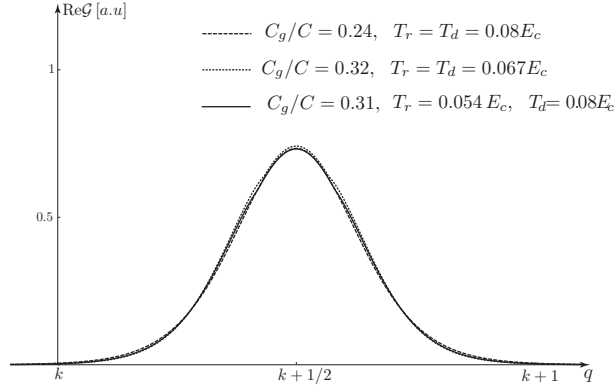


Рис. 3.3: Диссипативная часть адмиттанса ОЭК при фиксированной Ω как функция q . Представлены три кривых соответствующих трем различным формулам. Пунктирная линия соответствует ур. (3.11) с $Z = 1$, $\bar{\Delta} = \Delta$, $\bar{g} = g$ и $B_{\bar{\Delta}} = \coth \Delta/2T_r$. Точечная линия проведена в соответствии с ур. (3.11) с $B_{\bar{\Delta}} = \coth \bar{\Delta}/2T_r$. Жирная линия соответствует ур. (3.11) с неравновесной $B_{\bar{\Delta}}$, заданной ур. (3.2). Мы используем $g = 0.5$ и $\Omega = 0.02E_c$. См. текст.

содержит информацию о \mathcal{B}_{ω} в широком диапазоне $\max\{|\bar{\Delta}|, T_r, \varepsilon_d\} < |\omega| < E_c$. Адмиттанс (3.11) может использоваться в качестве инструмента для прямого экспериментального измерения \mathcal{B}_{ω} . Таковым может быть измерение вещественной части адмиттанса $\text{Re } \mathcal{G}_{\Omega}$ на двух различных внешних частотах. Другая возможность состоит в одновременном измерении вещественной и мнимой частей \mathcal{G}_{Ω} при заданной частоте [17]. Меняя затворное напряжение U_0 , можно экспериментально считывать $\bar{\Delta}\mathcal{B}_{-\bar{\Delta}}$ во всем интервале значений $\bar{\Delta}$. Измерение частотной зависимости $\text{Re } \mathcal{G}_{\Omega}$ в кулоновском пике ($\bar{\Delta} = 0$) позволяет измерить эффективную температуру T_{eh} электрон-дырочных пар. Таким образом, адмиттанс ОЭК при переменном во времени затворном напряжении может быть использован в качестве термометра для электрон-дырочных пар, подобно тому, как действие термометра на кулоновской блокаде основано на измерении дифференциального кондактанса в ОЭТ [8].

3.3.2 Сопротивление зарядовой релаксации, перенормированная затворная емкость

Действительная часть адмиттанса определяет скорость диссипации энергии: $\mathcal{W}_\Omega = (C_g/2C) \text{Re } \mathcal{G}_\Omega |U_\Omega|^2$. Результаты (3.11)-(3.16) показывают, что даже в неравновесии в квазистационарном режиме $\Omega \rightarrow 0$ скорость диссипации факторизуется так же в соответствии с (1.58), т.е. в произведение хорошо определённых физических наблюдаемых в полной аналогии с классическим выражением (1.1). Сопротивление зарядовой релаксации \mathcal{R}_q и перенормированная затворная емкость C_g так же связаны с физическими наблюдаемыми, формально определёнными в (1.50) в соответствии с уравнением (1.58).

Температура T_d электронов на острове ОЭК, а вместе с ней и T_{eh} определяется балансом между диссипируемой энергией \mathcal{W} и потоком энергии в фононную подсистему за счёт электрон-фононного взаимодействия. В случае кулоновского пика ($\Delta = 0$) и для горячего островка ($T_d \gg T_r$) температура электронов $T_d \propto U_0^\alpha$, где степень зависит от деталей электрон-фононного взаимодействия (см. например, [22]).

Итак, в этой главе были вычислены адмиттанс и диссипация энергии в неравновесной ОЭК в режиме сильной кулоновской блокады ($g \ll 1$). В режиме высоких температур $\delta \ll \varepsilon_d \ll E_c$ мы вывели выражение для адмиттанса при внешней частоте $\Omega \ll \max\{T_r, \varepsilon_d, |\bar{\Delta}|\}$. Мы обнаружили, что скорость диссипации энергии сохраняет свой универсальный вид в квазистационарном режиме даже в неравновесии. Универсальность имеет место, когда диссипация выражена в терминах специальных физических наблюдаемых: сопротивления зарядовой релаксации и перенормированной затворной емкости. Мы предлагаем адмиттанс системы в качестве инструмента для измерения бозевского распределения коллективных мод, аналогичных бозевским электрон-дырочным возбуждениям в ферми-

ЖИДКОСТИ.

Заключение

Основные результаты

1. В работе построена теория диссипации в ОЭК с сильным кулоновским взаимодействием при температурах $T \gg \delta \max\{1, g\}$. Вычислен адмиттанс и сопротивление зарядовой релаксации в предельных случаях сильной и слабой кулоновской блокады. Оказалось, что омическая диссипация контролируется новой физической наблюдаемой: перенормированной затворной емкостью. Получено выражение для адмиттанса системы в режиме сильной кулоновской блокады в широком интервале внешних частот Ω .

2. Получено квантовое кинетическое уравнение, описывающее релаксацию электронной функции распределения островка для одно-электронной системы с сильным кулоновским взаимодействием при характерной энергии электронов островка $\varepsilon_d \gg \delta \max\{1, g\}$ и для любых значений безразмерного кондактанса системы g . Исследованы решения для эволюции функции распределения для наиболее интересных предельных случаев. Для всех рассмотренных случаев уравнения релаксации допускают наглядную физическую интерпретацию. Установлено, что сильное кулоновское взаимодействие существенным образом меняет закон релаксации электронного распределения в режимах сильной и слабой кулоновской блокады.

3. Построено обобщение теории диссипации в ОЭК с сильным кулоновским взаимодействием при характерной энергии островка $\varepsilon_d \gg \delta \max\{1, g\}$ на случай, когда островок находится в перегретом

состоянии (неравновесный режим), но в режиме линейного отклика по амплитуде переменного затворного напряжения. Получено соответствующее обобщение для адмиттанса системы, сопротивления зарядовой релаксации и перенормированной затворной емкости в режиме сильной кулоновской блокады. Указана экспериментальная возможность для прямого измерения электрон-дырочной функции распределения в ОЭК в условиях сильной кулоновской блокады.

Я очень благодарен моему научному руководителю Игорю Бурмистрову за неоценимую поддержку и постоянное внимание и терпение, оказанные мне при написании диссертации. Особая благодарность моим соавторам: А.С. Иоселевичу и Н.М. Щелкачеву, за полезные обсуждения различных вопросов, связанных с работой, отразившиеся самым благоприятным образом на качестве диссертации. Автор выражает отдельную благодарность также М.А. Скворцову, В.Ю. Качоровскому и А. Семенову за научные обсуждения, обогатившие автора. Автор также чувствует себя обязанным всем научным сотрудникам Института Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау. Их критическая оценка предъявленных результатов помогла дать ответы на многие вопросы, связанные с работой.

Работа над диссертацией проходила при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных кандидатов наук № МК-125.2009.2 “Равновесный и неравновесный транспорт в одноэлектронных устройствах”, гранта РФФИ № 09-02-92474-МНКС “Электроны в нульмерных системах: взаимовлияние заряда, спина и неравновесия”, Государственного контракта П926 “Взаимное влияние заряда, спина и неравновесных условий на квантовый транспорт в наноструктурах”, государственного контракта 16.740.11.0022 “Квантово-когерентные и зарядовые явления в мезоскопических наноструктурах”, фонда “Династия”, программ РАН “Квантовая макрофизика”, “Квантовая физика конденсированного состояния” и “Основы нанотехнологий и наноматериалов”.

Приложения

А Приложения к части 1

А.1 Производная от энергии

В этом приложении устанавливается связь между диссипацией в системе и различными полевыми корреляторами в режиме слабой и сильной связи.

Слабая связь, $g \gg 1$ Чтобы выразить коррелятор (1.16) через фазу $\varphi(\tau)$ эффективного действия АЭШ. Удобно ввести келдышевский контур (см. Рис. 3.4). Мы разбиваем все поля на верхнюю и нижнюю компоненту (\pm)

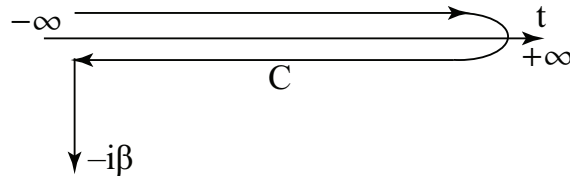


Рис. 3.4: Келдышевский контур.

в соответствии с частями Келдышевского контура. Действие системы так же разбивается: $S = S_+ - S_-$ и статсумма системы принимает вид: $\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi_{\pm} e^{iS[\varphi_{\pm}]} = 1$. Средний заряд может быть найден как:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \langle d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \langle d_{\alpha+}^{\dagger} d_{\alpha+} + d_{\alpha-}^{\dagger} d_{\alpha-} \rangle = \\ &= \frac{C}{2C_g} \left\langle \frac{\delta S}{\delta U_{g,q}} \right\rangle + C_g U_c. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Здесь мы ввели классическую и квантовую компоненты бозонного поля:

$$U_{g,c} = \frac{1}{2}(U_{g+} + U_{g-}), \quad U_{g,q} = \frac{1}{2}(U_{g+} - U_{g-}), \quad (\text{A.2})$$

и $U_g(t) = U_0 + U_\Omega \cos \Omega t$. Чтобы избавиться от 4-точечных кулоновских членов мы вводим бозонные поля Хаббарда-Стратоновича: V_+ , V_- , каждое из которых живет на своей половине контура, и делаем калибровочное преобразование:

$$d_{\alpha\sigma} \rightarrow d_{\alpha\sigma} e^{-i \int_0^t V_\sigma dt}. \quad (\text{A.3})$$

Преобразованные слагаемые S_0 , S_c , S_t принимают вид:

$$\begin{aligned} S_{0\sigma} &= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} a_{k\sigma}^\dagger \left(i\partial_t - \varepsilon_k^{(a)} \right) a_{k\sigma} dt \\ &\quad + \sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d_{\alpha\sigma}^\dagger \left(i\partial_t - \varepsilon_\alpha^{(d)} \right) d_{\alpha\sigma} dt, \\ S_{c\sigma} &= \frac{C}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_\sigma^2 dt + C_g \int_{-\infty}^{\infty} V_\sigma U_{g,\sigma}(t) dt, \\ S_{t\sigma} &= - \sum_{\alpha,k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ t_{k\alpha} e^{i \int V_\sigma dt} a_{k\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} + \text{h.c.} \right\} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Мы видим, что слагаемое, соответствующее источнику $U_{g,\sigma}$, входит только в $S_{c\sigma}$. Тогда мы перегруппируем его в более удобную форму:

$$\begin{aligned} S_c &= S_{c+} - S_{c-} = \\ &= C \int_{-\infty}^{\infty} V_c V_q dt + \sqrt{2} C_g \int_{-\infty}^{\infty} (V_c U_{g,q} + V_q U_{g,c}) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Здесь $V_{c,q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_+ \pm V_-)$. Затем находим средний заряд из (A.1):

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \langle d_\alpha^\dagger d_\alpha \rangle &= \frac{C}{\sqrt{2}} \langle V_c \rangle + C_g U_{g,c}, \\ \left\langle \frac{\partial H}{\partial U_g} \right\rangle &= -\frac{C_g}{\sqrt{2}} \langle V_c \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Раскладывая e^{iS} до линейного порядка по классическому полю U_c , получаем

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial U_g} \right\rangle = -\frac{C_g^2}{C^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_R(t-t') U_g(t') dt', \quad (\text{A.7})$$

где $\Pi_R(t - t') = iC^2 \langle V_c(t) V_q(t') \rangle$. Объединяя этот результат с (1.13), мы получаем (1.28).

Используя (A.6), также выпишем формулу для эффективной емкости $\partial Q / \partial U_0$ ОЭК:

$$\frac{\partial Q}{\partial U_0} = C_g + \frac{\Pi_R(0)}{C}. \quad (\text{A.8})$$

Сильная связь, $g \ll 1$. Здесь мы делаем все операции аналогично изложенному выше. Используя гамильтониан (3.3), мы получаем

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial U_g} \right\rangle = -\frac{C_g}{C} \langle S^z(t) \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Келдышевская техника даёт

$$\langle S^z(t) \rangle = \frac{C_g}{C} \int_{-\infty}^{\infty} i \langle S_c^z(t) S_q^z(t') \rangle U_c(t') dt'. \quad (\text{A.10})$$

Вводя спиновую корреляционную функцию

$$\Pi_s^R(t) = i \langle S_c^z(t) S_q^z(0) \rangle, \quad (\text{A.11})$$

мы воспроизводим выражение для диссипации (1.63) со спиновым коррелятором $\Pi_s^R(\omega)$, играющим роль поляризационного оператора.

A.2 Адмиттанс

Адмиттанс определяется как:

$$\frac{\delta \langle I(t) \rangle}{\delta U_g(t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.12})$$

Как обычно, мы вводим оператор туннельного тока как производную от числа частиц на островке (1.3-1.6):

$$I = i[H, \sum_{\alpha} d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}] = i \sum_{k, \alpha} t_{k\alpha} a_k^{\dagger} d_{\alpha} + \text{h.c.} \quad (\text{A.13})$$

Для того, чтобы найти средний ток, вставляем необходимый источник в действие:

$$S_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) \kappa(t) dt, \quad \langle I(t) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\partial \mathcal{Z}[I]}{\partial \kappa(t)} \Big|_{\kappa=0}. \quad (\text{A.14})$$

Интегрируя вдоль Келдышевского контура мы удерживаем лишь квантовую компоненту поля $\kappa(t)$. Осуществляем обычное вращение в фермионном базисе:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \pm \psi_2), \\ \bar{\psi}_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_2 \pm \bar{\psi}_1), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

где $\psi = (a_k, d_{\alpha})^T$. После вращения и калибровочного преобразования (A.3) источник и туннельный член приобретают вид:

$$\begin{aligned} S_t + S_s &= \int dt \bar{\psi}_{\gamma} \left(T_{\gamma\delta}(\varphi) + \frac{\kappa}{2} J_{\gamma\delta}(\varphi) \right) \psi_{\delta} \\ T_{\gamma\delta} &= \begin{pmatrix} \Lambda_c & \Lambda_q \\ \Lambda_q & \Lambda_c \end{pmatrix}, \quad J_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} J_q & J_c \\ J_c & J_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Здесь индексы c и q обозначают классическую и квантовую компоненту соответствующей физической величины, т.е. $J_{c,q} = \frac{1}{2}(J_+ \pm J_-)$ и Λ_{σ} , J_{σ} - матрицы в пространстве островок-берег:

$$\Lambda_{\sigma} = - \begin{pmatrix} 0 & t_{k\alpha} e^{-i\varphi_{\sigma}} \\ t_{\alpha k}^{\dagger} e^{i\varphi_{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & it_{k\alpha} e^{-i\varphi_{\sigma}} \\ -it_{\alpha k}^{\dagger} e^{i\varphi_{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Удобно избавиться от сильно нелинейного источника (A.14) при помощи подходящей замены переменных. В самом деле, легко убедиться, что с точностью до линейных членов по κ :

$$T_{11}(\varphi_+, \varphi_-) + \frac{\kappa}{2} J_{11}(\varphi_+, \varphi_-) = T_{11}\left(\varphi_+ + \frac{\kappa}{2}, \varphi_- - \frac{\kappa}{2}\right). \quad (\text{A.18})$$

Тоже свойство сохраняется для всех элементов матриц $T_{\gamma\delta}$, $J_{\gamma\delta}$. Делая замену:

$$\varphi_+ + \frac{\kappa}{2} \rightarrow \varphi_+, \quad \varphi_- - \frac{\kappa}{2} \rightarrow \varphi_-, \quad (\text{A.19})$$

мы перекидываем всю зависимость от κ в гауссову часть действия. Тогда

$$S_s = - \int \kappa(t) \left(\frac{C}{\sqrt{2}} \ddot{\varphi}_c + C_g \dot{U}_c \right) dt. \quad (\text{A.20})$$

Средний ток (A.14) принимает вид

$$\langle I \rangle = \frac{C}{\sqrt{2}} \langle \ddot{\varphi}_c \rangle + C_g \dot{U}_c. \quad (\text{A.21})$$

Используя (A.5), с линейной по $U_c(t)$ точностью мы находим ток

$$\langle I \rangle = C_g \dot{U}_c + \frac{C}{\sqrt{2}} \langle \ddot{\varphi}_c \rangle + i C C_g \int U_c(t') dt' \langle \ddot{\varphi}_c(t) \dot{\varphi}_q(t') \rangle. \quad (\text{A.22})$$

Тогда адмиттанс принимает вид

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i \Omega C_g \left(1 + \frac{\Pi^R(\Omega)}{C} \right). \quad (\text{A.23})$$

Следовательно,

$$\text{Im} \Pi^R(\Omega) = \frac{C}{C_g} \frac{\text{Re} \mathcal{G}(\Omega)}{\Omega}. \quad (\text{A.24})$$

В случае спиновых переменных (сильная связь) мы легко воспроизводим аналогичную формулу (A.23) для адмиттанса, следуя той же схеме рассуждений. Таким образом, мы устанавливаем взаимосвязь между адмиттансом и спиновым поляризационным оператором Π_s приведённую в статье:

$$\mathcal{G}(\Omega) = -i \omega \frac{C_g}{C} \Pi_s^R(\Omega), \quad (\text{A.25})$$

где $\Pi_s^R(\omega)$ определено (A.11).

А.3 Инстантонные вклады

Массивные флуктуации

Разлагаем флуктуирующее поле $\delta\varphi(\tau)$ по базису собственных функций:

$\delta\varphi(\tau) = \sum_m C_m \varphi_m(\tau)$, где сам базис: ($u = e^{2\pi iT\tau}$) [38]

$$\begin{aligned}\varphi_m(\tau, z) &= u^{m-1} \frac{u-z}{1-u\bar{z}}, \quad m \geq 2, \\ \varphi_{-m}(\tau, z) &= \frac{1}{u^{m-1}} \frac{1-u\bar{z}}{u-z}, \quad m \geq 2; \\ \varphi_1(\tau, z) &= \sqrt{1-|z|^2} \frac{1}{u-z}, \\ \varphi_{-1}(\tau, z) &= \sqrt{1-|z|^2} \frac{u}{1-u\bar{z}}.\end{aligned}\tag{A.26}$$

Здесь $\varphi_{\pm 1}(\tau, z)$ есть нулевые моды. Тогда коррелятор принимает вид

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}_\tau \delta\dot{\varphi}(\tau) \delta\dot{\varphi}(\tau') \rangle &= T \sum_m \int \mathcal{D}z \dot{\varphi}_{-m}(\tau, z) \dot{\varphi}_m(\tau', z) \\ &\times \langle C_{-m} C_m \rangle \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_0} e^{-g/2+2\pi iqW}, \\ \langle C_{-m} C_m \rangle &= \frac{2\pi}{g\omega_{m-1}} = \frac{1}{g(m-1)T}, \quad m > 0 \\ \mathcal{D}z &= \frac{d^2z}{1-|z|^2}, \quad |z| \leq 1 - \frac{T}{E_c}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_0$ отношение флуктуационных детерминантов. Их нужно регуляризовывать с некоторой осторожностью. Мы используем схему, предложенную в [32]

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_0} = \frac{g^2 E_c}{2\pi^3 T}.\tag{A.27}$$

После алгебраических преобразований получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2gE_c T} e^{g/2-2\pi iqW} \langle \mathcal{T}_\tau \delta\dot{\varphi}(\tau) \delta\dot{\varphi}(\tau') \rangle_W = \\ &= \underbrace{\frac{s}{(1-s)^2} \ln \frac{E_c}{T}}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{1}{s} \ln^2(1-s)}_{\text{II}} - \underbrace{\frac{2s}{1-s}}_{\text{III}} - \underbrace{\frac{2 \ln(1-s)}{1-s}}_{\text{IV}} + \\ &+ \left(s \rightarrow \frac{1}{s} \right), \quad s = \frac{u}{u'} = e^{2\pi iT(\tau-\tau')}.\end{aligned}$$

Раскладывая в ряд Тейлора по s , находим

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \sum_{n=1}^{\infty} n s^n \ln \frac{E_c}{T}, \\
\text{II} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{1+n} s^n, \\
\text{III} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} s^n, \\
\text{IV} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} H_n s^n.
\end{aligned}$$

Здесь H_n – гармоническое число. Вклад гауссовых флуктуаций в коррелятор принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2gE_c T} e^{g/2 - 2\pi i q W} \langle \mathcal{T}_\tau \delta\dot{\varphi}(\tau) \delta\dot{\varphi}(\tau') \rangle_W = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\ln \frac{E_c}{T} - \frac{2H_n}{1+n} \right) s^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s^n + \left(s \rightarrow \frac{1}{s} \right). \tag{A.28}
\end{aligned}$$

Теперь мы осуществляем аналитическое продолжение Фурье-компонент в область $n \ll 1$. Нас интересует только линейный по n член:

$$H_n = \frac{\pi^2 n}{6} + \mathcal{O}(n^2).$$

Извлекая линейную часть и суммируя инстантонный и анти-инстантонный члены, находим

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T}_\tau \delta\dot{\varphi}(\tau) \delta\dot{\varphi}(\tau') \rangle_n &= -8gE_c e^{-g/2} \left(1 - \frac{|\omega_n|}{4\pi T} \ln \frac{E_c}{T} \right) \cos 2\pi q \\
&+ \mathcal{O}(\omega_n^2), \tag{A.29}
\end{aligned}$$

что действительно сокращает перенормировку, приходящую из статсуммы (1.41).

Нулевые моды

Соответствующая одно-инстантонная конфигурация записывается в следующем виде:

$$\dot{\varphi}_W = 2\pi TW \left(\frac{u}{u-z} + \frac{\bar{z}u}{1-\bar{z}u} \right), \quad W = \pm 1. \quad (\text{A.30})$$

Коррелятор:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}_\tau \dot{\varphi}(\tau) \dot{\varphi}(\tau') \rangle_W &= e^{-g/2+2\pi iqW} (2\pi T)^2 \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_0} \int \frac{d^2 z}{1-|z|^2} \\ &\times \sum_n \left\{ |z^2|^n s^n + |z^2|^n s^{-n} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Соответствующие Фурье-компоненты:

$$\langle \mathcal{T}_\tau \dot{\varphi}(\tau) \dot{\varphi}(\tau') \rangle_n = e^{-g/2} 8\pi^2 T \cos 2\pi q \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_0} \int \frac{|z^2|^{|n|}}{1-|z|^2} d^2 z. \quad (\text{A.32})$$

Разлагаясь до линейных по $n \ll 1$ членов, мы приходим к уравнению (1.44).

А.4 Расчёт поляризованного оператора

Низший порядок

Заметим, что $I(-\omega_n) = \Pi(\omega_n)$. Значит, мы можем опустить любую нечётную функцию ω_n при расчёте $I(\omega_n)$. Аналитическое выражение, соответствующее диаграмме I (см. Рис.1.5), выглядит так:

$$I(\omega_n) = \frac{gT^2}{4\pi} \sum_{k,m} \frac{|\Omega_m|}{(i(\varepsilon_k + i\omega_n) - \xi_\sigma)^2} \frac{1}{i(\varepsilon_k + \omega_n + \Omega_m) - \xi_{-\sigma}} \frac{1}{i\varepsilon_k - \xi_\sigma}.$$

Осуществляя суммирование по фермионным частотам, мы находим:

$$\begin{aligned} I(\omega_n) &= \frac{gT}{4\pi} \\ &\times \sum_m |\Omega_m| \left\{ \frac{n_f(\xi_\sigma)}{(i\omega_n)^2} \left[\frac{1}{\Delta\sigma + i(\omega_n + \Omega_m)} - \frac{1}{\Delta\sigma + \Omega_m} \right] \right. \\ &\left. - \frac{n_f(\xi_{-\sigma})}{\Delta\sigma + i(\omega_n + \Omega_m)} \frac{1}{(\Delta\sigma + i\Omega_m)^2} \right\}, \end{aligned}$$

где $n_f(x) = 1/(e^{\beta x} + 1)$ – это функция распределения Ферми. Простая алгебра показывает, что $I(\omega_n) + II(\omega_n) = -III(\omega_n)$. Таким образом, переходя к пределу $\eta \rightarrow -\infty$ мы получаем

$$I(\omega_n) + II(\omega_n) + III(\omega_n) = -\frac{2gT}{\pi} e^{\beta\eta} \sinh \frac{\Delta}{2T} \sum_m |\Omega_m| \times \left\{ \frac{1}{(\Delta + i\Omega_m + i\omega_n)(\Delta + i\Omega_m)^2} + \omega_n \rightarrow -\omega_n \right\}.$$

Теперь видно, что сумма по Ω_m может быть выражена в через логарифмические производные Γ -функций. Ответ дается ур.(1.71).

Уравнение Каллана-Симанчика для $\langle S_z \rangle$

Аномальная размерность γ оператора S_{pf}^z определяется следующим образом:

$$Z^\gamma S_{pf}^{z,r}(\bar{\Delta}, \bar{g}) = S_{pf}^z(\Delta, g, \Lambda), \quad (\text{A.33})$$

где Z даётся (2.69) и обрезка $\Lambda \sim E_c$. Для того, чтобы извлечь γ мы записываем соответствующее КС-уравнение для гриновской функции: $F_{pf}(\Delta, g, \Lambda) = \frac{1}{2} \sum_\sigma \sigma \langle \bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma \rangle$. В древесном приближении для F_{pf} :

$$F_{pf}(\Delta) = -e^{\beta\eta} \sinh \frac{\Delta}{2T}. \quad (\text{A.34})$$

Следуя общей философии ренорм-группы, при помощи (Б.26), мы выписываем нужное КС-уравнение на функцию $F_{pf}(\Delta, g, \Lambda)$ в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_\Delta \frac{\partial}{\partial \Delta} - \gamma \frac{d \ln Z}{d \ln \Lambda} \right) F_{pf}(g, \Delta, \Lambda) = 0, \quad (\text{A.35})$$

где соответствующие β - функции равны

$$\beta_g = \frac{g^2}{2\pi^2}, \quad \beta_\Delta = \frac{g\Delta}{2\pi^2}. \quad (\text{A.36})$$

Член с β_g всегда содержит на одну g больше и может быть опущен в главном порядке по g . Используя действие (1.66) мы вычисляем последнее слагаемое:

$$\frac{d \ln Z}{d \ln \Lambda} = -\frac{g}{4\pi^2}. \quad (\text{A.37})$$

Для того чтобы найти γ , нам нужно знать F_{pf} в следующем по сравнению с уравнением (А.34) порядке:

$$F_{pf}(\Delta, g, \Lambda) = -e^{\beta\eta} \sinh \frac{\Delta}{2T} \left(1 - \frac{g}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) + e^{\beta\eta} \frac{g\Delta}{4\pi^2 T} \cosh \frac{\Delta}{2T} \ln \frac{\Lambda}{\varepsilon}. \quad (\text{А.38})$$

Здесь ε - характерный масштаб взаимодействия. Подставляя (А.37) и (Б.29) в (Б.27), мы находим:

$$\gamma = 2. \quad (\text{А.39})$$

Точное выражение для поляризационного оператора

Для того чтобы вычислить диаграмму для поляризационного оператора (Рис.1.6), мы следуем схеме, предложенной впервые Элиашбергом. [57] Сначала мы устанавливаем аналитические свойства вершинной функции $\Gamma(z, z + i\omega_n, i\omega_n)$ как функции комплексной переменной z . Операторное выражение для вершинной функции выглядит так

$$\Gamma_\sigma(\tau_1 - \tau, \tau_2 - \tau) = \langle \mathcal{T}_\tau \bar{\psi}_\sigma(\tau) \psi_\sigma(\tau) \bar{\psi}_\sigma(\tau_1) \psi_\sigma(\tau_2) \rangle. \quad (\text{А.40})$$

Её лемановское представление записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma(z, z + i\omega, i\omega) &= T^4 \sum_{nklm} W_{lnmk}^\sigma W_{lkmn}^{*\sigma} \\ &\times \left[\frac{e^{\beta\omega_{kn}}}{\omega_{kn} - i\omega} \left\{ \frac{e^{-\beta\omega_k} + e^{-\beta\omega_l}}{z + \omega_{kl}} - \frac{e^{-\beta\omega_l} + e^{-\beta\omega_n}}{z + i\omega - \omega_{ln}} \right\} \right. \\ &\left. + \frac{e^{\beta\omega_{lm}}}{\omega_{lm} - i\omega} \left\{ \frac{e^{-\beta\omega_n} + e^{-\beta\omega_m}}{z + \omega_{nm}} - \frac{e^{-\beta\omega_l} + e^{-\beta\omega_n}}{z + i\omega - \omega_{ln}} \right\} \right], \quad (\text{А.41}) \\ W_{lnmk}^\sigma &= \langle l | \psi_\sigma | n \rangle \langle m | \psi_\sigma | k \rangle. \end{aligned}$$

Теория функций комплексного переменного учит, что сумма (А.41) определяет функцию с двумя горизонтальными разрезами: $\text{Im}(z + i\omega) = 0$ и $\text{Im}(z) = 0$. Для простоты сосредоточим внимание на *запаздывающей* вершинной функции $\omega_n > 0$. На следующем шаге мы определяем три

вершинных функции в соответствии со структурой разрезом:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{RRR}(z, z + i\omega, i\omega) & \text{ при } \operatorname{Im}z > 0, \\
\Gamma^{ARR}(z, z + i\omega, i\omega) & \text{ при } -i\omega_n < \operatorname{Im}z < 0, \\
\Gamma^{AAR}(z, z + i\omega, i\omega) & \text{ при } \operatorname{Im}z < -i\omega_n.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Общее выражение для $\Pi_\sigma(i\omega_n)$ тогда принимает вид:

$$\begin{aligned}
\Pi_\sigma(i\omega_n) &= \frac{T}{4} \sum_{\varepsilon_k} \Gamma_\sigma(i\varepsilon_k, i\varepsilon_k + i\omega_n, i\omega_n) G_\sigma(i\varepsilon_k + i\omega_n) G_\sigma(i\varepsilon_k) \\
&= \oint_C \frac{d\varepsilon}{16\pi i} \tanh \frac{\varepsilon}{2T} \Gamma_\sigma(\varepsilon, \varepsilon + i\omega_n, i\omega_n) G_\sigma(\varepsilon + i\omega_n) G_\sigma(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Контур C показан на Рис.3.5. Как обычно, интеграл вдоль большой

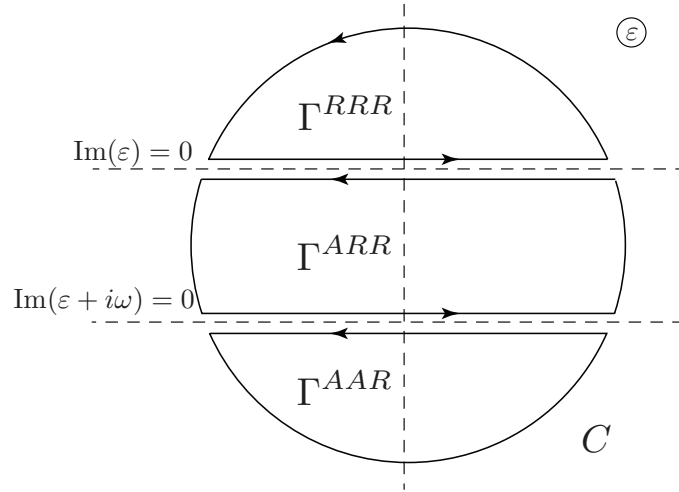


Рис. 3.5: Контур для поляризационного оператора $\Pi(\omega)$.

окружности исчезает и остаётся вычислить интегралы вдоль различных берегов разрезом:

$$\begin{aligned}
\Pi_\sigma(i\omega_n) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4\pi i} \tanh \frac{\varepsilon}{2T} \\
&\left\{ \Gamma_\sigma^{RRR}(\varepsilon, \varepsilon + i\omega_n, i\omega_n) G_\sigma^R(\varepsilon + i\omega_n) G_\sigma^R(\varepsilon) - \right. \\
&- \Gamma_\sigma^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + i\omega_n, i\omega_n) G_\sigma^R(\varepsilon + i\omega_n) G_\sigma^A(\varepsilon) + \\
&+ \Gamma_\sigma^{ARR}(\varepsilon - i\omega, \varepsilon, i\omega_n) G_\sigma^R(\varepsilon) G_\sigma^A(\varepsilon - i\omega_n) - \\
&\left. - \Gamma_\sigma^{AAR}(\varepsilon - i\omega_n, \varepsilon, i\omega_n) G_\sigma^A(\varepsilon) G_\sigma^A(\varepsilon - i\omega_n) \right\}.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

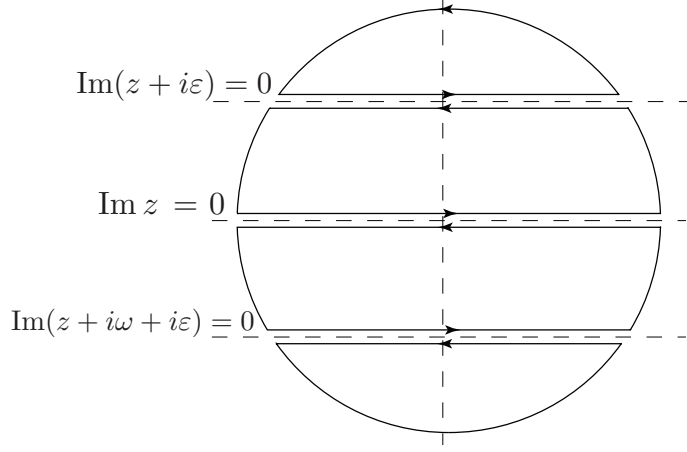


Рис. 3.6: Контур для вершинной функции Γ^{ARR} .

Осуществляя аналитическое продолжение $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$, мы получаем результат (1.86).

Уравнение Дайсона для вершины

Следуя шагам, обрисованным в предыдущем параграфе, мы выводим выражение для вершинной функции. Контур C зависит от типа вершины, которую мы хотим извлечь из (3.9). Контур для вершины Γ_σ^{ARR} изображен на Рис.3.6. Результат выглядит так

$$\Gamma_\sigma^{ARR}(\varepsilon, \varepsilon + \omega, \omega) = 1 - \text{I} + \text{II} - \text{III}, \quad (\text{A.45})$$

где

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi i} G_{-\sigma}^A(x) G_{-\sigma}^R(x + \omega) \Gamma_{-\sigma}^{ARR}(x, x + \omega, \omega) \\ &\quad \times \left[2i \text{Im} \alpha^R(x - \varepsilon) \coth \frac{x - \varepsilon}{2T} - \tanh \frac{x}{2T} \alpha^R(x - \varepsilon) + \tanh \frac{x + \omega}{2T} \alpha^A(x - \varepsilon) \right], \\ \text{II} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi i} \alpha_R(x - \varepsilon) G_{-\sigma}^R(x) G_{-\sigma}^R(x + \omega) \Gamma_{-\sigma}^{RRR}(x, x + \omega, \omega) \tanh \frac{x}{2T}, \\ \text{III} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi i} \alpha^A(x - \varepsilon) G_{-\sigma}^A(x) G_{-\sigma}^A(x + \omega) \Gamma_{-\sigma}^{AAR}(x, x + \omega, \omega) \tanh \frac{x + \omega}{2T}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Здесь функция $\alpha(z)$ есть пропагатор взаимодействия, чей мацубаровский образ показан на Рис.1.4. Как обычно, он имеет разрез $\text{Im} z = 0$, что

позволяет нам определить две функции:

$$\alpha^R(\omega) = \bar{g} \frac{i\omega}{4\pi}, \quad \alpha^A(\omega) = -\bar{g} \frac{i\omega}{4\pi}. \quad (\text{A.47})$$

Интегралы, входящие в II и III явно аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости. Следовательно, мы можем превратить эти интегралы в соответствующие суммы по мацубаровским частотам $i\varepsilon_n$. Далее легко доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma}^{RRR}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_n + \omega, \omega) &= \Gamma_{\sigma}^{ARR}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_n + \omega, \omega), \\ \Gamma_{\sigma}^{AAR}(i\varepsilon_n - \omega, i\varepsilon_n, \omega) &= \Gamma_{\sigma}^{ARR}(i\varepsilon_n - \omega, i\varepsilon_n, \omega). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Таким образом, мы сильно упрощаем наше дайсоновское уравнение, переписывая его через единственную вершинную функцию Γ_{σ}^{ARR} . Далее

$$\begin{aligned} \text{II} &= \frac{\bar{g}i}{4\pi} \sum_{\varepsilon_n} \Gamma_{-\sigma}^{ARR}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_n + \omega, \omega) \frac{i\varepsilon_n - \varepsilon}{(i\varepsilon_n - \xi_{-\sigma})(i\varepsilon_n + \omega - \xi_{-\sigma})}, \\ \text{III} &= \frac{\bar{g}i}{4\pi} \sum_{\varepsilon_n} \Gamma_{-\sigma}^{ARR}(i\varepsilon_n - \omega, i\varepsilon_n, \omega) \frac{i\varepsilon_n - \omega - \varepsilon}{(i\varepsilon_n - \xi_{-\sigma})(i\varepsilon_n - \omega - \xi_{-\sigma})}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Как обычно, схема регуляризации позволяет нам опустить суммы. Подынтегральное выражение члена I, однако, содержит $G^A G^R$. Как следствие, оно сингулярно при $\omega, g \rightarrow 0$, как это разъясняется в главной части работы. Таким способом приходим к ур.(1.89).

A.5 Вероятности перехода

Для вычисления вероятностей Γ^0 и γ будем следовать стандартной схеме. Введем гейзенберговские ψ -операторы в соответствии с

$$\psi_d(t) = \sum_{\alpha} d_{\alpha} e^{-i\varepsilon_{\alpha} t}, \quad \psi_a(t) = \sum_k a_k e^{-i\varepsilon_k t}. \quad (\text{A.50})$$

Тогда матричные элементы в базисе чисел заполнения становятся

$$\langle 0 | \psi_d | 1 \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | d_{\alpha} | 1 \rangle e^{-i(\varepsilon_{\alpha} + \Delta)t}. \quad (\text{A.51})$$

Как обычно, мы изменяем гамильтониан калибровочным преобразованием фермионных полей (подразумевается подход функционального интеграла):

$$\psi_d(t) \rightarrow \psi_d(t) e^{i \frac{Cg}{\mathcal{C}} \int U(t) dt}, \quad (\text{A.52})$$

где $U(t) = U_\Omega \cos \Omega t$. Теперь вся зависимость от $U(t)$ переброшена в туннельную часть гамильтониана:

$$H_t = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha e^{i \frac{Cg}{\mathcal{C}} \int U(t) dt} + \text{h.c.} \quad (\text{A.53})$$

Теперь рассчитаем вероятность $\Gamma_{10}(t)$. Начальное и конечное состояния:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |k, N\rangle, \\ |f\rangle &= d_\alpha^\dagger a_k |k, N\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Здесь $k(N)$ – число электронов на островке (береге). Как обычно, S -матричный формализм даёт необходимую амплитуду в виде:

$$\begin{aligned} A_{10}(t) &= -i \langle f | \int_{-\infty}^t H_t(t) dt | i \rangle \\ &= -i \langle i | a_k^\dagger d_\alpha \int_{-\infty}^t H_t(t) dt | i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Теперь, используя малость $\int U(t) dt = (U_\Omega/\Omega) \sin \Omega t$, представляем туннельный гамильтониан в виде

$$H_t = \sum_{k,\alpha} t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha \left(1 + \frac{i C_g U_\Omega}{C \Omega} \sin \Omega t \right) + \text{h.c.} \quad (\text{A.56})$$

Соотношения детального-равновесия для вероятностей перехода выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0(\Delta) &= \Gamma_{10}^0(-\Delta), \\ \gamma_{01}(t, \Delta) &= -\gamma_{10}(t, -\Delta). \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Подставляя (A.56) в (A.55) и интегрируя, получаем амплитуду перехода $0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
A_{10}(t) &= t_{\alpha k}^\dagger (1 - n_\alpha) n_k e^{i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_k + \Delta)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{\varepsilon_k - \varepsilon_\alpha - \Delta + i0} - \frac{C_g U_\Omega}{2C\Omega} \right. \\
&\times \left. \left[\frac{e^{i\Omega t}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - \Delta - \Omega + i0} - \frac{e^{-i\Omega t}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - \Delta + \Omega + i0} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Возводя ее в квадрат, осуществляя тепловое усреднение и интегрируя, мы получаем полное выражение для вероятности в режиме линейного отклика:

$$\begin{aligned}
W_{10}(t) &= \frac{g}{8\pi^2} \int \frac{s ds}{e^{\beta s} - 1} \left\{ \frac{e^{2\lambda t}}{(s - \Delta)^2 + \lambda^2} - \frac{C_g U_\Omega}{C\Omega} \times \right. \\
&\frac{1}{s - \Delta + i0} \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{s - \Delta - \Omega - i0} - \frac{e^{i\Omega t}}{s - \Delta + \Omega - i0} \right) \left. \right\} + \text{c.c.},
\end{aligned} \tag{A.59}$$

где g определена в (1.12). Теперь мы находим скорость вероятности перехода как производную от вероятности. $\Gamma_{10}(t) = dW_{10}(t)/dt$. Тогда получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}
\gamma_{10}(\Omega) &= -\frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{s}{e^{\beta s} - 1} \times \\
&\left[\frac{1}{s - \Delta + i0} \frac{1}{s - \Delta - \Omega - i0} \right. \\
&\left. - \frac{1}{s - \Delta - i0} \frac{1}{s - \Delta + \Omega + i0} \right].
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Подынтегральное выражение хорошо сходится в комплексной плоскости, и интеграл легко берется:

$$\begin{aligned}
\gamma_{10}(\Omega) &= -\frac{g}{2\pi} \left[\frac{1}{\Omega + i0} \left(\frac{\Delta + \Omega}{e^{\beta(\Delta + \Omega)} - 1} - \frac{\Delta}{e^{\beta\Delta} - 1} \right) + \right. \\
&\left. + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega_n}{i\omega_n - \Delta} \left(\frac{1}{i\omega_n - \Delta - \Omega} - \frac{1}{i\omega_n - \Delta + \Omega} \right) \right].
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Выражая сумму через логарифмическую производную Γ -функции, мы получаем (1.107). С помощью (A.61) и (A.57) мы устанавливаем следующее полезное соотношение:

$$\gamma_{10}(\Omega) - \gamma_{01}(\Omega) = \frac{g}{2\pi}. \quad (\text{A.62})$$

Б Приложения к части 2

Б.1 Келдышевская форма действия АЭШ

В этом приложении мы приводим вывод неравновесного келдышевского действия из гамильтониана (1.3) (1.6). Чтобы избавиться от неудобного 4-х фермионного электрон-электронного взаимодействия в (1.6), его необходимо распарить, используя бозонное поле Хаббарда-Стратоновича $\varphi(t)$. После этого совершается калибровочное преобразование начальных электронных операторов:

$$d_\alpha^\dagger(t) \rightarrow d_\alpha^\dagger(t)e^{i\varphi(t)}, \quad d_\alpha(t) \rightarrow d_\alpha(t)e^{-i\varphi(t)}. \quad (\text{B.1})$$

Действие становится квадратичным по фермионным операторам:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_c + S_t, \\ S_0 &= \int_\gamma \sum_\alpha d_\alpha^\dagger (i\partial_t - \varepsilon_\alpha^{(d)}) d_\alpha + \int_\gamma \sum_k a_k^\dagger (i\varepsilon_t - \varepsilon_k^{(r)}) a_k, \\ S_c &= \frac{1}{4E_c} \int_\gamma \dot{\varphi}^2 dt + q \int_\gamma \dot{\varphi} dt, \\ S_t &= - \int_\gamma \sum_{k,\alpha} \left(t_{k\alpha} a_k^\dagger d_\alpha e^{i\varphi} + \text{H.c.} \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Здесь для простоты мы рассматриваем островок, соединённый с единственным резервуаром. Индекс d обозначает электроны, относящиеся к островку и r - к резервуару. Интегралы следует понимать как контурные, взятые по келдышевскому контуру γ . Интегрируя по фермионам, мы получаем эффективное действие для бозонного поля φ :

$$S_{\text{eff}} = -i \text{tr} \ln(\widehat{G}^{-1} + \widehat{T}) + S_c. \quad (\text{B.3})$$

Здесь матрицы \widehat{G} , \widehat{T} имеют следующую структуру в пространстве резервуар-островок:

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} G_{k,d} & 0 \\ 0 & G_{\alpha,r} \end{pmatrix}, \quad \widehat{T} = \begin{pmatrix} 0 & t_{k\alpha}X \\ t_{\alpha k}^\dagger X^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_c & X_q \\ X_q & X_c \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.4})$$

где $X_{c,q}$ определены в ур.(2.5). Раскладывая S_{eff} до второго порядка по \widehat{T} , мы находим

$$S_{\text{eff}} = \frac{i}{2} \text{tr} \left[\widehat{G} \widehat{T} \widehat{G} \widehat{T} \right] + S_c. \quad (\text{Б.5})$$

Разложение верно в пределе $g_{\text{ch}} \ll 1$ и $N_{\text{ch}} \gg 1$. Таким образом, приходим к диссипативной части действия АЭШ в форме (2.6) с поляризационным оператором Π , заданным следующими общими выражениями:

$$\begin{aligned} \Pi^{R,A}(t, t') &= \frac{i}{2g} \sum_{k,\alpha} |t_{k\alpha}|^2 \left(G_{k,r}^K(t', t) G_{\alpha,d}^{R,A}(t, t') \right. \\ &\quad \left. + G_{k,r}^{A,R}(t', t) G_{\alpha,d}^K(t, t') \right), \\ \Pi^K(t, t') &= \frac{i}{2g} \sum_{k,\alpha} |t_{k\alpha}|^2 \left(G_{k,r}^K(t', t) G_{\alpha,d}^K(t, t') \right. \\ &\quad \left. + G_{k,r}^R(t', t) G_{\alpha,d}^A(t, t') + G_{k,r}^A(t', t) G_{\alpha,d}^R(t, t') \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Если электронная плотность состояний в островке и резервуаре медленно меняется вблизи поверхности Ферми, становится возможным выполнить суммирование по α и k и воспроизвести ядро действия в форме (2.7).

Б.2 Электронная собственная энергия

Здесь для удобства представлены выражения для электронной собственно-энергетической части, необходимые при выводе кинетического уравнения в разделе 2.2. Как следует из Рис. 2.2, низший по $1/N_{\text{ch}}$ вклад в собственно-

энергетическую часть описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{R,A}(t, t') &= i \sum_{\alpha\alpha'} (2\pi)^2 [\delta(\epsilon_\alpha)\delta(\epsilon_{\alpha'})]^{1/2} \\
&\times \sum_k t_{\alpha k}^\dagger t_{k\alpha'} \left[G_{k,r}^{R,A}(t, t') \mathcal{D}^K(t, t') + G_{k,r}^K(t, t') \mathcal{D}^{R,A}(t, t') \right] \\
\Sigma^K(t, t') &= i \sum_{\alpha\alpha'} (2\pi)^2 [\delta(\epsilon_\alpha)\delta(\epsilon_{\alpha'})]^{1/2} \\
&\times \sum_k t_{\alpha k}^\dagger t_{k\alpha'} \left[G_{k,r}^K(t, t') \mathcal{D}^K(t, t') + [G_{k,r}^R(t, t') - G_{k,r}^A(t, t')] \right. \\
&\times \left. [\mathcal{D}^R(t, t') - \mathcal{D}^A(t, t')] \right].
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

В случае постоянных плотностей состояний в островке и резервуаре они могут быть упрощены и записаны в виде (2.12).

Б.3 Туннельная плотность состояний

Туннельная плотность состояний электронов внутри островка определяется через соответствующую полную запаздывающую гриновскую функцию начальных фермионных операторов

$$\begin{aligned}
i\mathbf{G}_d^R(t, t') &= \frac{1}{2} \langle d_+ \bar{d}'_+ e^{-i(\varphi_+ - \varphi'_+)} - d_+ \bar{d}'_- e^{-i(\varphi_+ - \varphi'_-)} \\
&\quad + d_- \bar{d}'_+ e^{-i(\varphi_- - \varphi'_+)} - d_- \bar{d}'_- e^{-i(\varphi_- - \varphi'_-)} \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \{ G_{t,t'}^R D_{t',t}^K + G_{t,t'}^K D_{t',t}^A \}
\end{aligned} \tag{Б.8}$$

Здесь операторы $d_\pm \equiv d_\pm(t)$, $d'_\pm \equiv d_\pm(t')$ это калибровочно-преобразованные операторы электронов внутри островка (см. уравнение Б.1.) Индексы \pm соответствуют верхней (нижней) части келдышевского контура.

Переходя к вигнеровскому представлению, мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_d^R(\varepsilon) &= - \sum_\alpha \int \left\{ G_{\alpha,d}^R(\varepsilon + \omega) \mathcal{B}_\omega \text{Im } \mathcal{D}_\omega^R \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{D}_\omega^A F_{\varepsilon+\omega}^d \text{Im } G_d^R(\varepsilon + \omega) \right\} \frac{d\omega}{2\pi}.
\end{aligned} \tag{Б.9}$$

Тогда, туннельная плотность состояний приобретает вид

$$\nu_d(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \mathbf{G}_d^R(\varepsilon) = \nu_d \int \text{Im} \mathcal{D}_\omega^R \left\{ \mathcal{B}_\omega - F_{\varepsilon+\omega}^d \right\} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{Б.10})$$

Уравнение (Б.10) описывает туннельную плотность состояний электронов внутри островка в неравновесном режиме для произвольного электронного распределения F^d . В равновесии выражение (Б.10) приводит к результату (2.24).

Б.4 Перенормировка действия АЭШ в пределе $g \gg 1$

В данном приложении мы приводим детали вывода уравнения (2.32), описывающего перенормировку константы связи g при неравновесных условиях в режиме слабой кулоновской блокады. В соответствии с общей философией перенормировки мы производим последовательное интегрирование по высоко-частотным модам полей φ , входящих в статистическую сумму. Мы разбиваем скалярное поле на *медленную* и *быструю* компоненты $\varphi \rightarrow \varphi + \theta$, где $\varphi = (\varphi_c, \varphi_q)$ и $\theta = (\theta_c, \theta_q)$ и раскладываем действие до второго порядка по *быстрому* полю θ :

$$\begin{aligned} S[\varphi] &\rightarrow S[\varphi] + \int b_t[\varphi] \theta(t) dt + \frac{1}{2} \int \theta(t) K_{t,t'}^{-1}[\varphi] \theta(t') dt dt', \\ b_t[\varphi] &= \left. \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} \right|_{\theta=0}, \quad K_{t,t'}^{-1}[\varphi] = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Затем мы интегрируем по быстрым полям θ и получаем эффективное действие для медленных компонент:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\varphi] &= S[\varphi] - \frac{1}{2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} b_{\omega_1}^\dagger K_{\omega_1 \omega_2} b_{\omega_2} + \frac{i}{2} \text{tr} \ln K \\ &= S[\varphi] - S_I + S_{II}. \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Здесь частоты ω_1, ω_2 лежат в частотном интервале $[\underline{\Lambda}, \bar{\Lambda}]$, $\underline{\Lambda} < \bar{\Lambda}$. След берется, как по частотам в данном интервале, так и по компонентам в келдышевском пространстве. Высоко-энергетический масштаб $\bar{\Lambda}$ в действии

АЭШ естественно устанавливается первым членом в ур. (2.4): $\bar{\Lambda} \sim gE_c$. Заметим, что линейный по $\theta(t)$ член в (Б.11) в общем случае не исчезает. Но, как будет показано ниже, он иррелевантен, так как ведет к нелогарифмическим поправкам вида $1/\bar{\Lambda}$.

Далее мы производим следующее разбиение:

$$\begin{aligned} K^{-1}[\varphi] &= K^{-1}[0] + \left(K^{-1}[\varphi] - K^{-1}[0] \right) \\ &\equiv K^{-1}[0] + \delta K^{-1}[\varphi] \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

и рассчитываем последнее слагаемое пертурбативно. Оператор $K^{-1}[0]$ определяет пропагатор быстрых полей. Он соответствует пертурбативной гриновской функции действия АЭШ, выражение для него следует из уравнений (2.6)-(2.7):

$$\begin{aligned} K^R(t, t') &= -i\langle \varphi_c(t) \varphi_q(t') \rangle, \quad K^A(t, t') = -i\langle \varphi_q(t) \varphi_c(t') \rangle, \\ K^K(t, t') &= -i\langle \varphi_c(t) \varphi_c(t') \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

В ведущем порядке вигнеровское преобразование пертурбативной функции Грина даётся следующим выражением:

$$\begin{aligned} K_\omega^R &= K_\omega^{A\dagger} = -\frac{4\pi i}{g} \left(\int (F_\varepsilon^d - \frac{1}{g} \sum_\alpha g_\alpha F_{\varepsilon-\omega}^\alpha) d\varepsilon \right)^{-1}, \\ K_\omega^K &= 2i \text{Im} K_\omega^R B_\omega, \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

где мы пренебрегли всеми производными по медленному времени, поскольку нас интересуют только высокие частоты. Физическая электронная функция распределения всегда имеет sign-функцию своим пределом на бесконечности: $F_\varepsilon \rightarrow \text{sgn}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow \infty$. Это приводит к результату:

$$\begin{aligned} K_\omega^R &= K_{p,\omega}^{A\dagger} = -\frac{2\pi i}{g} \frac{1}{\omega + \Delta Q \delta}, \\ B_\omega &= \frac{\sum_\alpha g_\alpha \int d\varepsilon (1 - F_\varepsilon^d F_{\varepsilon-\omega}^\alpha)}{2g(\omega + \Delta Q \delta)}, \\ \Delta Q &= \frac{\nu_d}{2} \sum_\alpha \int d\varepsilon \left[F_\varepsilon^d - \frac{g_\alpha}{g} F_\varepsilon^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Вообще говоря, ΔQ отличается от нуля. Далее мы получаем:

$$\begin{aligned}
S_I &= \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int dt dt' b(t)^\dagger K[0]_\omega e^{-i\omega(t-t')} b(t') \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \int dt dt' b^\dagger(t) e^{-i\omega_1(t-t_1)} K_{\omega_1}[0] \\
&\quad \times \delta K^{-1}[\varphi]_{t_1 t_2} K_{\omega_2}[0] e^{-i\omega_2(t_2-t')} b(t').
\end{aligned} \tag{Б.17}$$

Интегрируя по быстрым частотам ω , ω_1 , ω_2 , мы видим, что первый интеграл $\sim 1/((t-t')\bar{\Lambda})$ и второй $\sim 1/((t-t_1)(t'-t_2)\bar{\Lambda}^2)$. Таким образом, они не существенны для ренорм-группового анализа. Это означает, что только член S_{II} содержит логарифмический по $\bar{\Lambda}$ вклад.

Как всегда, нас интересует первый неисчезающий, зависящий от φ вклад:

$$S_{II} \rightarrow \frac{i}{2} \text{tr} \left\{ K[0] \delta K^{-1}[\varphi] \right\}. \tag{Б.18}$$

Рассчитывая след в уравнении (Б.18), мы получаем

$$\begin{aligned}
S_{II} &= -\frac{i}{2} \int dt dt' \left[\int_{\bar{\Lambda} > |\omega| > \underline{\Lambda}} K_\omega^K(\tau) \frac{d\omega}{2\pi} \right] \\
&\quad \times \left(\bar{X}_c(t) \bar{X}_q(t) \right) \begin{pmatrix} 0 & \Pi^A(t, t') \\ \Pi^R(t, t') & \Pi^K(t, t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_c(t') \\ X_q(t') \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{Б.19}$$

Подставляя его в (Б.12), мы видим, что структура действия АЭШ полностью восстанавливается. Единственная разница состоит в изменении константы связи, дающаяся уравнением (2.32). Отметим, что в случае ненулевого значения ΔQ уравнение (2.36) должно замениться на $\omega_0 \sim \max\{\varepsilon_d, T_r, T_l, |\Delta Q|\delta\}$.

Б.5 Перенормировка псевдо-фермионного действия

Здесь мы приводим детали перенормировки псевдо-фермионного действия (2.53), используемого в разделе 2.5.

$$\Sigma_\varepsilon^{R,\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \omega \quad \omega + \varepsilon \quad \varepsilon$$

$$G_\varepsilon^{R,\sigma} = \xrightarrow{\varepsilon, \sigma} \quad \text{exact Green's function}$$

Рис. 3.7: Уравнение Дайсона для псевдо-фермионной собственно-энергетической части.

Перенормировка Z , Δ , и g .

Точная псевдо-фермионная функция Грина может быть записана как

$$\bar{G}_{\varepsilon,\sigma}^R = \frac{1}{\varepsilon - \xi_\sigma - \Sigma_\varepsilon^{R,\sigma}}. \quad (\text{Б.20})$$

Здесь $\xi_\sigma = \Delta\sigma/2 - \eta$. Чтобы записать её в перенормированном виде (2.69) мы переопределяем константы теории и выписываем стандартные соотношения, определяя перенормировочный параметр Z , перенормированную щель $\bar{\Delta}$ и ширину функции Грина $\Gamma_\varepsilon^\sigma$:

$$Z = \left(1 - \partial_\varepsilon \text{Re} \Sigma^{R,\sigma} \Big|_{\varepsilon=\bar{\xi}_\sigma}\right)^{-1}, \quad (\text{Б.21})$$

$$\bar{\xi}_\sigma = \xi_\sigma + \text{Re} \Sigma^{R,\sigma} \Big|_{\varepsilon=\bar{\xi}_\sigma}, \quad (\text{Б.22})$$

$$i\bar{g}\Gamma_\varepsilon^\sigma = -iZ \text{Im} \Sigma_\varepsilon^{R,\sigma}. \quad (\text{Б.23})$$

Для того, чтобы найти Z и связать \bar{g} и $\bar{\Delta}$ со своими голыми аналогами, мы решаем одно-петлевое уравнение Дайсона для собственно-энергетической части, представленное на Рис. 3.7. С помощью уравнения (2.58) мы находим

$$\text{Re} \Sigma_\varepsilon^{R,\sigma} = \frac{g}{4\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega B_\omega Z(\omega) \times \text{Re} \frac{1}{\varepsilon + \omega\sigma - \bar{\xi}_{-\sigma} - iZ \text{Im} \Sigma_{\varepsilon+\omega\sigma}^{-\sigma,R}}. \quad (\text{Б.24})$$

Здесь важно понимать, что масштабирующий параметр Z не может быть вынесен за знак интеграла. Вообще говоря, он зависит от обрезания

и содержит множитель $\ln(\Lambda/\omega_0)$, где Λ есть ультра-фиолетовая обрезка теории (E_c в нашем случае), в то время как ω_0 – характерный масштаб гриновской функции, входящей в подынтегральное выражение. Чтобы определить ω_0 мы замечаем, что интеграл в (Б.24) расходится и определяется поведением подынтегрального выражения на больших частотах ω . Вот почему характерная частота функции Грина, входящей в (Б.24), есть её бегущая частота: $\omega_0 \sim \omega$. Решая уравнения (Б.24) и (Б.21) с логарифмической точностью, мы получаем

$$\frac{1}{Z^2(\Lambda)} \frac{\partial Z(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{g}{4\pi^2} \frac{B(\Lambda)Z(\Lambda)}{\Lambda}. \quad (\text{Б.25})$$

Интегрируя (Б.25) в пределах $[\omega_0, E_c]$, мы приходим к (2.70) в полной аналогии с равновесным случаем. Таким образом, мы очертили процедуру перенормировки, и остальные формулы (2.69)-(2.71) могут быть получены аналогичным образом.

Уравнение Каллана-Симанчика для $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}$.

Аномальная размерность γ оператора $\langle \mathcal{N} \rangle$ определяется как

$$Z^\gamma \overline{\langle \mathcal{N} \rangle}_{\text{pf}}(\bar{\Delta}, \bar{g}) = \langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}(\Delta, g, \Lambda). \quad (\text{Б.26})$$

Чтобы извлечь γ , мы пишем соответствующее уравнение Каллана-Симанчика для $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}(\Delta, g, \Lambda) = \sum_\sigma \langle \bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma \rangle$. В древесном приближении $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}(\Delta, g, \Lambda)$ описывается уравнением (А.6). Следуя общей стратегии, мы выписываем соответствующее уравнение Каллана-Симанчика для функции $\langle \mathcal{N} \rangle_{\text{pf}}(\Delta, g, \Lambda)$ в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_\Delta \frac{\partial}{\partial \Delta} + \gamma \frac{g}{4\pi^2} \right) \langle \mathcal{N} \rangle(g, \Delta, \Lambda) = 0. \quad (\text{Б.27})$$

Соответствующие β - функции легко находятся из уравнения (2.71):

$$\beta_g = \frac{g^2}{2\pi^2}, \quad \beta_\Delta = \frac{g\Delta}{2\pi^2}. \quad (\text{Б.28})$$

$$\delta\langle\mathcal{N}\rangle_{pf} = \text{Diagram}$$

Рис. 3.8: Поправка к псевдо-фермионному числу частиц $\langle\mathcal{N}\rangle_{pf}$.

Слагаемое с β_g всегда содержит дополнительный множитель g и должно быть опущено в лидирующем порядке. Чтобы найти γ , нам необходимо найти $\langle\mathcal{N}\rangle_{pf}$ в следующем за древесным приближении. Диаграмма, представляющая поправку к псевдо-фермионному числу частиц, представлена на Рис. 3.8. Вычисляя с логарифмической точностью и повсеместно используя соотношение $\mathcal{B}_\omega \rightarrow \text{sgn } \omega$ при $\omega \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{N}\rangle_{pf}(\Delta, g, \Lambda) = & 1 - \frac{\mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^-}{2} \\ & - \frac{g}{8\pi^2} \Delta(\partial_\eta \mathcal{F}^+ - \partial_\eta \mathcal{F}^-) \int_{\omega_0}^{\Lambda} \frac{d\omega}{\omega} B(\omega). \end{aligned} \quad (\text{Б.29})$$

Подставляя уравнение (Б.29) в уравнение (Б.27), находим $\gamma = 0$ что и доказывает (2.72).

Публикации автора по теме диссертации

1. Ya.I. Rodionov, I.S. Burmistrov, A.S. Ioselevich, Charge relaxation resistance in the Coulomb blockade problem, Phys. Rev. B **80**, 035332 (2009).
2. Ya.I. Rodionov, I.S. Burmistrov. N.M. Chtchelkatchev, Relaxation dynamics of the electron distribution in the Coulomb-blockade problem, Phys. Rev. B **82**, 155317 (2010).
3. Ya.I. Rodionov, I.S. Burmistrov, Out-of-Equilibrium Admittance of Single Electron Box Under Strong Coulomb Blockade, Письма в ЖЭТФ т. 92 вып. 10 стр. 766(2010).

Литература

- [1] T.A. Fulton and G.J. Dolan, Phys. Rev. Lett. **59**, 807 (1987).
- [2] G. Schön, A. Zaikin, Phys. Rep. **198**, 237 (1990).
- [3] I. Aleiner, P. Brouwer, L. Glazman, Phys. Rep. **358**, 309 (2002).
- [4] For a review, see L.I. Glazman and M. Pustilnik in *New Directions in Mesoscopic Physics (Towards to Nanoscience*, eds. R. Fazio, G. F. Gantmakher and Y. Imry (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [5] Z. Phys. B: Condens. Matter **85**, 317 (1991), special issue on single charge tunneling, edited by H. Grabert and H. Horner.
- [6] *Single Charge Tunneling*, edited by H. Grabert and M.H. Devoret (Plenum, New York, 1992).
- [7] M. Büttiker, Phys. Rev. B **36**, 3548 (1987); Y. Blanter and M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000).
- [8] F. Giazotto, T.T. Heikkilä, A. Luukanen, A.M. Savin and J.O. Pekola, Rev. Mod. Phys. **78**, 217 (2006).
- [9] R. Scheibner et al., Phys. Rev. B **75**, 041301 (2007).
- [10] E.A. Hoffmann et al., NanoLett. **9**, 779 (2009).
- [11] J. Paaske, A. Rosch, P. Woelfle, N. Mason et al., Nat. Phys. **2**, 460 (2006)
- [12] D.A. Bagrets, , I.V. Gornyi, and D.G. Polyakov Phys. Rev. B **80**, 113403 (2009)
- [13] M. Büttiker, H. Thomas, A. Pretre, Phys. Lett. A **180**, 364 (1993).
- [14] M. Büttiker, A.M. Martin, Phys. Rev. B **61**, 2737 (2000).

- [15] S.E. Nigg, R. López, and M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **97**, 206804 (2006).
- [16] S.E. Nigg M. Büttiker, Phys. Rev. B **77**, 085312 (2008).
- [17] J. Gabelli, G. Feve, J.M. Berroir, B. Placais et al., Science **313**, 499 (2006).
- [18] F. Persson, C.M. Wilson, M. Sandberg, G. Johansson, P. Delsing, Nano Lett. **10**, 953 (2010).
- [19] C. Mora, K. Le Hur, Nat. Phys. **6**, 697 (2010)
- [20] A. Glatz and I.S. Beloborodov, Phys. Rev. B **81**, 033408 (2010).
- [21] B. Kubala, J. König and J. Pekola, Phys. Rev. Lett. **100**, 066801 (2008);
- [22] D.M. Basko and V.E. Kravtsov, Phys. Rev. Lett. **93**, 056804 (2004); Phys. Rev. B **71**, 085311 (2005).
- [23] A. Altland and F. Egger, Phys. Rev. Lett. **102**, 026805 (2009).
- [24] D. Bagrets and F. Pistolesi, Phys. Rev. B **75**, 165315 (2007).
- [25] I. S. Beloborodov, K. B. Efetov, A. Altland and F. W. J. Hekking Phys. Rev. B **63**, 115109 (2001)
- [26] K.B. Efetov and A. Tschersich, Phys. Rev. B **67**, 174205 (2003).
- [27] K.A. Matveev, Sov. Phys. JETP **72**, 892 (1991).
- [28] H. Grabert, Physica B **194-196**, 1011 (1994); Phys. Rev. B **50**, 17364 (1994).
- [29] K.A. Matveev, Phy.Rev. B **51**, 1743 (1995).
- [30] X. Wang and H. Grabert, Phys. Rev. B **53**, 12621 (1996).
- [31] G. Göppert, H. Grabert, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **81**, 2324 (1998).

- [32] I.S. Beloborodov, A.V. Andreev, and A.I. Larkin, Phys. Rev. B **68**, 024204 (2003).
- [33] Z Ringel, Y. Imry, O. Entin-Wohlman, Phys. Rev. B **78** 165304 (2008).
- [34] Hee Chul Park and Kang-Hun Ahn, Phys. Rev. Lett. **101**, 116804 (2008).
- [35] I. Beloborodov, K. Efetov, A. Altland, and F. Hekking, Phys. Rev. B **63**, 115109 (2001).
- [36] V. Ambegaokar, U. Eckern and G. Schön, Phys. Rev. Lett. **48**, 1745 (1982).
- [37] I.S. Burmistrov, A.M.M. Pruisken Phys. Rev. Lett. **101**, 056801 (2008)
- [38] A. Altland, L. Glazman, A. Kamenev, and J. Meyer, Ann. of Phys. (N.Y) **321**, 2566 (2006).
- [39] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course in Theoretical Physics* (Pergamon, Oxford, 1981), Vol. 3.
- [40] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course in Theoretical Physics* (Pergamon, Oxford, 1981), Vol. 5.
- [41] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1963).
- [42] W. Hofstetter and W. Zwerger, Phys. Rev. Lett. **78**, 3737 (1997); Eur. Phys. J. B **5**, 751 (1998).
- [43] F. Guinea and G. Schön, Europhys. Lett. **1**, 585 (1986); S.A. Bulgadaev, JETP Lett. **45**, 622 (1987).
- [44] S.E. Korshunov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **45**, 342 (1987) [JETP Lett. **45**, 434 (1987)].
- [45] S.A. Bulgadaev, Phys. Lett. A **125**, 299 (1987).

- [46] S.V. Panyukov and A.D. Zaikin, Phys. Rev. Lett. **67**, 3168 (1991).
- [47] A.M. Polyakov, *Gauge fields and strings*, (Harwood Academic Publishers, Shur, 1987).
- [48] E. Ben-Jacob, E. Mottola and G. Schön, Phys. Rev. Lett. **51**, 2064 (1983); C. Wallisser et al., Phys. Rev. B **66**, 125314 (2002).
- [49] I.S. Burmistrov and A.M.M. Pruisken, Phys. Rev. B **81**, 085428 (2010).
- [50] I.O. Kulik and R.I. Shekhter, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **68**, 623 (1975) [Sov. Phys. JETP **41**, 308 (1975)]; E. Ben-Jacob and Y. Gefen, Phys. Lett. A **108**, 289 (1985); K.K. Likharev and A.B. Zorin, J. Low Temp. Phys. **59**, 347 (1985); D.V. Averin and K.K. Likharev, J. Low Temp. Phys. **62**, 345 (1986).
- [51] A.A. Abrikosov, Physics **2**, 21 (1965).
- [52] A.I. Larkin and V.I. Melnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** 1231 (1971) [Sov. Phys. JETP **34**, 656 (1972)].
- [53] S. Sachdev and J. Ye, Phys. Rev. Lett. **70**, 3339 (1993).
- [54] L. Zhu and Q. Si, Phys. Rev. B **66**, 024426 (2002).
- [55] G. Zaránd and E. Demler, Phys. Rev. B **66**, 024427 (2002).
- [56] G. Schön Phys. Rev. B **32**, 4469 (1985).
- [57] G.M. Eliashberg, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **41**, 1241 (1961) [Sov. Phys. JETP **14**, 886 (1962)].
- [58] H. Schoeller and G. Schön, Phys. Rev. B **50**, 18436 (1994).
- [59] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University, New York, 1997).
- [60] Ya.M. Blanter, cond-mat/0511478 (unpublished).

- [61] G. B. Lesovik and R. Loosen, JETP Lett. **65**, 295 (1997).
- [62] R. Deblock, E Onac, L Gurevich, L.P. Kouwenhoven, Science **301**, 203 (2003); E. Onac F. Balestro, B. Trauzettel, C. F. Lodewijk and L.P. Kouwenhoven, Phys. Rev. Lett. **96**, 026803 (2006).
- [63] R. Scheibner et al., New J. Phys. **10**, 08306 (2008).
- [64] A.S. Dzurak et al., Phys. Rev. B **55**, 10197 (1998).
- [65] S. Möller, H. Buhmann, S.F. Godijn, and L.W. Molenkamp, Phys. Rev. Lett. **81**, 5197 (1998).
- [66] M. Amman, E. Ben-Jacob, and J. Cohn, Z. Phys. B **85**, 405 (1991).
- [67] C.W.J. Beenakker and A.A.M. Staring, Phys. Rev. B **46**, 9667 (1992).
- [68] A.V. Andreev and K.A. Matveev, Phys. Rev. Lett. **86**, 280 (2001).
- [69] M. Turek and K.A. Matveev, Phys. Rev. B **65**, 115332 (2002).
- [70] K.A. Matveev and A.V. Andreev, Phys. Rev. B **66**, 045301 (2002).
- [71] B. Kubala and J. König, Phys. Rev. B **73**, 195316 (2006).
- [72] T. Nakanishi and T. Kato, Journal of the Physical Society of Japan **76**, 034715 (2007).
- [73] X. Zianni, Phys. Rev. B **75** 045344 (2007).
- [74] I.S. Beloborodov, A.V. Lopatin, F.W.J. Hekking, R. Fazio, V.M. Vinokur, Europhys. Lett. **69**, 435 (2005).
- [75] V. Tripathi, Y.L. Loh, Phys. Rev. Lett. **96**, 046805 (2006).
- [76] A. Glatz and I.S. Beloborodov, Phys. Rev. B **79**, 235403 (2009).
- [77] A. Glatz and I.S. Beloborodov, Europhys. Lett. **87**, 57009 (2009).

- [78] T. T. Heikkilä Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **102**, 130605 (2009)
- [79] M. A. Laakso, T. T. Heikkilä and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **104**
- [80] G.-L. Ingold and Yu.V. Nazarov, in *Single Charge Tunneling*, edited by H. Grabert and M. H. Devoret, NATO ASI, Ser. B, Vol. 294 (Plenum, New York, 1991).
- [81] N.M. Chtchelkatchev, V.M. Vinokur, T.I. Baturina, Phys. Rev. Lett. **103**, 247003 (2009).
- [82] N.M. Chtchelkatchev, V.M. Vinokur, T.I. Baturina, arXiv:1003.6105
- [83] A. Glatz, I. S. Beloborodov, N. M. Chtchelkatchev, and V. M. Vinokur, arXiv:1005.5188.
- [84] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957).
- [85] M. A. Skvortsov, A. I. Larkin, M. V. Feigel'man, Phys. Rev. B **63**, 134507 (2001).
- [86] J. Rammer, and H. Smith, Rev. Mod. Phys. **58**, 323, (1986); A. Kamenev, A. Levchenko, Adv. in Phys. **58**, 197 (2009).
- [87] B.L. Altshuler and A.G. Aronov, in *Electron-Electron Interactions in Disordered Conductors*, ed. A.J. Efros and M. Pollack, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1985.
- [88] A. Schmid, Z. Phys. **271**, 251 (1974).
- [89] B.L. Altshuler and A.G. Aronov, JETP Lett. **30**, 482 (1979).
- [90] A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the theory of metals*, North-Holland, Amsterdam (1988).
- [91] Формально, интеграл в уравнении (2.39) для $\mathcal{G}(\tau)$ расходится при $\omega \rightarrow 0$. Однако, эта расходимость обусловлена присутствием нефизической

нулевой моды в бозевском поле φ в действии АЭШ (2.3). Исключение нулевой моды достигается заменой $1/\omega$ на $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega^3/(\omega^2 + \epsilon^2)^2$ в уравнениях (2.39). очевидно, данная подстановка не влияет на конечный результат (2.40).

- [92] J. A. Rosch, P. Wölfle, *Advances in Solid State Physics*, vol. 42, p.175
- [93] N.S. Wingreen and Y. Meir, *Phys. Rev. B* **49**, 11040 (1993).
- [94] D.V. Averin and Yu.V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2246 (1990)
- [95] A. Mittal Ph.D. thesis, Yale University (1996)
- [96] Ya.M. Blanter, *Phys. Rev. B* **54**, 12807 (1996).
- [97] U. Sivan, Y. Imry, A.G. Aronov, *Europhys. Lett.* **28**, 115 (1994).
- [98] C. Pasquer, U. Meirav, F. I. B. Williams, D. C. Glattli Y. Jin and B. Etienne *Phys. Rev. Lett.* **70**, 69 (1993)
- [99] M. A. Laakso, T. T. Heikkilä and Yu. V. Nazarov, arxiv: 1009.3400.
- [100] Dmitri V. Averin and Jukka P. Pekola, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 220601 (2010).
- [101] Ya.I. Rodionov, I.S. Burmistrov, N.M. Chtchelkatchev, *Phys. Rev. B* **82**, 155317 (2010).
- [102] Ya.I. Rodionov, I.S. Burmistrov, A.S. Ioselevich, *Phys. Rev. B* **80**, 035332 (2009)
- [103] G. Mahan, *Many particle physics*. (Plenum, New York, 2000), 3rd ed.
- [104] A. Kamenev, A. Levchenko, *Adv. in Phys.* **58**, 197 (2009).
- [105] A. Petković, N.M. Chtchelkatchev, T.I. Baturina, V.M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 187003 (2010).