

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л. Д. ЛАНДАУ

на правах рукописи

КОРШУНОВ Сергей Евгеньевич

**ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДВУМЕРНЫХ И СЛОИСТЫХ
СИСТЕМАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ**

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка - 2005

Содержание

Введение	2
1 XY модели и объекты их применения	8
1.1 Обычная XY модель	8
1.2 Сверхпроводящие сетки и решётки и фрустрированные XY модели	16
2 Максимально фрустрированная XY модель на квадратной решётке	20
2.1 Основное состояние и топологические возбуждения	20
2.2 Дробные вихри и фазовые переходы	22
2.3 Фазовый переход на доменной стенке и его последствия	24
2.4 Последовательность фазовых переходов	26
2.5 Структура фазовой диаграммы при учёте взаимодействия не только ближайших соседей	29
3 Планарный антиферромагнетик с треугольной решёткой	33
3.1 Последовательность фазовых переходов в отсутствие магнитного поля	33
3.2 Структура фазовой диаграммы во внешнем магнитном поле	37
4 Планарный антиферромагнетик с решёткой кагоме	41
4.1 Основные состояния	41
4.2 Нультемпературные флуктуации	43
4.3 Флуктуации при конечной температуре	46
4.4 Фазовый переход, связанный с упорядочением по киральностям	49
4.5 Структура фазовой диаграммы	54
5 Решётка SFS контактов	56
5.1 Классификация дефектов и возможные фазовые переходы	56
5.2 Дуальное и кулоновское представления	58
5.3 Структура фазовой диаграммы	60
6 Двумерная сверхтекучая ферми-жидкость с p-спариванием	62
6.1 Аксиальная фаза	62
6.2 Планарная фаза	64
7 XY модель со случайным сдвигом фазы	66
7.1 Случайный потенциал	67
7.2 Беспорядок и появление неспаренных вихрей	68
7.3 Вихревые пары и перенормировка модуля жёсткости	70
7.4 Структура фазовой диаграммы	73
8 Слоистый сверхпроводник	76
8.1 В отсутствие внешнего магнитного поля	77
8.2 В параллельном слоям магнитном поле	80
8.3 Предел сильного поля	84
Заключение	87
Приложение. Список публикаций	89
Список литературы	90

Введение

В 70-ые годы было показано, что в широком классе двумерных систем с непрерывным вырождением (планарные ферромагнетики [1–5], сверхтекучие [6] и сверхпроводящие [7] плёнки, тонкие плёнки жидких кристаллов [8] и двумерные кристаллы [9–11]), происходящий при повышении температуры фазовый переход в неупорядоченное состояние адекватным образом описывается в терминах диссоциации пар логарифмически взаимодействующих точечных топологических возбуждений - вихрей, дислокаций или дисклинаций (см. также обзоры [12–15]). Это послужило повышению интереса к экспериментальному исследованию различных двумерных систем с непрерывным вырождением, в том числе и таких, чьи термодинамические свойства не вполне укладываются в приведенную выше схему. В первую очередь речь может идти об искусственно изготовленных сверхпроводящих объектах с дискретной структурой, таких как решётки джозефсоновских контактов [16, 17], находящиеся во внешнем магнитном поле. Подобные системы характеризуются сочетанием непрерывного вырождения с дискретным.

Основной целью настоящей диссертации является исследование структур упорядоченных состояний, характера фазовых переходов и вида фазовых диаграмм двумерных систем с непрерывным вырождением, адекватное описание термодинамики которых помимо учёта логарифмического взаимодействия точечных топологических дефектов должно принимать во внимание также и иные существенные факторы. Изучен ряд представляющих интерес в различных контекстах ситуаций,

- 1) когда классификация возбуждений системы помимо точечных объектов включает в себя так же и линейные: доменные стенки или солитоны, что, в свою очередь, приводит к появлению нового класса дефектов - вихрей с дробным топологическим зарядом;
- 2) когда основные состояния помимо чисто симметричного вырождения обладают также и дополнительным вырождением, не связанным с симметрией гамильтониана, вследствие чего установление характера упорядочения при низких температурах требует анализа свободной энергии малых флуктуаций в окрестности основных состояний (в гармоническом приближении или даже с учётом ангармонизмов);
- 3) когда из-за наличия в системе беспорядка логарифмически взаимодействующие точечные дефекты испытывают воздействие случайного потенциала, а также
- 4) когда система состоит из двумерных слоёв, слабо связанных между собой и, соответственно, допускает редукцию к кулоновскому газу со слоистой же структурой.

С формальной точки зрения основным объектом исследования диссертации являются различные модификации двумерной XY модели, а именно фрустрированная, антиферромагнитная, с дополнительным минимумом взаимодействия, со случайным сдвигом фазы и слоистая. С физической же точки зрения изложенные результаты применимы для описания решёток джозефсоновских контактов или сеток из сверхпроводящих проволок, находящихся во внешнем магнитном поле, планарных антиферромагнетиков, решёток SFS (сверхпроводник-ферромагнетик-сверхпроводник) контактов, тонких плёнок сверхтекучей ферми-жидкости с p -спариванием, а также слоистых сверхпроводников и магнетиков.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Установлено, что классификация дефектов в двумерных фрустрированных XY моделях, характеризующихся сочетанием непрерывного и дискретного вырождения помимо обычных вихрей и доменных стенок (существование которых следует

- из симметрии параметра порядка) включает в себя вихри с дробными топологическими зарядами, которые могут образовываться на доменных стенках. Квантование топологических зарядов дробных вихрей зависит от структуры решётки.
2. Показано, что логарифмическое взаимодействие перегибов на доменной стенке приводит к фазовому переходу, при котором теряется связь между флуктуациями фазы по обе стороны такой стенки.
 3. Установлена последовательность, в которой происходят фазовые переходы в максимально фрустрированных XY моделях на квадратной и треугольной решётках.
 4. Построена фазовая диаграмма максимально фрустрированной XY модели с квадратной решёткой и взаимодействием не только ближайших соседей.
 5. Построена фазовая диаграмма находящегося во внешнем магнитном поле планарного антиферромагнетика с треугольной решёткой.
 6. Установлена структура упорядоченного состояния в антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме, стабилизируемая ангармоническими флуктуациями. Показано, что соответствующий фазовый переход должен происходить при температуре на три порядка ниже, чем диссоциация пар дробных вихрей, и что наблюдение такого упорядочения требует макроскопических размеров системы.
 7. Построена фазовая диаграмма планарного антиферромагнетика с решёткой кагоме и взаимодействием не только ближайших соседей.
 8. Показано, что в двумерных системах с непрерывным вырождением может происходить расщепление фазового перехода на два, обусловленное возможностью образования солитонов. При этом, несмотря на отсутствие дискретного вырождения, один из переходов будет иметь изинговскую природу. Продемонстрировано, что в число физических систем, в которых возможно такое расщепление, входят решётки SFS контактов и обе сверхтекучих фазы двумерной ферми-жидкости с p -спариванием.
 9. Установлена структура фазовой диаграммы двумерной XY модели со случайным фазовым сдвигом (что в терминах вихрей соответствует наличию случайного потенциала с логарифмическими корреляциями) и показано, что она не содержит возвратного перехода в неупорядоченную фазу. Продемонстрировано, что описание такой системы при помощи традиционного разложения по химической активности вихрей приводит к появлению бесконечного набора расходимостей, эффективным способом суммирования которых оказывается применение разложения по концентрации вихревых пар.
 10. Показано, что статсумма межслойных вихревых петель в слоистых сверхпроводниках или планарных магнетиках может быть сведена к статсумме слоистого кулоновского газа, температура фазового перехода в котором даже в пределе слабой связи между слоями оказывается выше, чем температура диссоциации вихревых пар в аналогичной системе без непосредственного взаимодействия слоёв. Это позволяет сделать вывод о невозможности существования промежуточной фазы, в которой имелась бы когерентность внутри каждого слоя, но отсутствовала бы когерентность между слоями.
 11. Доказано, что приложение к слоистому сверхпроводнику параллельного слоям магнитного поля хотя и ослабляет взаимное влияние между слоями, но также не может привести к потере межслойной когерентности, в том числе в пределе сильного поля.

Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения, списка работ, в которых опубликованы представленные результаты, и списка цитированной литературы. Во введении обоснована актуальность темы и дана характеристика объектов исследования. Здесь же сформулированы цели работы и приводятся результаты, выносимые на защиту, а также раскрывается содержание диссертации по главам.

Первая глава начинается с краткого обзора хорошо известных свойств обычной двумерной XY модели, основной целью которого является введение понятий и описание методов, интенсивно используемых ниже. Во втором разделе этой главы обсуждается возможность применения XY моделей для описания решёток джозефсоновских контактов и сеток из сверхпроводящих проволок и вводится понятие фрустрированных XY моделей, широко используемых для описания подобных сверхпроводящих структур при наличии перпендикулярного магнитного поля. Значительная часть диссертации (главы 2–4) посвящена исследованию таких моделей в наиболее интересном случае, когда величина магнитного поля соответствует полужелтому числу квантов потока на каждую элементарную ячейку. Первая глава носит вводный характер и не содержит новых результатов.

Вторая глава посвящена исследованию максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке, которая является наиболее активно изучаемой моделью статистической физики, сочетающей непрерывное вырождение с дискретным. В этой модели дискретное вырождение является простейшим из возможных, т. е. двукратным [18]. Это позволяет предположить [19], что наряду с фазовым переходом Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ), [1–5], обусловленным диссоциацией вихревых пар и происходящим при температуре $T = T_V$, в системе должен иметь место также и второй фазовый переход (изинговского типа), связанный с появлением доменных стенок и происходящий при $T = T_{DW}$.

Вопрос о том, в какой именно последовательности происходят эти фазовые переходы, оказывается весьма нетривиальным. Дело в том, что взаимодействие доменных стенок с вихрями носит непертурбативный характер и обусловлено существованием нового класса топологических возбуждений - дробных вихрей, образующихся на дефектах доменных стенок. Это существенным образом ограничивает возможные сценарии развития событий. При этом важную роль играет то, что на одиночной доменной стенке при $T = T_K < T_V$ происходит фазовый переход, связанный с диссоциацией пар логарифмически взаимодействующих перегибов [20]. Это приводит (для $T > T_K$) к потере связи между флуктуациями фазы по обе стороны стенки, что, в свою очередь, обеспечивает $T_V < T_{DW}$, по крайней мере, если фазовый переход при $T = T_{DW}$ является непрерывным.

Если бы энергия доменной стенки была бы свободным параметром, позволяющим изменять T_{DW} независимо от T_V и T_K , понижение этого параметра привело бы (при $T_{DW} = T_K$) к слиянию двух фазовых переходов в один (скорее всего, первого рода) и лишь после дальнейшего понижения T_{DW} в несколько раз произошло бы повторное расщепление фазовых переходов. В новом режиме потеря фазовой когерентности была бы связана с диссоциацией пар дробных вихрей и происходила бы как отдельный фазовый переход при $T = T_{FV} > T_{DW}$. Анализ, проведенный в заключительном разделе второй главы, показывает, что добавление к гамильтониану максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке взаимодействия с более далёкими соседями не обеспечивает возможность независимого изменения T_{DW} и T_V и, следовательно, и в этом случае в рассматриваемой системе реализуется лишь один из трёх перечисленных

выше сценариев разрушения $U(1) \times Z_2$ упорядочения, при котором $T_V < T_{DW}$.

Однако оказывается, что при увеличении взаимодействия со следующими за ближайшими соседями происходит фазовый переход совсем иной природы, связанный с перестройкой основного состояния, которая приводит к исчезновению дискретного и появлению дополнительного непрерывного вырождения, не связанного с симметрией (т. е. случайного). Вследствие этого установление полной структуры фазовой диаграммы максимально фрустрированной XY модели с квадратной решёткой и взаимодействием не только ближайших соседей оказывается возможным лишь при учёте свободной энергии гармонических флуктуаций, которая приводит к снятию случайного вырождения.

Третья глава посвящена анализу антиферромагнитной XY модели на треугольной решётке. В отсутствие внешнего магнитного поля она представляет собой максимально фрустрированную XY модель, обладающую в случае треугольной решётки тем же самым вырождением основного состояния, $U(1) \times Z_2$ [21], что и в случае квадратной решётки. Анализ структуры доменных стенок и свойств элементарных дефектов на этих стенках позволяют убедиться, что все выводы предыдущей главы, относящиеся к свойствам флуктуирующих доменных стенок и последовательности фазовых переходов в максимально фрустрированной XY модели, справедливы и в случае треугольной решётки.

Необычным свойством планарного антиферромагнетика с треугольной решёткой является сохранение непрерывного вырождения основного состояния [22] даже при приложении внешнего магнитного поля, разрушающего симметрию, ответственную за существование непрерывного вырождения в отсутствие поля. Различие в свободной энергии спиновых волн приводит к снятию этого случайного вырождения и появлению трёх различных упорядоченных фаз, обладающих трёхподрешёточной структурой. Все они характеризуются наличием настоящего дальнего порядка по ориентации спинов, принадлежащих к одной и той же подрешётке, а фазовые переходы между ними относятся к изинговскому классу универсальности.

Исследуемый в четвёртой главе планарный антиферромагнетик с решёткой кагоме и взаимодействием как ближайших, так и следующих за ближайшими соседями, представляет собой ещё один пример системы с комбинированным $U(1) \times Z_2$ вырождением. Однако, в отличие от моделей, рассмотренных в двух предыдущих главах, в этой системе энергия доменной стенки является действительно независимым параметром, который определяется взаимодействием следующих за ближайшими соседями и обращается в ноль при исчезновении этого взаимодействия [23]. Это делает актуальным обсуждение возможности альтернативной последовательности фазовых переходов, когда появление бесконечных доменных стенок происходит при более низкой температуре, чем потеря фазовой когерентности, которая в этом случае связана с диссоциацией пар дробных вихрей.

Оказывается, что в такой ситуации доменные стенки имеют отнюдь не изинговскую природу, поскольку их появление приводит к перемешиванию шести различных вакуумов. Ренормгрупповой анализ, основанный на эквивалентности между доменными стенками в рассматриваемой модели и ступеньками в $(2+2)$ -мерном аналоге модели поверхности кристалла и учитывающий взаимное влияние топологических возбуждений различных типов, позволяет показать, что температура фазового перехода, связанного с появлением таких доменных стенок, зависит от энергии стенки на единицу длины не линейно, а гораздо более медленно. Это приводит к чрезвычайной узости окна значений параметров, при которых возможна реализация сценария с $T_{DW} < T_{FV}$.

В случае, когда взаимодействующими являются только ближайшие соседи, энер-

гия доменной стенки обращается в ноль, что приводит к экспоненциальному (по числу узлов в системе) вырождению основного состояния [24], не связанному с симметрией. Это случайное вырождение снимается при учёте свободной энергии спиновых волн. Однако, поскольку гамильтониан, описывающий гармонические флуктуации, в данной модели имеет один и тот же вид для всех основных состояний, это происходит лишь при учёте ангармонизмов. Из-за численной малости безразмерного параметра, характеризующего обусловленную флуктуациями свободную энергию доменной стенки, в такой ситуации два фазовых перехода должны происходить при весьма различных температурах, $T_{DW} \sim 10^{-3}T_{FV}$. При этом дальний порядок по дискретным степеням свободы в низкотемпературной фазе (при $T < T_{DW}$) будет характеризоваться макроскопически большими значениями корреляционного радиуса, что делает наблюдение такого упорядочения чрезвычайно затруднительным.

Также, как в случае треугольной решётки, полученные результаты применимы для описания не только планарных антиферромагнетиков, но и решёток джозефсоновских контактов и сеток из сверхпроводящих проволок с полуцелым числом квантов потока на каждую треугольную ячейку, а также решёток π -контактов в отсутствие магнитного поля. В таких системах взаимодействием, приводящим к снятию случайного вырождения, является магнитное взаимодействие токов.

В отличие от глав 2–4, в которых анализируются модели, основные состояния которых характеризуются комбинацией непрерывного вырождения с дискретным, три следующих главы посвящены эффектам, которые могут возникать в системах с чисто непрерывным $U(1)$ вырождением. В пятой главе рассматривается модификация обычной (т. е. нефрустрированной) XY модели, в которой вырождение основного состояния является таким же, как и в стандартной версии, однако помимо вихрей важную роль в термодинамике играют солитоны - линейные дефекты, существование которых определяется специфическим видом взаимодействия, обладающего дополнительным минимумом и характерного для SFS контактов вблизи перехода в π -состояние [25–27]. В отличие от доменных стенок солитоны не являются неустранимыми топологическими особенностями, поэтому могут иметь точки окончания, которые, однако, представляют собой вихри с полуцелым топологическим зарядом.

Статсумма такой модели может быть представлена в виде статсуммы кулоновского газа полуцелых зарядов, взаимодействующих с бинарными переменными изинговского типа. Это позволяет продемонстрировать, что если энергия солитона мала, то переход БКТ расщепляется на два фазовых перехода, один из которых изинговского типа и связан с обращением в ноль свободной энергии солитона, а второй относится к классу универсальности БКТ и связан с диссоциацией пар вихрей с полуцелым топологическим зарядом. В промежуточной фазе сохраняется конечной сверхтекучая плотность, однако когерентным является движение не куперовских пар (парный коррелятор параметра порядка спадает экспоненциальным образом), а пар из куперовских пар.

В шестой главе показано, что как в аксиальной, так и в планарной фазе сверхтекучей ферми-жидкости с p -спариванием возможно образование аналогичных солитонов, что при достаточно слабом спин-орбитальном взаимодействии приводит к возможности расщепления БКТ перехода на два по схеме, описанной в предыдущей главе. При этом эффективная величина спин-орбитального взаимодействия, определяющего энергию солитона и позволяющего регулировать глубину расщепления, может быть уменьшена произвольным образом при помощи перпендикулярного к плёнке магнитного поля.

В седьмой главе обсуждается двумерная XY модель со случайным сдвигом фазы, что в терминах вихрей соответствует появлению случайного потенциала с логарифми-

чески расходящимися корреляциями [28]. Рассматривая влияние подобного беспорядка на расходимость главной поправки к взаимодействию вихрей по степеням их химической активности, Рубинштейн, Шрайман и Нельсон [28] пришли к выводу о неизбежности в такой системе возвратного перехода в неупорядоченную фазу при понижении температуры (даже если беспорядок является сколь угодно слабым). Анализ поправок более высоких порядков показывает, что подобный подход не является вполне адекватным, поскольку в любой точке фазовой диаграммы значительная часть таких поправок оказывается расходящейся, что, вообще говоря, могло бы свидетельствовать о неустойчивости упорядоченной фазы. Более аккуратный анализ, основанный на разложении по концентрации вихревых пар, позволяет построить фазовую диаграмму, на которой присутствует область стабильности упорядоченной фазы и отсутствует возвратный переход в неупорядоченную фазу. При этом значение критической амплитуды беспорядка в области малых температур может быть найдено исходя из анализа вероятности спонтанного рождения одиночного вихря. Рассмотренная в этой главе модель применима для описания решётки джозефсоновских контактов с геометрическими нерегулярностями в присутствии поперечного магнитного поля, величина которого соответствует (в среднем) целому числу квантов потока на ячейку [29], а также планарных магнетиков со случайным взаимодействием Дзялошинского-Мория [30, 31].

В восьмой главе исследуется возможность потери межслойной когерентности в трёхмерных системах с непрерывным вырождением и слабой связью между слоями. Для описания флуктуаций в слоистом сверхпроводнике использована анизотропная трёхмерная версия XY модели, явным образом учитывающая флуктуации магнитного поля. В двух различных предельных случаях (отсутствия джозефсоновской связи между слоями и отсутствия вихревых петель, пересекающих слой) эта модель допускает редукцию к представлению слоистого кулоновского газа, позволяющему легко оценить температуру фазового перехода. Сравнение двух результатов показывает, что гипотеза Фриделя [32] о том, что потеря когерентности между слоями может происходить как отдельный фазовый переход при более низкой температуре, чем разрушение сверхпроводимости в каждом слое ($T_{\perp} < T_{\parallel}$), не имеет под собой оснований. Полученные выводы применимы и к слоистым ферромагнетикам.

Дополнительным фактором, который мог бы привести к потере межслойной когерентности в сверхпроводнике со слоистой структурой, является магнитное поле, приложенное параллельно слоям [33]. Такое поле делает калибровочно-инвариантную разность фаз между слоями заведомо знакопеременной величиной, что, естественно, существенно ослабляет их взаимное влияние. Два последних раздела восьмой главы посвящены исследованию эффективности такого механизма разрушения межслойной когерентности. При этом во втором разделе рассматривается режим, когда флуктуации в слоистом сверхпроводнике могут быть описаны в терминах флуктуаций вихревого кристалла, а в третьем - предел сильных полей, когда описание в терминах вихревых линий перестаёт быть адекватным из-за их сильного перекрытия друг с другом.

Во всех трёх ситуациях (нулевое, слабое и сильное поле), исследованных в этой главе, удаётся, используя упрощённое описание флуктуаций (основанное на предположении, что $T_{\perp} \ll T_{\parallel}$), представить статсумму в окрестности каждого из переходов в виде статсуммы слоистого кулоновского газа, позволяющей применение ренормгруппового анализа. Результаты этого анализа, однако, приводят к выводу о том, что $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$, что означает, что предположение о двухстадийной потере когерентности несправедливо и в системе происходит лишь один фазовый переход, температура которого T_c удовлетворяет неравенству $T_{\parallel} < T_c < T_{\perp}$.

1 XY модели и объекты их применения

1.1 Обычная XY модель

При пренебрежении квантовыми флуктуациями двумерный планарный ферромагнетик может быть описан при помощи так называемой XY модели (модели плоских ротаторов), определяемой гамильтонианом [1, 34]

$$H_{XY} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad (1)$$

где $J > 0$ это эффективная константа связи, φ_j - угол поворота (фаза) единичного спина $\mathbf{s}_j \equiv (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$, расположенного в узле \mathbf{j} какой-либо регулярной решётки (например, квадратной), а суммирование производится по всем парам ближайших соседей $\langle ij \rangle$ на этой решётке. Вид (1) соответствует чисто обменному взаимодействию спинов. Непрерывный аналог (1),

$$H = \frac{J}{2} \int d^2\mathbf{r} (\nabla\varphi)^2, \quad (2)$$

где переменная φ также определена только с точностью до сдвига на 2π , применим для описания тонких плёнок сверхтекучей бозе-жидкости [6], а также (на не слишком больших масштабах [36]) сверхпроводящих плёнок.

Основным состоянием XY модели является состояние, в котором все переменные φ_j равны друг другу. В силу симметрии гамильтониана по отношению к одновременному повороту всех спинов оно является вырожденным, а пространство вырождения представляет собой окружность, т.е. одномерную сферу S^1 .

1.1.1 Низкотемпературная фаза

При самых низких температурах основной вклад в термодинамику систем с непрерывным вырождением вносят малые флуктуации в окрестности основного состояния (спиновые волны). В работах Березинского [1] и Вегнера [34] было показано, что в случае XY модели (1) наличие таких флуктуаций приводит к степенному спадаанию корреляционной функции

$$C(\mathbf{r}) = \langle \exp i(\varphi_{\mathbf{j}+\mathbf{r}} - \varphi_{\mathbf{j}}) \rangle \propto |\mathbf{r}|^{-\eta}$$

на больших расстояниях. Здесь $\eta = T/2\pi\Gamma$, а Γ это модуль жёсткости (helicity modulus [35]), определяющий энергию спиновых волн в длинноволновом пределе (аналог сверхтекучей плотности). Для модели (1) с квадратной решёткой значение Γ при $T = 0$ совпадает с J , тогда как в случае треугольной решётки $\Gamma = \sqrt{3}J$. При повышении температуры модуль жёсткости Γ уменьшается из-за его перенормировки тепловыми флуктуациями. За исключением тех случаев, когда это оговорено особо, мы будем предполагать температуру T выраженной в энергетических единицах, т.е. включающей в себя в качестве множителя константу Больцмана k_B .

Существование области температур со степенным спадаанием $C(\mathbf{r})$ означает, что при повышении температуры в системе должен происходить фазовый переход, поскольку при $T \gg J$ тот же самый коррелятор заведомо должен спасть экспоненциальным образом. Поскольку в двумерных системах с непрерывным вырождением параметра порядка строгий дальний порядок при $T > 0$ невозможен [37–41], мы в дальнейшем для краткости будем называть низкотемпературную фазу со степенным спадаанием $C(\mathbf{r})$ (так называемую фазу Березинского) упорядоченной, хотя более корректным является термин "квазиупорядоченная".

1.1.2 Вихри и фазовый переход

При повышении температуры основную роль в термодинамике двумерных систем с $U(1)$ вырождением играют вихри [2–4] - топологические особенности, при обходе вокруг которых фаза меняется на $2\pi m$, где m это целое число, называемое топологическим зарядом вихря. По энергетическим соображениям можно ограничиться рассмотрением вихрей с минимальным топологическим зарядом $m = \pm 1$. В случае решёточной системы вихрю можно сопоставить конфигурацию φ_j , являющуюся локальным минимумом гамильтониана, которая центрирована на определённой ячейке решётки, при обходе вокруг которой (по произвольному контуру) и происходит набег фазы, см. рис. 1.

Энергия одиночного вихря E_V логарифмически расходится с размером системы L , $E_V \approx \pi\Gamma \ln L$. Поскольку энтропия одиночного вихря S_V , представляющая собой логарифм числа возможных положений вихря в решётке, расходится таким же образом, его свободная энергия

$$F_V = E_V - TS_V \approx (\pi\Gamma - 2T) \ln L$$

обращается в ноль при $T = T_V = (\pi/2)\Gamma$ [3]. При бóльших температурах следует ожидать присутствия в системе свободных вихрей, которые приводят к экспоненциальному спадаанию корреляционной функции $C(\mathbf{r})$. При $T < T_V$ вихри могут существовать лишь в виде нейтральных связанных пар, наличие которых не приводит к изменению степенного характера спадаания $C(\mathbf{r})$. Фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар и изменением характера поведения корреляционной функции $C(\mathbf{r})$ на больших расстояниях, принято называть переходом Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ).

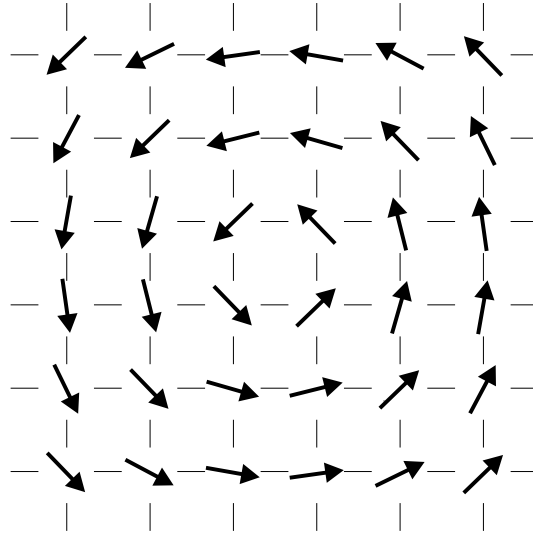


Рис. 1: Пример вихря с топологическим зарядом +1 на квадратной решётке.

1.1.3 Представление кулоновского газа

Статистическая сумма XY модели может быть представлена в виде

$$Z_{XY} = \prod_{\mathbf{j}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_{\mathbf{j}}}{2\pi} \right) \prod_{(\mathbf{i}\mathbf{j})} w(\varphi_{\mathbf{i}} - \varphi_{\mathbf{j}}), \quad (3)$$

где $w(\theta) = \exp[-V(\theta)/T]$ это весовой фактор, зависящий от угла относительного поворота $\theta_{\mathbf{j}} = \varphi_{\mathbf{j}} - \varphi_{\mathbf{i}}$ двух соседних спинов, а $V(\theta)$ энергия их взаимодействия. В стандартной XY модели (1)

$$V(\theta) = V_0(\theta) = -J \cos \theta .$$

Возможность анализа термодинамики XY модели исключительно в терминах газа логарифмически взаимодействующих топологических возбуждений становится очевидной при некотором изменении вида функции $V(\theta)$, описывающей взаимодействие соседних спинов, а именно при замене $V_0(\theta)$ на взаимодействие Березинского-Виллэна [42, 43] $V_{\text{BV}}(\theta)$, определённое соотношением

$$w_{\text{BV}}(\theta) \equiv \exp[-V_{\text{BV}}(\theta)/T] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{J}{2T} (\theta - 2\pi p)^2 \right] \quad (4)$$

и обладающее той же периодичностью и симметрией, что и $V_0(\theta)$. При $J \gg T$ функция Березинского-Виллэна $V_{\text{BV}}(\theta)$ всюду (за исключением малой окрестности точки $\theta = \pi$) близка к параболе,

$$V_{\text{BV}}(\theta) \approx \text{const} + (J/2)\theta^2 ,$$

откуда видно, что в этом пределе использование $V_{\text{BV}}(\theta)$ вместо $V_0(\theta)$ соответствует пренебрежению ангармонизмами. В обратном же предельном случае, когда $J \ll T$,

$$V_{\text{BV}}(\theta) \approx \text{const} - 2T \exp(-T/2J) \cos \theta$$

с экспоненциальной точностью совпадает с $V_0(\theta)$, однако с совершенно иной константой связи $J_{\text{eff}} = 2T \exp(-T/2J) \ll J$.

При подстановке (4) в статсумму (3) возникает возможность выполнения интегрирования по всем переменным $\varphi_{\mathbf{j}}$, поскольку при таком выборе $w(\theta)$ это интегрирование становится гауссовым. В результате статсумма приобретает (с точностью до несущественного множителя) вид статсуммы двумерного кулоновского газа,

$$Z_{\text{CG}} = \prod_{\mathbf{R}} \left[\sum_{m_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} Y(m_{\mathbf{R}}) \right] \exp \left[-\frac{H_{\text{CG}}\{m_{\mathbf{R}}\}}{T} \right] , \quad (5)$$

описываемого гамильтонианом

$$H_{\text{CG}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} m_{\mathbf{R}_1} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) m_{\mathbf{R}_2} . \quad (6)$$

где целочисленные переменные $m_{\mathbf{R}}$ (заряды кулоновского газа) могут считаться определёнными в узлах \mathbf{R} , принадлежащих дуальной решётке. Каждая из них представляет собой сумму целочисленных переменных $p_{\mathbf{ij}} \equiv -p_{\mathbf{ji}}$, определённых на связях исходной решётки, по периметру элементарной ячейки, содержащей \mathbf{R} , и может быть идентифицирована с топологическим зарядом этой ячейки.

Входящее в (6) взаимодействие $G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$ имеет вид

$$G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = 4\pi^2 J (-\hat{\Delta})_{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2}^{-1} \quad (7)$$

(где $\hat{\Delta}$ это оператор Лапласа, определённый на дуальной решётке) и для больших расстояний является логарифмическим:

$$G_0(0) - G_0(\mathbf{R}) \approx 2\pi\Gamma \ln |\mathbf{R}| . \quad (8)$$

Для общности в выражение (5) включены также химические активности зарядов кулоновского газа $Y(m)$, которые при формальном переходе от (3) к (5) оказываются равными единице, однако изменяются в процессе ренормировки (см. ниже).

В случае квадратной решётки Фурье-образ $G_0(\mathbf{R})$ представляет собой

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 J}{2(1 - \cos q_x) + 2(1 - \cos q_y)}, \quad (9)$$

а разность $G_0(0) - G_0(\mathbf{R})$ при $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ весьма близка к $2\pi J(\ln |\mathbf{R}| + \pi/2)$ [44], что позволяет полагать

$$G_0(\mathbf{R} \neq \mathbf{0}) \approx G_0(0) - 2\pi J \ln |\mathbf{R}|, \quad Y(m) \approx \exp\left(-\frac{\pi^2 J}{2T} m^2\right).$$

В длинноволновом пределе ($|\mathbf{q}| \ll 1$) для любой не вносящей анизотропии решётки

$$G_0(\mathbf{q}) \approx \frac{4\pi^2 \Gamma}{q^2}. \quad (10)$$

Это же выражение применимо и для непрерывной модели (2), однако в этом случае вычисление энергии кора вихря, величина которой определяет Y , требует выхода за пределы приближения, учитывающего только фазовые флуктуации.

1.1.4 Вихревые пары и поправка к модулю жёсткости

Входящая в гамильтониан (6) функция $G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$ описывает затравочное взаимодействие зарядов кулоновского газа, находящихся в точках \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 . Их полное (т.е. перенормированное) взаимодействие может быть определено как отклик системы на добавление двух бесконечно малых пробных зарядов (находящихся в точках \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2) и может быть представлено в виде

$$G(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) - \frac{1}{T} \sum_{\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_1) \Sigma(\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) G_0(\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_2). \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) есть не что иное, как затравочное взаимодействие пробных зарядов, а второе представляет собой флуктуационную поправку к их взаимодействию и включает в себя

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle m_{\mathbf{R}_1} m_{\mathbf{R}_2} \rangle, \quad (12)$$

корреляционную функцию зарядов кулоновского газа, которая в однородном случае зависит, естественно, только от разности $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$.

Если считать, что все вихри связаны в нейтральные пары, находящиеся достаточно далеко друг от друга, то при $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$ главный вклад в $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ будет связан с вероятностью того, что один из входящих в пару вихрей расположен в точке \mathbf{R}_1 , а второй в точке \mathbf{R}_2 . В главном порядке по $Y \equiv Y(\pm 1)$ этот вклад может быть представлен в виде

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = -2W(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad (13)$$

где

$$W(\mathbf{R}) = Y^2 \exp[-E_{\text{pair}}(\mathbf{R})/T] \quad (14)$$

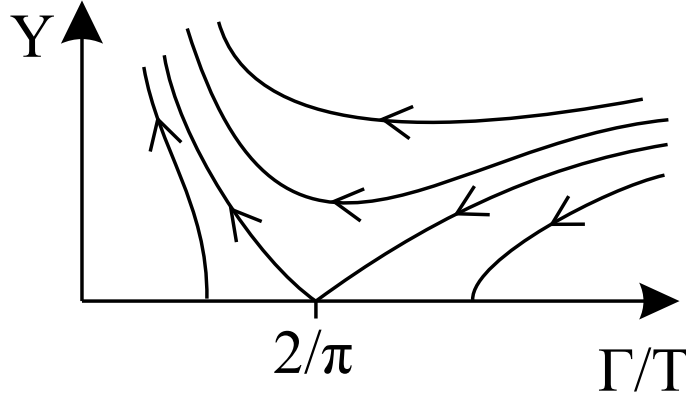


Рис. 2: Схематическое изображение характера ренормгрупповых траекторий, соответствующих уравнениям (17).

это весовой фактор для пары вихрей с топологическими зарядами $m = \pm 1$, энергия которой равна $E_{\text{pair}} = G(0) - G(\mathbf{R})$, а фактор 2 связан с наличием двух вариантов расположения зарядов в паре. В то же время из нейтральности пар следует, что

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1) = - \sum_{\mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_1} \Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2). \quad (15)$$

Подстановка (8) и (12)-(15) в (11) позволяет установить, что поправка к модулю жёсткости, возникающая из-за присутствия нейтральных связанных пар имеет вид [5, 45]

$$\delta\Gamma = -\frac{2\pi^2\Gamma^2}{T} \sum_{\mathbf{R}} R^2 W(\mathbf{R}), \quad (16)$$

В [44] аналогичное выражение было построено исходя из вида вихревого вклада в корреляционную функцию $C(\mathbf{r})$. Подстановка $E_{\text{pair}} \approx 2\pi\Gamma \ln |\mathbf{R}|$ в (16) показывает, что $\delta\Gamma$ расходится при той же температуре, при которой свободная энергия одиночного вихря обращается в ноль.

1.1.5 Ренормгрупповой анализ

Рекурсивная схема, позволяющая учесть ослабление модуля жёсткости при последовательном переходе к всё большему и большему масштабам (т.е. к вихревым парам всё больших размеров), была построена Костерлицем [5]. Она приводит к уравнениям ренормировки для Γ и Y , имеющим вид

$$\frac{d\Gamma}{dl} = -4\pi^3 \frac{\Gamma^2}{T} Y^2 \quad (17a)$$

$$\frac{dY}{dl} = \left(2 - \frac{\pi\Gamma}{T}\right) Y \quad (17b)$$

где l это логарифм масштаба. Аналогичные уравнения описывают ренормировку в одномерном газе с логарифмическим взаимодействием при условии, что знаки зарядов регулярно чередуются [46].

Характер ренормгрупповых траекторий, задаваемых уравнениями (17), схематически показан на рис. 2. Как видно из рисунка, в низкотемпературной фазе Y на

больших масштабах перенормируется в ноль, а Γ стремится к конечному пределу, тогда как в высокотемпературной фазе перенормированное значение модуля жёсткости, $\Gamma(T) \equiv \Gamma(l = \infty, T)$, стремится к нулю. Фазовый переход происходит тогда, когда $\Gamma(T)$ удовлетворяет так называемому "универсальному критерию" Нельсона-Костерлица [6],

$$T_V = \frac{\pi}{2} \Gamma(T_V) . \quad (18)$$

В случае сверхтекучей плёнки этот критерий означает, что универсальным является отношение сверхтекучей плотности ρ_s при $T \rightarrow T_V - 0$ и температуры перехода T_V [6],

$$\frac{\rho_s(T_V)}{T_V} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{m}{\hbar} \right)^2 .$$

Поскольку при $T = T_V$ значение Γ (или ρ_s) скачком изменяется с конечного значения до нуля, часто говорят об универсальном значении скачка Γ (или скачка ρ_s).

Результаты численного моделирования по методу Монте-Карло показывают, что в стандартной XY модели с $V(\theta) = -J \cos \theta$ и квадратной решёткой переход БКТ происходит при $T_V \approx 0.89 J$ [47–51], в то время как на треугольной решётке $T_V \approx 1.45 J$ [52]. В обоих случаях температура перехода оказывается почти вдвое ниже, чем это следует из наивной оценки $T_V \approx (\pi/2)\Gamma(T = 0)$, не учитывающей перенормировок.

Из уравнений (17) следует, что при приближении к T_V снизу $\Gamma(T)$ имеет корневую особенность [6]:

$$\frac{\Gamma(T)}{T} - \frac{2}{\pi} \propto \sqrt{\frac{T_V - T}{T_V}} ,$$

тогда как при приближении к T_V сверху корреляционный радиус r_c расходится экспоненциальным образом [5]:

$$r_c \propto \exp \left(-b \sqrt{\frac{T - T_V}{T_V}} \right) ,$$

при этом концентрация свободных вихрей ведёт себя как r_c^{-2} .

1.1.6 Дуальное представление

Если подставить в (3) выражение для весового фактора $w(\theta)$ через его Фурье-образ $w_*(n)$,

$$w(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i\theta n) w_*(n) ,$$

это также позволяет выполнить в статсумме интегрирование по всем переменным φ_j , после чего она приобретает [44, 53] (с точностью до несущественного, т.е. не сингулярного множителя) вид статсуммы

$$Z_{\text{SOS}} = \prod_{\mathbf{R}} \left[\sum_{n_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} \right] \exp \left(-\frac{H_{\text{SOS}}\{n_{\mathbf{R}}\}}{T} \right) \quad (19)$$

модели, применимой для описания поверхности кристалла (solid-on-solid model, SOS модель) и определяемой гамильтонианом [54]

$$H_{\text{SOS}} = \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} V_*(n_{\mathbf{R}} - n'_{\mathbf{R}}) , \quad (20)$$

где целочисленные переменные $n_{\mathbf{R}}$ (соответствующие высоте поверхности) заданы в узлах дуальной решётки, суммирование производится по всем связям этой решётки, а взаимодействие $V_*(n)$ определено соотношением

$$w_*(n) = \exp \left[-\frac{V_*(n)}{T} \right].$$

В случае стандартной XY модели с $V(\theta) = -J \cos \theta$ дуальная SOS модель характеризуется взаимодействием $V_*(n) = -T \ln[I_n(J/T)]$ [44, 53], где $I_n(z)$ это модифицированная функция Бесселя порядка n , тогда как в случае взаимодействия Березинского-Виллэна (4) $V_*(n)$ имеет особо простой вид

$$V_*(n) = \frac{J_*}{2} n^2,$$

где

$$J_* = \frac{T^2}{J} \quad (21)$$

это дуальная константа связи. SOS модель с таким видом взаимодействия принято называть дискретной гауссовой моделью [55].

В основном состоянии SOS модели все переменные $n_{\mathbf{R}}$ равны друг другу, а вырождение этого состояния связано с группой симметрии Z_N . Простейшим возбуждениями, возникающими вследствие тепловых флуктуаций, в такой системе являются ступени единичной высоты - линии, при пересечении которых $n_{\mathbf{R}}$ меняется на ± 1 . В дискретной гауссовой модели энергия такой ступени (на единицу длины) $E_{\text{st}} = J_*/2$, поэтому при $T \ll J_*$ все ступени должны образовывать замкнутые петли, а при $T = T_R \sim J_*$ происходит связанный с появлением бесконечных ступеней фазовый переход поверхности из гладкой в шероховатую фазу (roughening transition [54, 55]), в которой флуктуации поверхности расходятся,

$$\langle (n_{\mathbf{R}_1} - n_{\mathbf{R}_2})^2 \rangle \propto \ln |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|,$$

в отличие от гладкой фазы, в которой ширина поверхности конечна.

Из вида (21) следует, что высокотемпературная фаза дискретной гауссовой модели соответствует низкотемпературной фазе XY модели и наоборот. Это делает дуальное представление (в виде SOS модели) удобным для исследования свойств высокотемпературной фазы XY модели, в которой велики флуктуации φ . В частности, можно показать [56, 57], что значение корреляционного радиуса r_c , описывающего экспоненциальное спадание $C(\mathbf{r})$, связано простым соотношением $r_c = T/F_{\text{st}}$ со свободной энергией ступени F_{st} , и, следовательно, в случае взаимодействия Березинского-Виллэна (4) при $T \gg J$ оно близко к $2T/J_* = 2J/T$.

То, что ренормгрупповой анализ Костерлица [5] адекватным образом описывает критические свойства XY модели, можно проверить сравнив его с критическим поведением точно-решаемой SOS модели, предложенной ван Бейереном [58] для описания флуктуаций грани (001) кристалла с объёмно-центрированной кубической решёткой. Эта модель изоморфна одному из вариантов шестивершинной модели, обычно называемому моделью льда [59], точное решение которого было найдено Либом [60, 61].

Поскольку дискретная гауссова модель является дуальной к XY модели с взаимодействием Березинского-Виллэна, допускающей редукцию к кулоновскому газу, статсумма

такого кулоновского газа может быть получена непосредственно из статсуммы дискретной гауссовой модели. Для этого в (19) следует заменить суммирование по дискретным переменным $n_{\mathbf{R}}$ на интегрирование [55] при помощи формулы суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} dn \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi imn) f(n), \quad (22)$$

что приводит к появлению в статсумме суммирования по переменным $m_{\mathbf{R}}$, но позволяет выполнить интегрирование по всем переменным $n_{\mathbf{R}}$, поскольку оно является гауссовым.

Обратный переход от статсуммы кулоновского газа к статсумме дискретной гауссовой модели проще всего осуществить расцепив в (5) взаимодействие различных переменных $m_{\mathbf{R}}$ при помощи гауссова интегрирования по дополнительным переменным $n_{\mathbf{R}}$:

$$Z_{CG} \Rightarrow \prod_{\mathbf{R}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dn_{\mathbf{R}} \sum_{m_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} Y(m_{\mathbf{R}}) \right] \exp \left[2\pi i \sum_{\mathbf{R}} m_{\mathbf{R}} n_{\mathbf{R}} - \frac{T}{2J} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} n_{\mathbf{R}_1} (-\hat{\Delta})_{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2} n_{\mathbf{R}_2} \right].$$

После этого суммирование по $m_{\mathbf{R}}$ может быть выполнено независимо для каждого из узлов \mathbf{R} . При $Y(m) \equiv 1$, как следует из (22), эта процедура сводится к замене интегрирования по $n_{\mathbf{R}}$ на суммирование, что и приводит Z_{CG} к виду статсуммы дискретной гауссовой модели.

1.1.7 Модель синус-Гордона.

Поскольку ренормгрупповой анализ показывает, что вклады от вихрей с топологическими зарядами, превышающими (по модулю) минимальный, являются несущественными, вклады в статсумму, соответствующие таким зарядам, могут быть опущены с самого начала. Если в статсумме кулоновского газа (5) положить

$$Y(m) = \begin{cases} 1 & \text{для } m = 0, \\ Y \ll 1 & \text{для } m = \pm 1, \\ 0 & \text{для } |m| > 1, \end{cases}$$

то преобразование, описанное в последнем абзаце предыдущего подраздела, преобразует её [62] в статсумму так называемой модели синус-Гордона (sine-Gordon model), определяемой гамильтонианом

$$H_{SG} = \frac{J_*}{2} \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} (n_{\mathbf{R}} - n_{\mathbf{R}'})^2 - y \sum_{\mathbf{R}} \cos(2\pi n_{\mathbf{R}}), \quad (23)$$

(где $y = 2YT$) зависящем, в отличие от (20), от непрерывных переменных $n_{\mathbf{R}}$.

Ренормгрупповые уравнения для непрерывной версии гамильтониана (23) были впервые построены Вигманом [62] (см. также [63]) и, как и следовало ожидать, эквивалентны уравнениям (17). Представление синус-Гордона оказывается наиболее удобным для систематического изучения поправок к (17) более высоких порядков по Y и $2 - \pi\Gamma/T$ и позволяет продемонстрировать, что они не приводят к изменению критического поведения [64].

1.2 Сверхпроводящие сетки и решётки и фрустрированные XY модели

1.2.1 Решётки джозефсоновских контактов

При пренебрежении собственными магнитными полями токов XY модель (1) применима также для описания решётки джозефсоновских контактов, соединяющих регулярно расположенные сверхпроводящие островки [16, 17], см. рис. 3. При этом речь может идти как о туннельных контактах сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник, так и о системах, в которых взаимодействие сверхпроводящих островков обусловлено эффектом близости и происходит через подложку из нормального металла. В обоих случаях φ_j есть фаза параметра порядка на j -ом островке, а $J = (\hbar/2e)I_c$, где I_c - критический ток одиночного контакта.

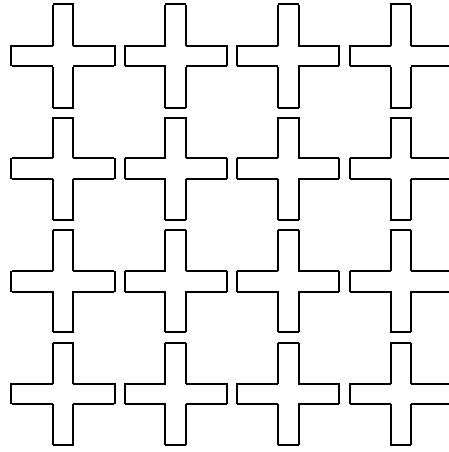


Рис. 3: Решётка джозефсоновских контактов состоит из сверхпроводящих островков, связанных с соседними островками джозефсоновскими контактами. На рисунке показан пример регулярной квадратной решётки.

Вообще говоря, известно, что магнитные поля токов приводят к экранировке логарифмического взаимодействия вихрей в двумерных сверхпроводниках, как в непрерывных (сверхпроводящих плёнках [36]), так и в дискретных (решётках джозефсоновских контактов [17, 65]). Это происходит на расстояниях, сравнимых с

$$\Lambda = \frac{\phi_0^2}{8\pi^3\Gamma},$$

глубиной проникновения магнитного поля в двумерный сверхпроводник, где

$$\phi_0 = \frac{hc}{2e}$$

это квант потока. В частности, в случае сверхпроводящей плёнки (10) переходит в

$$G(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2\Gamma}{q^2 + q/\Lambda}. \quad (24)$$

Однако, как было показано в [7], значение Λ при температуре T_V , при которой диссоциация вихревых пар происходила бы в отсутствие экранировки, удовлетворяет следующему из (18) и (24) соотношению

$$\Lambda(T_V) = \frac{\phi_0^2}{16\pi^2 k_B T_V} \approx \frac{2 \text{ см} \cdot \text{К}}{T_V},$$

где температура T_V предполагается выраженной в кельвинах. Поэтому при T_V порядка нескольких кельвинов, что является типичной температурой перехода в решётках джозефсоновских контактов [67, 68], $\Lambda(T_V)$ оказывается порядка типичного размера решётки (0.1 – 1 см) и, следовательно, эффектами экранировки можно пренебречь, что мы и будем делать в дальнейшем, если специально не оговорено обратное.

1.2.2 Фрустрированные ХУ модели

При таких предположениях регулярная решётка джозефсоновских контактов, находящаяся во *внешнем* магнитном поле, может быть описана гамильтонианом [17]

$$H_{\text{ФХУ}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}), \quad (25)$$

где определённые на связях решётки переменные $A_{ij} \equiv -A_{ji}$ выражаются через интеграл векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ внешнего магнитного поля по линии, соединяющей центры соседних гранул,

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_j} d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (26)$$

и являются замороженными, т.е. не флуктуируют. Во всех ячейках регулярной решётки направленная сумма переменных A_{ij} по её периметру должна удовлетворять условию

$$\sum_{\square} A_{ij} = 2\pi f, \quad (27)$$

где f это отношение магнитного потока ϕ , приходящегося на одну ячейку, к кванту потока ϕ_0 .

Модель, определяемую уравнениями (25)-(27), принято называть однородно фрустрированной ХУ моделью [66]. Из вида гамильтониана (25), каждое слагаемое в котором есть чётная и периодическая функция своего аргумента, следует, что можно считать параметр f принадлежащим интервалу $[0, 1/2]$, а для всех значений f , лежащих вне этого интервала, простая замена переменных позволяет перейти к $f \in [0, 1/2]$. Ниже всегда предполагается, что значение f приведено к интервалу $0 \leq f \leq 1/2$. Понятно, что $f = 0$ соответствует обычной (не фрустрированной) ХУ модели, рассмотренной в предыдущем разделе. Модели с максимальным неприводимым значением параметра f (т. е. $f = 1/2$) принято называть максимально фрустрированными (fully frustrated) ХУ моделями [19]. В случае треугольной решётки ХУ модель с антиферромагнитным взаимодействием может быть переписана в виде (25) с $A_{ij} \equiv \pm\pi$, так что такая модель также относится к классу максимально фрустрированных ХУ моделей.

В течении последних двадцати лет фрустрированные ХУ модели с различными типами решёток и различными значениями f исследовались весьма интенсивно, что в основном было мотивировано активными экспериментальными исследованиями решёток джозефсоновских контактов (которым, в частности, посвящены обзоры [67] и [68]).

С точки зрения статистической физики основным свойством однородно фрустрированных XY моделей (с $f \neq 0$) является сочетание непрерывного вырождения основного состояния (связанного с одновременным поворотом всех фаз) с дискретным вырождением, так же имеющим симметричный характер. Это позволяет предположить возможность существования в системе различных фазовых переходов, один из которых связан с диссоциацией вихревых пар и аналогичен переходу БКТ в обычной XY модели [1–5], а другой (или другие) связан(ы) с дискретными степенями свободы [19]. Простейший вид дискретное вырождение имеет в максимально фрустрированной XY модели на квадратной или треугольной решётке. В обоих этих случаях оно является двукратным [18, 21].

1.2.3 Сетки из сверхпроводящих проволок

В лондонском пределе свободная энергия тонкой сверхпроводящей проволоки может считаться зависящей исключительно от калибровочно-инвариантного градиента фазы вдоль проволоки,

$$F_{\text{wire}} = \frac{J}{2} \int_0^L dx \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2\pi}{\phi_0} A_{\parallel}(x) \right]^2, \quad (28)$$

где $A_{\parallel}(x)$ это компонента векторного потенциала, направленная (локально) вдоль проволоки. При этом, если заданы значения фазы на концах проволоки [например, $\varphi(0) = \varphi_i$, а $\varphi(L) = \varphi_j$], минимумы (28) достигаются при

$$\varphi(x) = \varphi_i + (\varphi_j - \varphi_i + 2\pi p) \frac{x}{L} + \frac{2\pi}{\phi_0} \int_0^x dx' A_{\parallel}(x'), \quad (29)$$

где целочисленная переменная p это число оборотов (winding number), которые делает фаза при движении вдоль проволоки.

Подстановка (29) в (28) показывает [69, 70], что статсумма регулярной сетки, состоящей из таких проволок, имеет вид статсуммы однородно фрустрированной XY модели с взаимодействием Березинского-Виллэна,

$$Z_{\text{FBV}} = \prod_{\mathbf{j}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_{\mathbf{j}} \right) \prod_{(\mathbf{i}\mathbf{j})} \left\{ \sum_{p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{J}{2} (\varphi_{\mathbf{j}} - \varphi_{\mathbf{i}} + 2\pi p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} - A_{\mathbf{i}\mathbf{j}})^2 \right] \right\}, \quad (30)$$

где $\varphi_{\mathbf{j}}$ это значения фазы в узлах сетки, а слагаемые с различными значениями переменных $p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}$ соответствуют секторам, отличающимся друг от друга числами оборотов, которые делает фаза при движении вдоль сегмента сетки, соединяющего узлы \mathbf{i} и \mathbf{j} . Таким образом, XY модели с взаимодействием Березинского-Виллэна (как фрустрированная, так и обычная) представляют интерес не только в качестве аппроксиманта для исследования аналогичной модели с косинусоидальным взаимодействием, но и в контексте описания фазовых флуктуаций в сетках из тонких сверхпроводящих проволок.

1.2.4 Представление кулоновского газа

Выполнение в (30) гауссова интегрирования по всем переменным $\varphi_{\mathbf{j}}$ переводит Z_{FBV} в статсумму кулоновского газа, описываемого гамильтонианом (6). Отличие от обычной XY модели состоит в том, что в случае однородно фрустрированной модели заряды кулоновского газа оказываются не целыми, а сдвинутыми относительно целых значений на $-f$ [71], что ещё раз демонстрирует достаточность рассмотрения интервала $0 \leq f \leq 1/2$.

Следует подчеркнуть, что термин "кулоновский газ" в такой ситуации оказывается весьма условным, поскольку в любом из возможных состояний все узлы дуальной решётки содержат (по построению) ненулевые заряды. В частности, максимально фрустрированным ХУ моделям соответствует заполнение дуальной решётки полужелыми зарядами. Поскольку заряды одного знака отталкиваются друг от друга, понятно, что наименьшей энергией в этом случае будут обладать состояния, в которых все заряды равны $\pm 1/2$ и регулярным образом чередуются друг с другом. В случае квадратной или треугольной решётки это позволяет без всяких вычислений понять структуру основного состояния.

В то же время, как в случае сотовой, так и в случае гексагональной ромбической решётки (dice lattice) [72, 73] оказывается невозможным единственным способом разбить дуальную решётку на две эквивалентных подрешётки, а основное состояние максимально фрустрированной ХУ модели характеризуется бесконечным вырождением [74–76], обусловленным возможностью образования доменных стенок с нулевой энергией [76, 77]. В таких ситуациях даже выяснение структуры упорядоченного состояния, реализующегося при низких температурах в решётке джозефсоновских контактов или сетке из тонких сверхпроводящих проволок с полужелым числом квантов потока на ячейку, требует весьма существенных усилий [78–80], связанных с изучением различных механизмов снятия случайного вырождения.

Вопрос же о последовательности фазовых переходов оказывается далеко не простым даже в тех случаях, когда структура упорядочения в низкотемпературной фазе не вызывает сомнений. И если в предельном случае $f \ll 1$ поведение системы может быть объяснено в терминах перехода вихревого кристалла в несоизмеримое состояние с последующим его плавлением [81, 82] (что подтверждается результатами численного моделирования [82–84]), то в, казалось бы, гораздо более простом случае, когда дискретное вырождение основного состояния является простейшим из возможных, т. е. двукратным, установление числа, характера и последовательности фазовых переходов представляет собой весьма нетривиальную задачу, обсуждение решения которой занимает основную часть трёх следующих глав.

2 Максимально фрустрированная XY модель на квадратной решётке

Как уже упоминалось в предыдущей главе (см. раздел 1.2.2), регулярная решётка джоузефсоновских контактов, находящаяся во внешнем магнитном поле, величина которого соответствует полуцелому числу квантов потока на ячейку, может быть описана при помощи так называемой максимально фрустрированной XY модели [19], определяемой гамильтонианом

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} V(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}) , \quad (31)$$

где $V(\theta) = -J \cos \theta$, а переменные A_{ij} удовлетворяют условию

$$\sum_{\square} A_{ij} = \pi \pmod{2\pi} \quad (32)$$

для всех ячеек решётки. В настоящей главе предполагается, что решётка является квадратной, а аналогичная модель на треугольной решётке рассматривается в главе 3.

2.1 Основное состояние и топологические возбуждения

Для одиночной ячейки решётки минимум (31) при условии (32) достигается, когда определённые на связях $\langle ij \rangle$ калибровочно-инвариантные разности фаз

$$\theta_{ij} = \varphi_j - \varphi_i - A_{ij} \equiv -\theta_{ji} \quad (33)$$

все равны между собой, что в случае квадратной ячейки соответствует $\theta_{ij} = \pm\pi/4$. Здесь и далее переменные θ_{ij} предполагаются приведенными к интервалу $(-\pi, \pi)$.

Основное состояние максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке может быть построено исходя из вида основного состояния для каждой из ячеек и имеет структуру [18], изображённую на рис. 4. Вид основного состояния не зависит от конкретного вида взаимодействия $V(\theta)$ и характеризуется регулярным чередованием (в шахматном порядке) ячеек с положительными и отрицательными киральностями $\sigma_{\mathbf{R}} = \pm 1$, определёнными через соотношение

$$\sum_{\square} \theta_{ij} = \pi \sigma_{\mathbf{R}} .$$

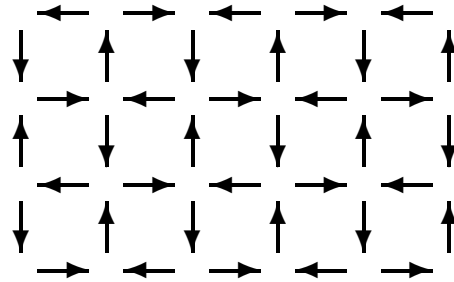


Рис. 4: Структура основного состояния максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке. Каждой стрелке соответствует $\theta_{ij} = \pm\pi/4$, при этом знак θ_{ij} определяется направлением стрелки.

Помимо непрерывного вырождения, связанного с инвариантностью гамильтониана (31) по отношению к одновременному повороту всех фаз,

$$\varphi_j \Rightarrow \varphi_j + \Delta\Phi,$$

основное состояние максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке обладает также и двукратным дискретным вырождением, связанным с инвариантностью (31) по отношению к одновременной смене знака всех φ_j и всех A_{ij} [что не ведёт к нарушению условий (32)].

В соответствии с вырождением основного состояния, рассматриваемая модель допускает существование двух типов топологических возбуждений - вихрей и доменных стенок [19]. Вихри представляют собой точечные возбуждения, при обходе вокруг которых фаза проворачивается на $\pm 2\pi$, т.е. имеют тот же смысл, что и в обычной XY модели (без фрустрации), см. раздел 1.1.2.

Также, как и в случае обычной XY модели, можно ожидать, что диссоциация вихревых пар будет происходить при выполнении "универсального критерия" (18). Поскольку для стандартного вида взаимодействия $V(\theta) = -J \cos \theta$ значение модуля жёсткости в основном состоянии максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке равно $J/\sqrt{2}$, простейшая, (т.е. не учитывающая перенормировок Γ) оценка для температуры диссоциации вихревых пар, $T_V \approx (\pi/2)\Gamma(0)$, даёт $T_V \approx 1.11 J$ [85]. Если же считать, что относительная величина перенормировки Γ в точке фазового перехода такая же, как и в отсутствие фрустрации, получим $T_V \approx 0.6 J$.

В представлении кулоновского газа основные состояния характеризуются регулярным чередованием положительных и отрицательных зарядов минимальной величины:

$$m_{\mathbf{R}}^{(0)} = \pm \frac{1}{2} (-1)^{R_x + R_y}, \quad (34)$$

где R_x и R_y (компоненты вектора \mathbf{R}) это целые числа, а возможность выбора знака соответствует двукратному дискретному вырождению основного состояния. При этом значения переменных $m_{\mathbf{R}}$ могут быть сопоставлены киральностям соответствующих ячеек, $\sigma_{\mathbf{R}} = 2m_{\mathbf{R}}$. Вихрям же могут быть сопоставлены избыточные целочисленные заряды на фоне одного из состояний (34). Поскольку в исходной системе $\Gamma(T=0) = J/\sqrt{2}$, для того, чтобы адекватным образом воспроизвести закон взаимодействия вихрей на больших расстояниях, в представлении кулоновского газа следует произвести замену $J \Rightarrow J_{CG} = J/\sqrt{2}$.

Доменная стенка может быть определена как топологическое возбуждение, разделяющее два основных состояния, которые не могут быть переведены одно в другое при

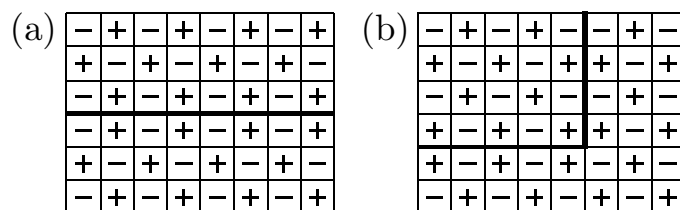


Рис. 5: Два примера доменных стенок: (а) прямая; (б) образующая прямой угол. Киральности ячеек решётки показаны знаками плюс и минус.

помощи одновременного поворота всех фаз. Схематически её можно представить в виде линии на исходной квадратной решётке (см. рис. 5), каждый сегмент которой разделяет две ячейки с одинаковой киральностью [19].

Доменная стенка характеризуется конечной энергией на единицу длины E_{DW} , поэтому при низких температурах ($T \ll E_{\text{DW}}$) все доменные стенки, возникающие как тепловые флуктуации, представляют собой замкнутые петли. В случае прямой стенки непосредственное численное вычисление для XY модели с $V(\theta) = -J \cos \theta$ даёт $E_{\text{DW}} \approx 0.343 J$ [85], тогда как в представлении кулоновского газа получается весьма близкое значение $E_{\text{DW}} = (\pi^2/16\sqrt{3})J_{\text{CG}} \approx 0.308 J$ [77].

Представление кулоновского газа удобно тем, что позволяет так же найти, как взаимодействие доменных стенок зависит от расстояния между ними L . Оно оказывается пропорциональным c_0^L , где $c_0 = 3 - \sqrt{8} \approx 0.172$ [77], т.е. спадает экспоненциально быстро, поэтому при дальнейшем анализе учитываться не будет. Если пренебречь также энергией, связанной с углами и пересечениями стенок, то гамильтониан подсистемы доменных стенок сводится к модели Изинга на дуальной решётке,

$$H_{\text{DW}} = -\frac{E_{\text{DW}}}{2} \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'}, \quad (35)$$

точное решение которой для случая квадратной решётки было найдено Онзагером [86] и, в гораздо более удобном виде, Вдовиченко [87]. Входящая в (35) переменная $s_{\mathbf{R}}$ - это переопределённая киральность (staggered chirality),

$$s_{\mathbf{R}} = (-1)^{R_x + R_y} \sigma_{\mathbf{R}}.$$

Температура T_{DW} , при которой в модели Изинга происходит фазовый переход, связанный с появлением бесконечных доменных стенок и разрушением дальнего порядка по s ,

$$T_{\text{DW}} = \frac{E_{\text{DW}}}{\ln(1 + \sqrt{2})}, \quad (36)$$

может быть найдена и не зная точного решения из соображений дуальности [88]. Подстановка $E_{\text{DW}} \approx 0.343 J$ в (36) даёт $T_{\text{DW}} \approx 0.39 J < T_{\text{V}}$ [85]. В следующем разделе, однако, показано, что в рассматриваемой XY модели взаимодействие углов и пересечений доменных стенок не является короткодействующим, и поэтому пренебрегать им нельзя.

2.2 Дробные вихри и фазовые переходы

Если зафиксировать основное состояние (значения φ_j) с одной стороны от прямой бесконечной доменной стенки, то состояние с другой стороны от стенки не может быть выбрано произвольным образом и зависит как от положения, так и от ориентации этой стенки. В частности, равновесные состояния по другую сторону вертикальной и горизонтальной доменных стенок отличаются друг от друга поворотом на $\pm\pi/2$. Это означает, что если доменная стенка образует прямой угол [см. рис. 5(b)], то возникает рассогласование на $\pm\pi/2$ между состояниями, в которых мы должны оказаться пересекая её горизонтальный и вертикальный участки. Это рассогласование должно быть устранено непрерывным изменением фазы таким образом, чтобы при обходе вокруг угла набиралось $\pm\pi/2$. Таким образом, все углы доменных стенок должны вести себя

как дробные вихри с топологическим зарядом $\pm 1/4$, взаимодействие которых в 16 раз слабее взаимодействия обычных вихрей [77, 85].

Наличие избыточной завихренности на угле доменной стенки следует также и из того, что сумма киральностей четырёх ячеек, окружающих угол, не равна нулю, см. рис. 5(b). В то же время во всех узлах решётки, через которые не проходит доменная стенка (либо проходит прямая стенка) аналогичная сумма обращается в ноль.

Если бы дробные вихри с топологическим зарядом $\pm 1/4$ не были бы привязаны к доменным стенкам, диссоциация нейтральных пар, ими образованных, происходила бы при температуре $T = T_{FV}$, где $T_{FV} \ll T_V$ - решение уравнения

$$T_{FV} = \frac{\pi}{32} \Gamma(T_{FV}), \quad (37)$$

аналогичного уравнению (18). Однако, суммарный топологический заряд дробных вихрей, связанных с какой-либо замкнутой доменной стенкой, всегда является целым, поэтому при $T < T_{DW}$, когда все доменные стенки образуют замкнутые петли, о диссоциации пар дробных вихрей не может быть и речи. Помимо слабого логарифмического взаимодействия они оказываются связаны (на больших масштабах) так же и линейным взаимодействием, обусловленным свободной энергией доменных стенок, их соединяющих.

В то же время при $T > T_{DW}$ существует целая сетка из пересекающихся доменных стенок, среднее расстояние между которыми порядка r_c , корреляционного радиуса для переменных s . В этом случае линейное взаимодействие дробных вихрей на масштабах, превышающих r_c , экранируется, что действительно делает возможным диссоциацию связанных пар таких вихрей, которая, в свою очередь, инициирует диссоциацию пар обычных вихрей. Отсюда следует, что если наивные оценки дают $T_V \sim T_{DW}$ (и, следовательно, $T_{FV} \ll T_{DW}$), сценарий с $T_V > T_{DW}$ невозможен, поскольку появление при $T = T_{DW}$ бесконечных доменных стенок автоматически приводит к диссоциации пар дробных и целых вихрей [77, 85].

Проверке этого утверждения была посвящена работа Тийсена и Кнопса [89], в которой объектом численного моделирования по методу Монте-Карло был полупрозрачный кулоновский газ (с зарядами $m = \pm 1/2$) на квадратной решётке. Возможность независимого изменения энергии доменной стенки E_{DW} обеспечивалась добавлением к стандартному гамильтониану двумерного кулоновского газа (6) дополнительного взаимодействия ближайших соседей. Результаты показали, что при большой энергии доменной стенки в системе происходит два фазовых перехода, температуры которых удовлетворяют неравенству $T_V < T_{DW}$ и далеки друг от друга. При уменьшении E_{DW} происходит понижение T_{DW} , практически линейное по E_{DW} , в то время как T_V зависит от E_{DW} гораздо слабее. При дальнейшем понижении E_{DW} вместо того, чтобы две линии фазовых переходов пересекались друг с другом, она из них поглощает другую. Аналогичные результаты были получены в [90] для такой же модели, определённой на сотовой решётке, что в терминах XY моделей соответствует максимально фрустрированной модели на треугольной решётке.

Поскольку возникновение дробных вихрей на дефектах, связанных с доменными стенками, характерно не только для максимально фрустрированных моделей, но и для моделей с меньшими значениями параметра f (см., например, [91]), можно ожидать, что основной вывод этого раздела (о невозможности сценария с $T_V > T_{DW}$), будет справедлив и для более широкого класса однородно фрустрированных моделей [77]. Следует, однако, отметить, что в предложенном в [92] обобщении максимально фрустрированной

XY модели на квадратной решётке, в котором константа связи различна для ферромагнитных и антиферромагнитных связей, возникает два типа доменных стенок (лёгкие и тяжёлые [93]), благодаря чему дробные вихри оказываются связаны в нейтральные пары и при $T > T_{DW}$, что в подобной ситуации делает возможным $T_V > T_{DW}$ [92,93].

2.3 Фазовый переход на доменной стенке и его последствия

Рассмотрим бесконечную доменную стенку, существование которой обеспечивается, например, соответствующими граничными условиями. При нулевой температуре такая стенка будет абсолютно прямой, см. рис. 5(a). При конечной температуре становится возможным появление на ней точечных дефектов - перегибов (кинков). Простейший перегиб (имеющий единичную высоту) изображён на рис. 6(a).

Если зафиксировать состояние (значения φ_j) с одной стороны от прямой бесконечной стенки, то при смещении её на одну постоянную решётки в перпендикулярном направлении равновесное состояние с другой стороны от стенки проворачивается на π [77,85]. Поэтому присутствие перегиба, изображённого на рис. 6(a), приводит к рассогласованию на π между состояниями, в которых мы должны оказаться пересекая стенку слева и справа от перегиба. Так же, как и в случае угла на доменной стенке, это рассогласование должно быть устранено непрерывным изменением фазы таким образом, чтобы нужное значение набиралось при обходе вокруг перегиба.

Соответственно, простые перегибы должны вести себя как дробные вихри с топологическим зарядом $\pm 1/2$ [94]. Энергия таких перегибов логарифмически расходится, а взаимодействие в четыре раза слабее, чем взаимодействие обычных вихрей. Изображённый на рис. 6(b) двойной перегиб не вносит аналогичного рассогласования в распределение фазы, так что его энергия является конечной [94].

Существование двух качественно различных типов перегибов легко объяснить исходя из того, что все углы на доменных стенках имеют топологические заряды $\pm 1/4$. Каждый перегиб образован двумя углами, причём в простом перегибе их топологические заряды имеют один и тот же знак и, соответственно, складываются друг с другом, в то время как в случае двойного перегиба заряды образующих его углов имеют разные знаки и, соответственно, компенсируют друг друга.

При низких температурах доменная стенка будет содержать конечную концентрацию свободных (т.е. не связанных в пары) двойных перегибов, тогда как все простые перегибы будут связаны в нейтральные (по топологическому заряду) пары (подчеркнём, что знак топологического заряда, связанного с перегибом, определяется его положением, а не ориентацией). Таким образом, хотя флуктуации доменной стенки из-за наличия свободных двойных перегибов расходятся при сколь угодно низкой температуре (так что она всегда находится в шероховатом, а не в гладком состоянии), тем

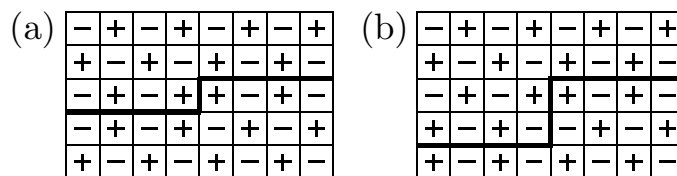


Рис. 6: Перегибы на доменной стенке: (a) простой перегиб; (b) перегиб двойной высоты.

не менее является нарушенной симметрия по отношению к сдвигу стенки на нечётное число постоянных решётки [94].

С повышением температуры фазовый переход в одномерном газе логарифмически взаимодействующих перегибов приведёт к диссоциации нейтральных пар и к появлению конечной концентрации свободных простых перегибов [20]. Из сравнения логарифмически расходящейся энергии одиночного перегиба $E_K \approx (\pi/4)\Gamma(T) \ln L$ с его энтропией $S_K \approx \ln L$ следует, что это произойдёт при температуре T_K , удовлетворяющей соотношению

$$T_K = \frac{\pi}{4}\Gamma(T_K). \quad (38)$$

Подчеркнём, что $\Gamma(T)$ это "объёмное" значение модуля жёсткости, входящее в затравочное взаимодействие перегибов и не учитывающее каких-либо флуктуаций стенки. Тем не менее, соотношение (38) является точным. Дело в том, что согласно ренормгрупповому анализу Булгадаева [95] в одномерном логарифмическом газе с произвольным чередованием зарядов (в отличие как от одномерного логарифмического газа с чередующимися зарядами [46], так и от двумерного кулоновского газа [5]) не происходит перенормировки префактора в логарифмическом взаимодействии, вследствие чего значение температуры перехода, следующее из сравнения энергии заряда с его энтропией, оказывается точным.

Сравнение (38) с (18) показывает, что $T_K < T_V$. Диссоциация пар перегибов при температуре, меньшей чем T_V , была впервые обнаружена в численных экспериментах [20, 96], авторы которых, однако, приняли фазовый переход при $T = T_K$ за переход доменных стенок из гладкого в шероховатое состояние.

Диссоциация пар простых перегибов приводит к восстановлению симметрии между скорее чётными и скорее нечётными положениями доменной стенки, а так же к потере на стенке эффективной жёсткости для флуктуаций фазы [94]. В присутствии свободных простых перегибов любая попытка создать градиент фазы в перпендикулярном к стенке направлении окажется безуспешной из-за того, что смещение таких перегибов под действием силы Магнуса (направление смещения определяется знаком топологического заряда) приведёт к устранению этого градиента. Ситуация оказывается вполне аналогична той, что имеет место "в объёме" при $T > T_V$, когда присутствие свободных вихрей препятствует созданию градиента фазы, т.е. сверхтекучего тока. При $T < T_K$ все простые перегибы связаны в нейтральные пары и их относительное смещение требует конечной энергии, что ведёт к сохранению эффективной жёсткости на стенке.

С другой стороны, можно ожидать, что градиент фазы, направленный параллельно стенке, не будет проникать через неё. Вместо этого возникнет разность между концентрациями свободных простых перегибов с топологическими зарядами различного знака, которая и скомпенсирует разницу между градиентами фазы по обе стороны от стенки [94]. Хотя создание такой разности концентраций потребует некоторых затрат энергии, эти затраты будут пропорциональны длине стенки, тогда как проникновение градиента фазы на другую сторону стенки требует энергию, пропорциональную площади системы, что в термодинамическом пределе является менее выгодным. Аналогичным образом устроена граница зёрен в кристалле, на которой разница в ориентациях кристаллитов скомпенсирована наличием последовательности дислокаций одного и того же знака.

Подчеркнём, что оба механизма работают только на масштабах, которые велики по сравнению с ξ_K , средним расстоянием между свободными простыми перегибами на стенке. Тем не менее, их наличие означает, что связь между крупномасштабными флук-

туациями фазы по обе стороны от стенки разрушается. В дальнейшем, говоря о роли доменных стенок, мы будем предполагать, что свойства системы анализируются на масштабах, превышающих ξ_K , так что связь между флуктуациями по обе стороны стенки может считаться полностью отсутствующей. В недавней работе Оллсона и Тайтеля [97] вывод о том, что при $T = T_K < T_V$ происходит подавление модуля жёсткости в перпендикулярном к доменной стенке направлении, а также ряд других заключений, сделанных в этом разделе, были подтверждены при помощи численного моделирования.

2.4 Последовательность фазовых переходов

Модуль жёсткости $\Gamma(T)$ может быть определён, в частности, через отклик системы на введение сдвига в граничные условия [35, 45] (на этом основан ставший уже стандартным метод численного вычисления $\Gamma(T)$, предложенный в [19]). Из возможности такого определения следует, что в ситуации, когда на доменной стенке теряется связь флуктуаций фазы, наличие хотя бы одной доменной стенки, пересекающей всю систему, автоматически приводит к занулению $\Gamma(T)$. В термодинамическом пределе это с неизбежностью происходит как только температура превышает T_{DW} , температуру фазового перехода, связанного с потерей дальнего порядка по антиферромагнитному упорядочению киральностей и появлением бесконечных доменных стенок [94].

Если рассматривать флуктуации дискретных степеней свободы (состоящие в появлении доменов с противоположным знаком s) в терминах проблемы перколяции, то при $T < T_{DW}$ существует пересекающий всю систему бесконечный кластер, образованный ячейками с одним тем же значением s . Введение относительного сдвига между значениями фазы на левой и правой границах бесконечной системы приводит к появлению градиента фазы лишь в пределах этого бесконечного кластера. Все остальные кластеры имеют конечный размер и, следовательно, не чувствительны к граничным условиям на бесконечности.

Известно, что в двух измерениях (в отличие от трёх), критическая точка модели Изинга совпадает с точкой перколяции в системе спиновых кластеров [98], так что при приближении к T_{DW} снизу плотность бесконечного кластера убывает как $\rho(T) \propto \xi_p^{-\Delta d}$. Здесь $\Delta d = 2 - \bar{d} = 5/96$ [99, 100] это отклонение фрактальной размерности \bar{d} бесконечного кластера (при $T = T_{DW}$) от его евклидовой размерности $d = 2$ (в стандартной задаче о некоррелированной перколяции $\Delta d = 5/48$ [101]), а $\xi_p(T) \propto (T_{DW} - T)^{-\nu}$ это перколяционная длина, температурная зависимость которой в модели Изинга описывается тем же индексом $\nu = 1$ [102], что и температурная зависимость корреляционного радиуса r_c .

Поэтому даже затравочное (т.е. не перенормированное флуктуациями φ) значение модуля жёсткости при приближении к T_{DW} должно убывать степенным образом: $\Gamma_0(T) \propto (T_{DW} - T)^t$, по крайней мере столь же быстро как $\rho(T)$ (а на самом деле гораздо быстрее), что можно показать при помощи вариационного вычисления. Диссоциация вихревых пар происходит как только ренормированное значение $\Gamma(T)$ становится равно $(2/\pi)T$, т.е. при более низкой температуре чем T_{DW} [94]. Если $T_{DW} \ll T_V^{(0)}$ [где $T_V^{(0)} \approx (\pi/2)\Gamma(0)$ это простейшая оценка для T_V , не учитывающая перенормировок], то можно ожидать, что зависимость T_V от соотношения между T_V и T_{DW} будет иметь вид

$$T_{DW} - T_V \propto [T_{DW}/T_V^{(0)}]^{1/t}.$$

Оба перехода могут произойти одновременно лишь в виде фазового перехода первого

рода, сопровождаемого превышающим универсальное значение скачком модуля жёсткости $\Gamma(T)$.

Вывод о том, что $\Gamma_0(T)$ сильно подавляется при приближении к T_{DW} подтверждается сравнением результатов численного моделирования обычной и фрустрированной XY моделей [19], которые демонстрируют, что в последнем случае убывание Γ с ростом температуры (при одном и том же размере системы) происходит более быстро. Утверждение о том, что $\Gamma(T)$ обращается в ноль при $T \rightarrow T_{DW}$ было впервые сделано Доценко и Уйминым [103, 104] для аналогичной модели на треугольной решётке (характеризующейся таким же вырождением основного состояния), однако без какого-либо обоснования.

Таким образом, мы продемонстрировали, что в максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке присутствие на доменных стенках свободных простых перегибов приводит в широком интервале температур, лежащих ниже T_V , к разрушению когерентности флуктуаций по различные стороны стенки. Мы также показали, что диссоциация вихревых пар должна происходить при $T_V < T_{DW}$, поскольку при приближении к T_{DW} снизу часть системы, которая вносит свой вклад в модуль жёсткости (определяющий взаимодействие вихрей), из-за наличия подобного свойства доменных стенок становится всё менее плотной. Это делает невозможным слияние двух фазовых переходов в один, с новым критическим поведением (как это предполагалось возможным в [77, 105]), по крайней мере при $T > T_K$. В следующей главе показано, что все эти выводы остаются справедливыми и при замене квадратной решётки на треугольную (что не меняет характер вырождения основного состояния).

Следует подчеркнуть, что полученные выводы не связаны с конкретным видом взаимодействия (пока остаётся неизменной структура основного состояния и, соответственно, его вырождение) и применимы в, частности, при учёте взаимодействия более далёких соседей. Структура фазовой диаграммы максимально фрустрированной XY модели с квадратной решёткой и взаимодействием не только ближайших соседей обсуждается в следующем разделе.

В то же время, описанный выше механизм, заставляющий T_V лежать ниже T_{DW} , работает только при $T_{DW} > T_K$. Если бы энергия доменной стенки E_{DW} была бы свободным параметром, позволяющим изменять T_{DW} независимо от взаимодействия вихрей, понижение E_{DW} привело бы (при понижении T_{DW} до T_K) к слиянию двух фазовых переходов в один. Сравнение с результатами численного моделирования для $f = 2/5$ [106, 107], а так же ряд иных соображений (аналогичных изложенным ниже, в разделах 4.4.2 и 5.3) позволяют заключить, что это должен был бы быть переход первого рода, с неуниверсальным значением скачка $\Gamma(T)$, меняющимся вдоль этой линии. Лишь после дальнейшего существенного (в несколько раз) понижения E_{DW} и повышения отношения $\Gamma(T_c)/T_c$ до $32/\pi$ произошло бы повторное расщепление фазовых переходов [77]. При ещё более низких значениях E_{DW} потеря фазовой когерентности была бы связана с диссоциацией пар дробных вихрей, которые при $T > T_{DW}$ связаны лишь логарифмическим взаимодействием, и происходила бы при $T = T_{FV} > T_{DW}$ [77]. В главе 4 показано, что все эти три сценария разрушения комбинированного $U(1) \times Z_2$ упорядочения реализуются в антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме, в которой (в отличие от максимально фрустрированной модели на квадратной решётке) добавление к гамильтониану взаимодействия с более далёкими соседями обеспечивает возможность практически независимого изменения E_{DW} .

В течении последних двадцати лет максимально фрустрированная XY модель на квадратной решётке была предметом интенсивных численных исследований. При этом

данные, полученные в более ранних работах, либо не позволяли разрешить T_V и T_{DW} [19, 92, 108], либо свидетельствовали в пользу $T_V > T_{DW}$ [109]. Однако, развитие численных методов и вычислительных возможностей привели к изменению ситуации. Результаты более поздних работ, использующих различные методы численного моделирования [110–114], дают $T_V = (0.440 - 0.449)J$ и $T_{DW} = (0.452 - 0.454)J$, и свидетельствуют в пользу соотношения $T_V < T_{DW}$, находясь, таким образом, в согласии с результатами нашего анализа. Численное моделирование модели с взаимодействием Березинского-Виллэна [115], а также эквивалентного ей кулоновского газа с полуцелыми зарядами [116, 117], так же демонстрируют, что $T_V < T_{DW}$.

Начиная с [105] основным аргументом, выдвигавшимся в пользу утверждения о совпадении температур двух фазовых переходов, являлось отличие критических индексов [105, 109–111, 119–121] от изинговских значений. Олссоном, однако, было продемонстрировано [115], что исключение малых масштабов из скейлингового анализа приводит к устранению этого разногласия. В [119] вывод о наличии в системе единственного фазового перехода был сделан исходя из отсутствия какого-либо расщепления пика теплоёмкости. По-видимому, авторы этой работы были не в курсе, что переход БКТ не сопровождается какими-либо расходимостями производных свободной энергии.

Подчеркнём, что для обоих видов взаимодействия, а так же для аналогичной модели на треугольной решётке (см. главу 3) значения T_V и T_{DW} , найденные при помощи численного моделирования, оказываются чрезвычайно близки и отличаются друг от друга на 1-2%. Результаты нашего анализа позволяют заключить, что это обстоятельство не является случайным совпадением, а есть следствие того, что диссоциация вихревых пар происходит не сама по себе, а обусловлена быстрым падением модуля жёсткости $\Gamma(T)$, индуцированным приближением к T_{DW} . Согласно оценкам, приведенным в разделе 2.1, при отсутствии взаимного влияния между двумя фазовыми переходами она должна была бы происходить при температуре, существенно превышающей T_{DW} : $T_V \approx 1.5 T_{DW}$.

Вывод о том, что $T_V < T_{DW}$, справедлив так же и для так называемой XY-изинговской модели, описываемой гамильтонианом [122]

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (1 + s_j s_{j'}) \cos(\varphi_j - \varphi_{j'}), \quad (39)$$

где $s_j = \pm 1$ дополнительные переменные изинговского типа. В этой модели, которая интенсивно исследовалась [123–126] в качестве аппроксиманта для фрустрированной XY модели на квадратной решётке, изначально отсутствует связь между флуктуациями φ_j по разные стороны доменной стенки.

Не так давно Ли и др. [127] показали, что обобщенный вариант XY-изинговской модели дуален модели, предложенной ден Нийсом [128] для описания переходов шероховатости и реконструкции на поверхности кристалла с простой кубической решёткой. Предполагаемая фазовая диаграмма этой модели может быть найдена на рис. 3 в [129]. Для случая $\Delta = 0$ (что соответствует XY-изинговской модели (39) с полным отсутствием связи фазовых переменных на стенке) она содержит две области, в одной из которых (с $R < 0$) оба фазовых перехода происходят одновременно, а в другой (при $R > 0$) последовательно. Как наш анализ, так и результаты численного моделирования [127] свидетельствуют, что фазовые переходы не должны совпадать друг с другом в обоих режимах, т.е. для любого знака R .

Экспериментальное исследование квадратных решёток джозефсоновских контактов, находящихся в однородном магнитном поле, величина которого соответствует половине кванта потока на ячейку, производилось в целом ряде работ [130–136]. К сожалению

нию, применяемые при этом методы, в частности, изучение температурной зависимости обеих компонент комплексного частотно-зависимого импеданса [130, 131], а также индекса a , описывающего поведение вольт-амперной характеристики на малых токах ($V \propto I^a$) [132, 133], позволяют получить информацию лишь о сверхпроводящем переходе, но не чувствительны к упорядочению по киральностям.

2.5 Структура фазовой диаграммы при учёте взаимодействия не только ближайших соседей

Рассмотрим теперь обобщение гамильтониана (31),

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \cos(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}) , \quad (40)$$

в котором константа связи J_{ij} отлична от нуля не только для ближайших соседей на квадратной решётке, но и для следующих за ближайшими соседями,

$$J_{ij} = \begin{cases} J_1, & \text{для } |\mathbf{i} - \mathbf{j}| = 1, \\ J_2, & \text{для } |\mathbf{i} - \mathbf{j}| = \sqrt{2}, \end{cases} \quad (41)$$

в то время как значения переменных A_{ij} для следующих за ближайшими соседями также задаются соотношениями (26).

Исследование подобного обобщения представляет интерес в контексте поиска способа разведения температур двух фазовых переходов подальше друг от друга (что сделало бы более доступным их разрешение в эксперименте или при численном моделировании), или же, наоборот, достижения их слияния в один переход первого рода. При изучении решётки из сверхпроводящих гранул, взаимодействие которых обусловлено эффектом близости и осуществляется через металлическую подложку [137, 138], необходимость учёта взаимодействия более далёких соседей усиливается с понижением температуры, которое сопровождается ростом длины когерентности в нормальном металле [139].

При $f = 1/2$ модель (40)-(41) сочетает в себе черты как фрустрированной, так и обычной (не фрустрированной) XY моделей. При $J_2 = 0$ гамильтониан (40) сводится к (31), а при $J_1 = 0$ превращается в гамильтониан двух не связанных между собой обычных XY моделей. Поскольку элементарная ячейка для каждой из двух $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ подрешёток, на которые распадается квадратная решётка при отсутствии взаимодействия ближайших соседей, имеет вдвое большую площадь, чем элементарная ячейка исходной решётки, взаимодействие следующих за ближайшими соседями оказывается не фрустрированным.

Структура основных состояний модели (40) зависит от отношения $x = J_2/J_1 \geq 0$ [140]. При $x < x_0 = 1/\sqrt{2}$ они имеют точно такой же вид, как и при $J_2 = 0$, при этом их энергия не зависит от J_2 . В тоже время при $x > x_0$ основные состояния оказываются такими же, как и при $J_1 = 0$, когда связь между двумя $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ подрешётками отсутствует. Энергия этих состояний не зависит от J_1 , а вырождение представляет собой $U(1) \times U(1)$, где каждая из групп $U(1)$ описывает вырождение в одной из двух несвязанных XY моделей, относительная ориентация фазы в которых может быть произвольной [140].

При $x = x_0$ энергии двух классов основных состояний сравниваются друг с другом, что, казалось бы, должно свидетельствовать о фазовом переходе первого рода. Однако оказывается, что при $x = x_0$ эти состояния могут быть преобразованы друг в друга

при помощи непрерывного преобразования, не ведущего к увеличению энергии [140, 141]. Таким образом, при $x = x_0$ пространство вырождения включает в себя так же дополнительный набор "промежуточных" состояний, которые могут быть получены из основного состояния для $x < x_0$ при помощи синхронного поворота на произвольный угол χ всех переменных φ_j , принадлежащих к одной из двух подрешёток, показанных на рис. 7. При этом $\chi = 0$ соответствует виду основного состояния для $x < x_0$, а $\chi = \pi$ для $x > x_0$.

Весьма любопытно, что добавление слабого взаимодействия с более далёкими соседями не вносит каких-либо изменений в эту картину, за исключением сдвига значения x_0 . В частности, сохраняется структура основных состояний, а при $x > x_0$ энергия остаётся независимой от относительного сдвига фазы между двумя $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ подрешётками [141].

Оказывается, что при $x < x_0$ величина J_2 не влияет не только на структуру и энергию основного состояния, но и на структуру и энергию прямой доменной стенки, а так же на модуль жёсткости Γ . Это означает, что увеличение J_2 не приводит к изменению соотношения между энергией доменной стенки и префактором в логарифмическом взаимодействии вихрей и, таким образом, не даёт возможности эффективно влиять на соотношение T_V и T_{DW} . Отличие J_2 от нуля будет проявлять себя лишь через изменение энергий вихрей и дефектов на доменных стенках. Результаты численного моделирования по методу Монте-Карло свидетельствуют, что T_{DW}/J_1 несколько уменьшается с ростом J_2 [141], что согласно результатам предыдущего раздела должно вести к дальнейшему уменьшению относительной разности между T_V и T_{DW} .

Дополнительное вырождение основного состояния при $x > x_0$, состоящее в возможности относительного вращения фаз, принадлежащих к различным $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ подрешёткам, носит случайный характер и не связано с симметрией. Известно, что такое вырождение может сниматься самыми разными причинами, например, взаимодействием с более далёкими соседями, однако, как уже упоминалось выше, в рассматриваемой системе этот механизм снятия дополнительного вырождения не работает.

Единственной причиной для снятия случайного вырождения непосредственно в рамках какой-либо конкретной статфизической модели является различие в свободной энергии флуктуаций в окрестности различных основных состояний [142]. В системах с непрерывным вырождением основного состояния подобный механизм снятия вырождения впервые был проанализирован Шендером [143], который рассматривал квантовые флуктуации в гайзенберговском антиферромагнетике с квадратной решёткой и

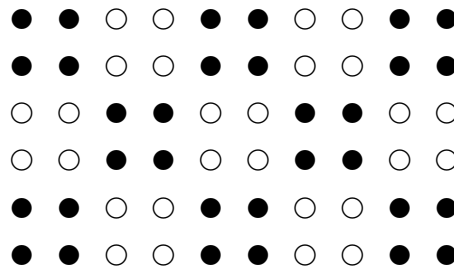


Рис. 7: Разбиение квадратной решётки на две подрешётки, реализующееся при $x = x_0$, когда возникает дополнительное вырождение основного состояния относительно разворота переменных φ_j , относящихся к разным подрешёткам, на произвольный угол χ .

сильным ферромагнитным взаимодействием следующих за ближайшими соседями. Следуя [142], такой механизм снятия случайного вырождения часто называют "порядок из беспорядка".

Вычисление свободной энергии гармонических флуктуаций как функции относительного сдвига фазы между подрешётками показывает, что при $x > x_0$ система может рассматриваться (при конечных температурах) как две связанных XY модели, взаимодействие которых имеет вид, близкий к $\cos p(\varphi - \varphi')$, где $p = 4$. И хотя это возмущение слабо (его амплитуда всегда мала по сравнению с температурой) при достаточно низкой температуре оно является существенным, т. е. растущим при ренормировке, откуда следует, что при таких температурах в системе должен существовать настоящий дальний порядок по относительному сдвигу фазы между подрешётками.

Инвариантность взаимодействия подрешёток по отношению к сдвигу относительной фазы на $\pi/2$ следует из свойств симметрии основного состояния, так что учёт каких-либо иных механизмов снятия случайного вырождения не может привести к качественным изменениям. Одним из таких механизмов является отличие вида джозефсоновской энергии от $V_0(\theta) = -J \cos \theta$, поэтому при исследовании снятия случайного вырождения в XY моделях следует иметь в виду, что описание в терминах кулоновского газа является точным лишь при специальном выборе $V(\theta)$, не совпадающим с $V_0(\theta)$.

Согласно результатам ренормгруппового анализа системы, состоящей из двух слабо связанных XY моделей [122, 144], температура T_{dec} , отделяющая область, в которой взаимодействие вида $y_p \cos p(\varphi - \varphi')$, растёт при ренормировке, от области, в которой оно убывает, определяется соотношением

$$T_{\text{dec}} = \frac{4\pi}{p^2} \Gamma(T_{\text{dec}}), \quad (42)$$

где $\Gamma(T)$ - модуль жёсткости в каждой из них. Сравнение с (18) показывает, что при $p = 4$ определяемая уравнением (42) температура фазового перехода, связанного с потерей связи между подрешётками, лежит ниже, чем T_V , температура диссоциации вихревых пар в каждой из них. Таким образом, при $x > x_0$ в рассматриваемой системе при повышении температуры должно происходить два фазовых перехода [141], первый из которых связан с симметрией Z_4 , являющейся нарушенной при $T < T_{\text{dec}}$.

Спектр длинноволновых флуктуаций сохраняет жёсткость и при $x \rightarrow x_0 + 0$. Это означает, что при уменьшении x до x_0 температура диссоциации вихревых пар T_V остаётся конечной (это также подтверждается результатами численного моделирования [141]). При $T < T_V$ и $x = x_0$ должен каким-то образом происходить переход между фазами, структура которых соответствует двум классам основных состояний.

Появление при $x = x_0$ дополнительного набора основных состояний, названных выше "промежуточными", представляет собой ещё один пример случайного вырождения. Поскольку численное интегрирование показывает, что свободная энергия гармонических флуктуаций оказывается выпуклой функцией косинуса угла χ , параметризующего эти дополнительные основные состояния, в системе при изменении x (и малых, но конечных температурах) должен происходить фазовый переход первого рода [141]. Если бы свободная энергия флуктуаций оказалась бы вогнутой функцией $\cos \chi$, две низкотемпературных фазы были бы разделены узкой полоской третьей фазы, в которой с изменением x угол χ менялся бы от 0 до π непрерывным образом.

Следующая из результатов этого раздела структура фазовой диаграммы максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке с нефрустрированным взаимодействием следующих за ближайшими соседями схематически показана на рис. 8. На

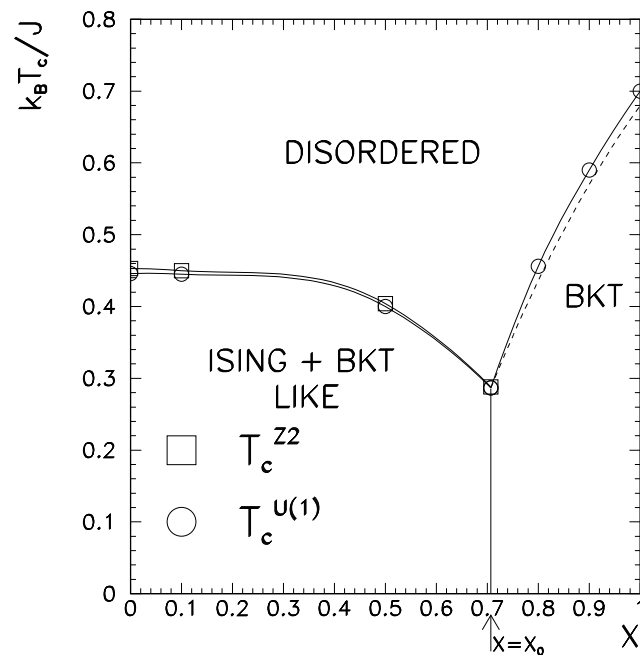


Рис. 8: Фазовая диаграмма максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке с нефрустрированным взаимодействием следующих за ближайшими соседями.

этом же рисунке можно увидеть результаты численного моделирования такой системы [141] по методу Монте-Карло, показанные символами \square (изинговский переход) и \circ (переход БКТ), размер которых приблизительно соответствует точности результатов. Эти численные исследования подтверждают существование двух различных низкотемпературных фаз, однако их точность оказывается недостаточной для разрешения расщепления обеих линий фазового перехода в полностью неупорядоченное состояние. Численное исследование нелинейной релаксации в этой же модели [145] подтверждает наличие фазового перехода второго рода при $x < x_0$ и его отсутствие при $x > x_0$. К сожалению, этот метод не позволяет заметить переходы типа БКТ, которые являются переходами бесконечного рода.

3 Планарный антиферромагнетик с треугольной решёткой

3.1 Последовательность фазовых переходов в отсутствие магнитного поля

В отсутствие внешнего магнитного поля планарный антиферромагнетик с чисто обменным взаимодействием может быть описан гамильтонианом

$$H_{AF} = J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \quad (43)$$

где константа связи $J > 0$, а каждому спину сопоставлен двухкомпонентный единичный вектор $\mathbf{S}_j = (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$.

Нетрудно заметить, что гамильтониан антиферромагнитной XY модели (43) эквивалентен гамильтониану (25) с $A_{ij} = \pm\pi$. Суммирование A_{ij} по периметру ячейки показывает, что в случае квадратной решётки антиферромагнитная XY модель не является фрустрированной, т. е. изоморфна обычной (ферромагнитной) XY модели (1). В случае же треугольной решётки такая модель относится к классу максимально фрустрированных XY моделей и, соответственно, применима также и для описания решёток джозефсоновских контактов с полуцелым числом квантов потока на ячейку. При этом все выводы, сделанные в предыдущей главе для аналогичной модели на квадратной решётке, оказываются справедливы и в случае треугольной решётки (с некоторыми лишь количественными отличиями).

Абсолютный минимум (43) для трёх спинов, принадлежащих какой-либо треугольной ячейке, достигается тогда, когда они образуют друг с другом углы $2\pi/3$. Это условие оказывается выполненным одновременно для всех ячеек решётки в имеющем трёх-подрешёточную структуру (см. рис. 9) состоянии, в котором [146, 147]

$$\varphi_A = \Phi, \quad \varphi_B = \Phi \pm 2\pi/3, \quad \varphi_C = \Phi \mp 2\pi/3. \quad (44)$$

В терминах калибровочно-инвариантных разностей фаз, определённых уравнением (33), это состояние, в котором на всех связях $\theta_{ij} = \pm\pi/3$, а треугольные ячейки с положительными и отрицательными киральностями регулярным образом чередуются друг с другом.

Также, как и в случае квадратной решётки (см. главу 2), вид основного состояния не связан с конкретным видом взаимодействия и характеризуется комбинированным

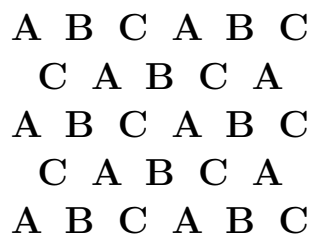


Рис. 9: Разбиение треугольной решётки на три эквивалентных подрешётки.

$U(1) \times Z_2$ вырождением [21]. Непрерывное вырождение соответствует выбору переменной Φ в (44) и связано с симметрией гамильтониана (43) по отношению к одновременному повороту всех спинов:

$$\varphi_{\mathbf{j}} \Rightarrow \varphi_{\mathbf{j}} + \Delta\Phi \quad (45)$$

а двукратное дискретное вырождение соответствует выбору верхнего или нижнего знака в (44) и связано с симметрией гамильтониана (43) по отношению к одновременному отражению всех спинов $S_{\mathbf{j}}$ относительно произвольной оси, например, оси x :

$$\varphi_{\mathbf{j}} \Rightarrow -\varphi_{\mathbf{j}}.$$

В соответствии с вырождением основного состояния в рассматриваемой модели возможно появление как вихрей, так и доменных стенок изинговского типа [22, 103]. Поскольку при $\theta_{\mathbf{ij}} = \pm\pi/3$ значение модуля жёсткости в основном состоянии оказывается в два раза ниже, чем в отсутствие фрустрации (т. е. при $\theta_{\mathbf{ij}} = 0$), из сравнения с [52] можно было бы ожидать, что диссоциация вихревых пар должна произойти при $T_V \approx 0.72 J$. Такая оценка, однако, не учитывает влияния доменных стенок на диссоциацию вихревых пар.

Доменная стенка в антиферромагнитной XY модели на треугольной решётке представляет собой линию, проходящую по связям треугольной решётки и разделяющую ячейки с одинаковыми киральностями, см. рис. 10(b)-(d). Она не содержит дробных вихрей, если соседние сегменты этой линии образуют друг с другом углы $2\pi/3$ [148], см. рис. 10(b). Структура таких доменных стенок в терминах исходных фазовых переменных показана на рис. 11. Интересно, что в отличие от случая максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке [85], в показанных на этом рисунке примерах вид состояния слева и справа от стенки совпадает с соответствующим основным состоянием не только вдали от стенки, но и в её непосредственной окрестности. В пересчёте на одно звено энергия доменных стенок, изображённых на рис. 11, равна $E_{DW} = J/2$. Подстановка этого значения в выражение для температуры перехода в модели Изинга на сотовой решётке (дуальной к треугольной),

$$T_{DW} = \frac{E_{DW}}{\ln(2 + \sqrt{3})},$$

следующее из соображений дуальности [149], даёт $T_{DW} \approx 0.38 J < T_V$.

Обе эти оценки (как для T_{DW} , так и для T_V), не учитывают, однако, взаимного влияния между образованием вихрей и доменных стенок, основную роль в котором играет

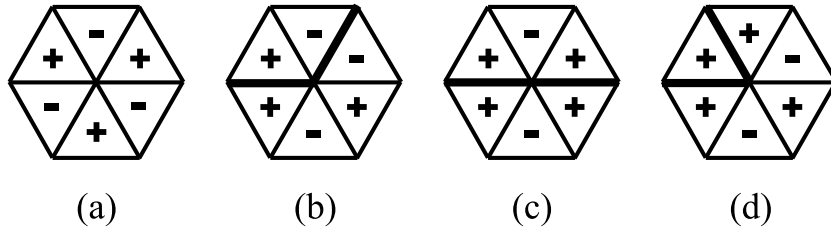


Рис. 10: Киральности треугольных ячеек показаны знаками плюс и минус, а сегменты доменной стенки - жирными линиями. Каждый из таких сегментов разделяет две ячейки с одинаковыми киральностями.

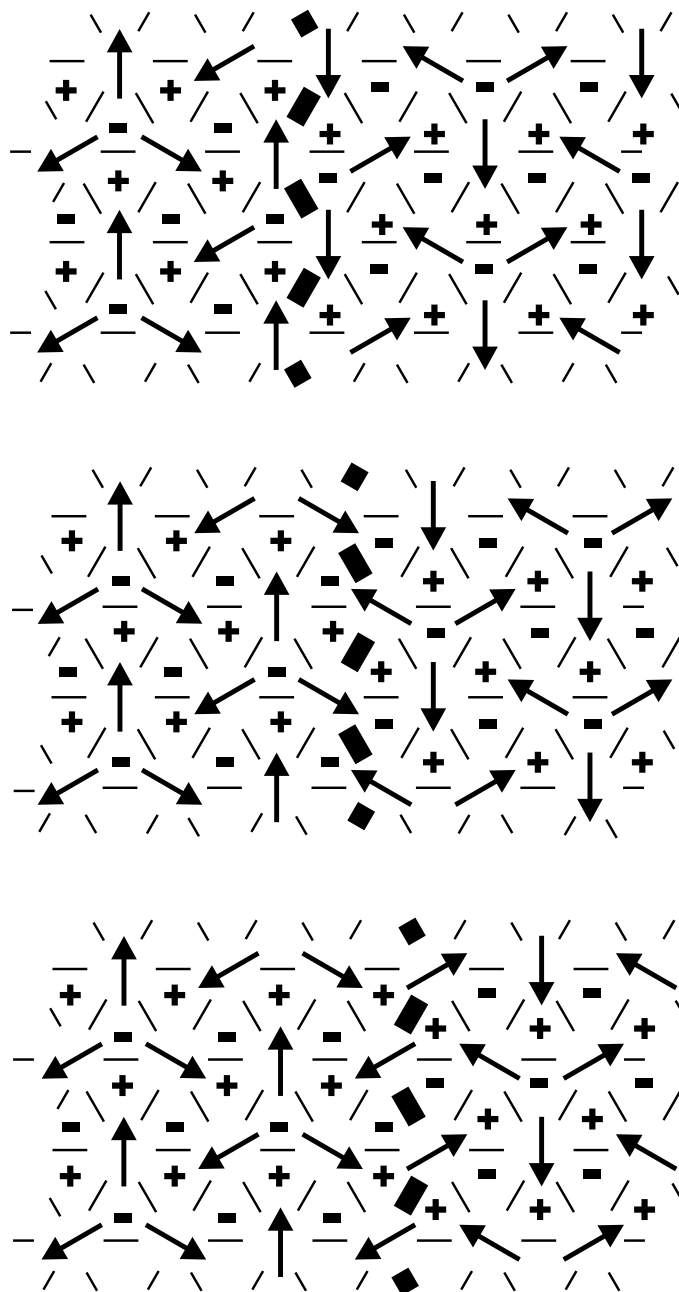


Рис. 11: Структура доменных стенок в антиферромагнитной XY модели.

то обстоятельство, что во всех местах, где угол между соседними сегментами доменной стенки отличен от $2\pi/3$, образуются дробные вихри с топологическими зарядами равными $\pm 1/3$ [148]. Как видно из рис. 10(a) и рис. 10(b), в отсутствие стенки или в случае, когда угол между образующими её сегментами равен $2\pi/3$, узел треугольной решётки окружён тремя ячейками с положительными киральностями и тремя с отрицательными, что свидетельствует об отсутствии нескомпенсированной завихренности. В то же время, в примерах показанных на рис. 10(c) и рис. 10(d) число ячеек с положительными киральностями превышает число ячеек с отрицательными киральностями, что говорит о присутствии дробного вихря с положительным топологическим зарядом. Так же, как и в случае квадратной решётки, появление на доменных стенках дробных вихрей приводит к невозможности реализации сценария с $T_V > T_{DW}$.

Рассмотрим доменную стенку, пересекающую всю систему. Её энергия будет минимальна, если она (1) не содержит дробных вихрей и (2) имеет минимальную длину. Если зафиксировать состояние с одной стороны от такой стенки, то равновесное состояние по другую сторону стенки может быть получено перестановкой значений φ в двух из трёх подрешёток с последующим поворотом всех фаз на π [148]. Три различных варианта перестановок соответствуют различным положениям стенки и отличаются друг от друга глобальным поворотом состояния за стенкой на $\pm 2\pi/3$. Это проиллюстрировано на рис. 11, где состояние слева от стенки является одним и тем же, а состояния справа от стенки переводятся друг в друга вращением на $\pm 2\pi/3$.

На пересекающей всю систему доменной стенке могут образовываться дефекты - перегибы (кинки), топологический заряд которых зависит от их высоты. Перегибы тройной высоты имеют нулевой топологический заряд и, соответственно, конечную энергию. В то же время из рис. 11 очевидно, что присутствие на доменной стенке перегиба минимальной высоты приводит к рассогласованию значений фазы на $\pm 2\pi/3$ и, следовательно, такой перегиб представляет собой дробный вихрь с топологическим зарядом, равным по абсолютной величине $1/3$.

Логарифмическое взаимодействие таких дефектов в девять раз меньше взаимодействия обычных вихрей. Соответственно, фазовый переход, состоящий в диссоциации связанных пар простых перегибов и ведущий к потере когерентности между состояниями по обе стороны стенки, должен происходить при температуре T_K , удовлетворяющей соотношению [94]

$$T_K = \frac{\pi}{9} \Gamma(T_K) .$$

В случае треугольной решётки T_K оказывается даже ниже (по сравнению с T_V), чем для квадратной решётки. Поэтому все выводы предыдущей главы о свойствах доменных стенок в окрестности T_V оказываются применимы также и к антиферромагнитной XY модели на треугольной решётке.

Следуя аргументации, представленной в разделе 2.4, это позволяет заключить [94], что в антиферромагнитной XY модели на треугольной решётке фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар, также должен происходить при более низкой температуре, чем второй фазовый переход, связанный с разрушением дальнего порядка по киральностям. И хотя результаты ранних работ по численному моделированию не всегда позволяли заметить разницу между T_V и T_{DW} [22, 150], результаты более точных исследований [146, 151] подтверждают заключение о $T_V < T_{DW}$. К сожалению, так же, как и в случае квадратной решётки, экспериментальное исследование треугольных решёток джозефсоновских контактов, находящихся в магнитном поле с полупривычным числом квантов потока на ячейку [131], производилось методами, недостаточными для идентификации температуры, при которой происходит упорядочение по киральностям.

3.2 Структура фазовой диаграммы во внешнем магнитном поле

При приложении внешнего магнитного поля в гамильтониане появляется дополнительное слагаемое, приводящее к нарушению симметрии по отношению к преобразованию (45):

$$H_{\text{AF}} = J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j) - h \sum_j \sin \varphi_j, \quad (46)$$

где h - это выраженная в энергетических единицах величина поля, которое предполагается направленным вдоль оси y (т. е. вертикально вверх). Это, однако, не приводит к снятию непрерывного вырождения основного состояния, которое и в присутствии поля сохраняет трёхподрешёточную структуру [22].

В терминах единичных планарных спинов \mathbf{S}_A , \mathbf{S}_B и \mathbf{S}_C , принадлежащих к трём различным подрешёткам (см. рис. 9) энергия произвольного трёхподрешёточного состояния E_3 , которую мы будем полагать нормированной на число узлов решётки, оказывается зависящей только от их суммы:

$$E_3 = \frac{J}{2} [(\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C)^2 - 3] - \frac{h}{3} (\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C),$$

и минимальна при $\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C = \mathbf{h}/3J$. Это означает, что минимизация E_3 накладывает на три величины, φ_A , φ_B и φ_C , лишь два условия

$$\sin \varphi_A + \sin \varphi_B + \sin \varphi_C = h/3J, \quad (47a)$$

$$\cos \varphi_A + \cos \varphi_B + \cos \varphi_C = 0, \quad (47b)$$

что и приводит к сохранению непрерывного вырождения основного состояния [22]. Вплоть до $h = 3J$ пространство вырождения представляет собой пару окружностей: $Z_2 \times S_1$, которые при $h = 3J$ склеиваются в трёх точках. При дальнейшем повышении h пространство вырождения перезапускается таким образом, что оказывается изоморфно единственной окружности, которая при $h = 9J$ стягивается в точку [22]. При $h \geq 9J$ основное состояние имеет тривиальный вид, $\varphi_j = \pi/2$, и не является вырожденным.

Поскольку при $h \neq 0$ непрерывное вырождение носит случайный характер, т. е. не связано с симметрией гамильтониана, оно снимается при учёте свободной энергии малых флуктуаций (спиновых волн) в окрестности основного состояния [152–155]. Вычисление свободной энергии малых флуктуаций в окрестности основного состояния (спиновых волн) в рамках гармонического приближения позволяет продемонстрировать [154], что она является монотонно убывающей функцией от

$$U(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C) = \cos^2(\varphi_A - \varphi_B) + \cos^2(\varphi_B - \varphi_C) + \cos^2(\varphi_C - \varphi_A).$$

Таким образом, эффект от учёта гармонических флуктуаций оказывается эквивалентен добавлению к (46) ферромагнитного биквадратного взаимодействия соседних спинов.

При $0 < h < 3J$ минимум $U(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C)$ достигается в тех из основных состояний, в которых спины в одной из трёх подрешёток антипараллельны направлению поля [152, 153], например,

$$\varphi_A = -\pi/2, \quad \varphi_B = \Phi(h/3J), \quad \varphi_C = \pi - \Phi(h/3J), \quad (48)$$

где $\Phi(\gamma) = \arcsin \frac{1+\gamma}{2}$. При больших же полях ($3J < h < 9J$) минимум достигается в состоянии, в котором две из трёх подрешёток эквивалентны друг другу [152, 153], например,

$$\varphi_A = -\pi + \Phi_1(h/3J), \quad \varphi_B = \varphi_C = \Phi_2(h/3J), \quad (49)$$

где

$$\Phi_1(\gamma) = \arcsin \frac{3 - \gamma^2}{2\gamma}, \quad \Phi_2(\gamma) = \arcsin \frac{3 + \gamma^2}{4\gamma}.$$

В обоих случаях непрерывное вырождение снимается таким образом, что полное вырождение редуцируется до шестикратного. При $h \rightarrow 3J$ как уравнения (48), так и уравнения (49) воспроизводят решение

$$\varphi_A = -\pi/2, \quad \varphi_B = \varphi_C = \pi/2, \quad (50)$$

характеризующееся трёхкратным вырождением. Структура трёхподрешёточных основных состояний, минимизирующих $U(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C)$ при различных значениях h , схематически показана на рис. 12.

Если вместо того, что бы искать структуру основного состояния, минимизирующего $U(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, минимизировать свободную энергию трёхподрешёточного состояния, включающую в себя помимо E_3 также и флуктуационный вклад,

$$F_3 = E_3 - gU(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C),$$

где $g \propto T/J$ это безразмерный малый параметр, описывающий относительную силу флуктуационных эффектов, интервал полей, в котором минимум гамильтониана достигается на решении (50), становится конечным. Ширина этого интервала оказывается пропорциональна g .

Отсюда следует, что фазовая диаграмма планарного антиферромагнетика с треугольной решёткой должна иметь структуру [153, 154], схематически показанную на рис. 13. Во всех трёх упорядоченных фазах (a , b и c), присутствующих на фазовой диаграмме, имеется дальний порядок по ориентации спинов в каждой из трёх подрешёток, при этом фазы обозначены таким образом, что направления $\langle \mathbf{S} \rangle$ для трёх подрешёток соответствуют показанным на рис. 12. Впервые фазовая диаграмма, содержащая три различных упорядоченных фазы, была построена при численном моделировании [22], тогда как анализ по среднему полю приводит к иной (гораздо более простой) структуре фазовой диаграммы [147].

Фазовые переходы из фазы a или фазы c в фазу b должны иметь изинговскую природу, поскольку связаны с появлением бесконечных доменных стенок, приводящих к перемешиванию двух из шести вырожденных состояний [154]. Фаза b представляет собой соизмеримый кристалл $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ антипараллельных полю спинов на фоне параллельных. Из результатов точного решения модели жёстких шестиугольников [156] следует, что фазовый переход, связанный с плавлением такой структуры при повышении температуры, относится к классу универсальности трёхпозиционной модели Поттса.

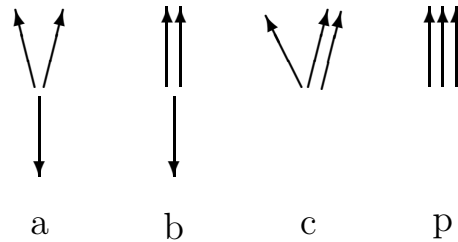


Рис. 12: Направления спинов в трёх подрешётках, минимизирующие свободную энергию гармонических флуктуаций в основном состоянии: a - при $h < 3J$, b - при $h = 3J$, c - при $3J < h < 9J$, p - при $h \geq 9J$. Магнитное поле направлено вертикально вверх.

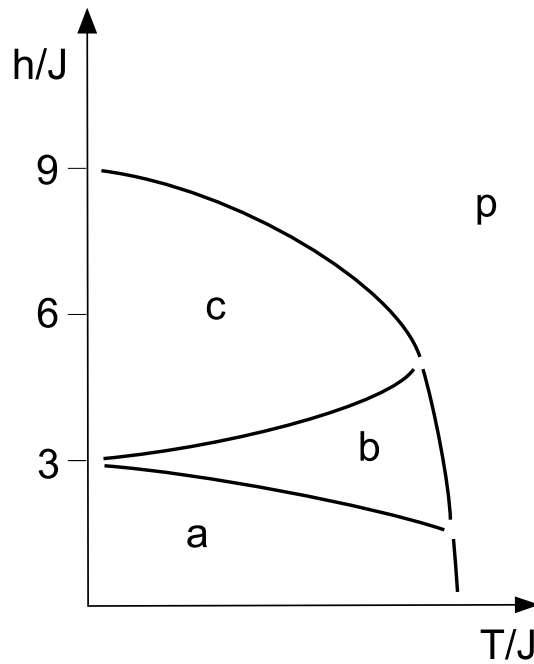


Рис. 13: Структура фазовой диаграммы планарного антиферромагнетика с треугольной решёткой. Фазы a и c - с шестикратным вырождением основного состояния, b - с трёхкратным, p - неупорядоченная (парамагнитная) фаза. Не показано слабое расщепление фазового перехода при $h = 0$ и слабое расщепление перехода из c в p , которое должно иметь место, по крайней мере, при достаточно низких температурах.

При полях, приближающихся снизу к $9J$, значения φ_A , φ_B и φ_C , удовлетворяющие уравнениям (47), могут быть представлены в виде

$$\varphi_A = \pi/2 + \Phi_0 \sin \chi, \quad \varphi_B = \pi/2 + \Phi_0 \sin(\chi + 2\pi/3), \quad \varphi_C = \pi/2 + \Phi_0 \sin(\chi - 2\pi/3),$$

где $\Phi_0 = 2(1 - h/9J)^{1/2}$ [104], благодаря чему система может быть аппроксимирована при помощи обычной (не фрустрированной) XY модели с анизотропией шестого порядка, связанной со свободной энергией флуктуаций [154]. Из результатов ренорм-группового анализа для такой XY модели [44, 157] следует, что, по крайней мере, часть линии перехода из фазы c в неупорядоченную фазу p должна расщепиться, при этом оба перехода будут относиться к классу универсальности БКТ. В промежуточной фазе анизотропия оказывается несущественна, что приводит к алгебраическому спаданию корреляций вместо настоящего дальнего порядка, однако вихри вспомогательной переменной χ образуют связанные пары. Из сравнения со структурой фазовой диаграммы шестипозиционной кубической модели [158] следует, что нерасщепленная часть линии переходов из c в p , равно как и нерасщепленная часть линии переходов из a в p , соответствуют переходам первого рода, аналогичным фазовому переходу в шестипозиционной модели Поттса [159].

Чубуков и Голосов показали [160], что учёт квантовых флуктуаций (в приближении большого, по сравнению с единицей, спина) не приводит к каким-либо неожиданным изменениям. Квантовые флуктуации играют ту же самую роль, что и термодинамические, т. е. приводят к стабилизации тех же самых состояний. Вследствие этого интервал полей, в котором существует фаза b , оказывается конечным уже при нулевой температуре. Эти выводы подтверждаются результатами численного моделирования квантовой

антиферромагнитной XY модели со спином $1/2$ [161].

Интересно, что в случае находящегося во внешнем магнитном поле *гайзенберговского* антиферромагнетика с треугольной решёткой учёт термодинамических [163] или квантовых [160, 162] флуктуаций приводят к стабилизации упорядоченных фаз с точно такой же структурой, как и в случае планарного антиферромагнетика. Т. е., при наличии флуктуаций наиболее выгодным оказывается состояние, в котором спины в трёх подрешётках лежат в одной плоскости (параллельной направлению магнитного поля) при этом ориентации спинов в различных подрешётках оказываются такими же, как показано на рис. 12. Трёхподрешёточные фазы с аналогичной структурой стабилизируются также как термодинамическими [164], так и квантовыми [165] флуктуациями в антиферромагнетиках с решёткой кагоме (см. рис. 14), что подтверждается результатами численных расчётов [165, 166].

Характерной особенностью промежуточной фазы *b* является гораздо более слабая зависимость намагниченности от приложенного магнитного поля, чем в окружающих её с обеих сторон фазах *a* и *c* [160]. Подобное поведение намагниченности при изменении поля наблюдалось в таких антиферромагнетиках, состоящих из слабо связанных треугольных слоёв, как EuC_6 [167], а также $\text{RbFe}(\text{MoO}_4)_2$ [168] и Cs_2CuBr_4 [169], в которых анизотропия является лёгкоплоскостной. Треугольная решётка также является типичной для адсорбированного монослоя, образующего двумерный кристалл.

4 Планарный антиферромагнетик с решёткой кагоме

Решётка кагоме представляет собой треугольную решётку, из которой регулярным образом удалена четверть узлов, см. рис. 14. Она состоит из двух типов ячеек: треугольных и шестиугольных.

Существует целый ряд слоистых антиферромагнетиков, в которых магнитные ионы образуют слабо связанные между собой слои с решёткой кагоме. В их число, в первую очередь, входят ярозиты [170–174], описываемые формулой $MFe_3(OH)_6(SO_4)_2$ (где $M = H_3O, Na, K, Rb, Ag, NH_4, Tl, Pb, Hg$) и их хромовые аналоги $KFe_3(OH)_6(CrO_4)_2$, а также $SrCr_{8-x}Ga_{4+x}O_{19}$ (SCGO) [175–179] и $Ba_2Sn_2ZnGa_3Cr_7O_{22}$ (QS-феррит) [180]. Некоторые из этих веществ характеризуются наличием лёгкоплоскостной анизотропии. Об этом, в частности, свидетельствуют недавние данные по восприимчивости $H_3OFe_3(OH)_6(SO_4)_2$ [174].

Объектом экспериментальных исследований являются также сетки из сверхпроводящих проволок с геометрией решётки кагоме [78, 181]. При величине внешнего магнитного поля, соответствующей полуполому числу квантов потока на элементарную треугольную ячейку (и, соответственно, целому числу квантов потока на шестиугольную ячейку), фазовые флуктуации в такой системе также могут быть описаны при помощи антиферромагнитной XY модели.

4.1 Основные состояния

Точно также, как и в случае треугольной решётки, основные состояния планарного антиферромагнетика с решёткой кагоме и взаимодействием только ближайших соседей могут быть построены исходя из того, что минимум энергии любой треугольной ячейки достигается тогда, когда принадлежащие ей спины образуют между собой углы в $2\pi/3$. Вследствие этого в каждом из основных состояний все переменные φ_j принимают только три различных значения,

$$\varphi_A = \Phi, \quad \varphi_B = \Phi + 2\pi/3, \quad \varphi_C = \Phi - 2\pi/3,$$

причём любая из треугольных ячеек должна содержать какую-либо перестановку всех трёх этих значений, что позволяет сопоставить [24, 182] такие состояния основным состояниям трёхпозиционной антиферромагнитной модели Поттса на такой же решётке.

Из точного решения, найденного Бакстером [183], известно, что основное состояние антиферромагнитной трёхпозиционной модели Поттса на решётке кагоме характеризу-

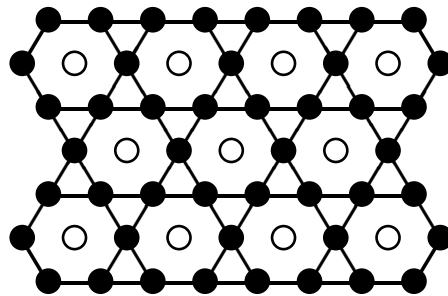


Рис. 14: Обозначенные чёрными кружками узлы образуют решётку кагоме.

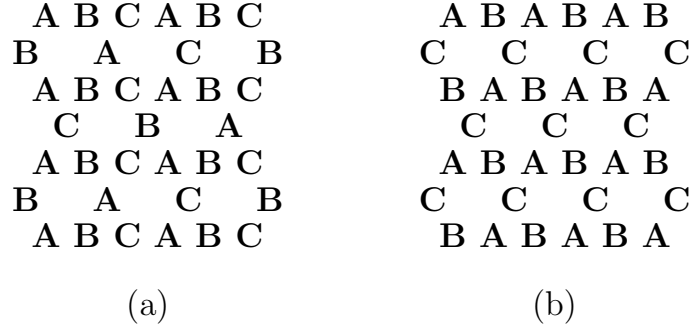


Рис. 15: Структура основных состояний антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме, стабилизирующихся взаимодействием следующих за ближайшими соседями: (a) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояние, (b) $\mathbf{q} = 0$ состояние.

ется весьма развитым вырождением, при котором число основных состояний экспоненциально растёт с ростом числа узлов в системе, что соответствует конечному значению остаточной энтропии в расчёте на узел. Как и в случае модели Поттса, аналогичное вырождение основного состояния антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме не связано с симметрией гамильтониана, однако сохраняется при изменении вида взаимодействия ближайших соседей.

Дискретное вырождение набора основных состояний антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме оказывается удобно описывать в терминах образования доменных стенок с нулевой энергией [184]. Рассмотрим так называемое $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояние [185], см. рис. 15а, структура которого соответствует структуре основного состояния в случае треугольной решётки и характеризуется антиферромагнитным упорядочением киральностей треугольных ячеек. Другое состояние с той же энергией может быть образовано при помощи перестановки, например, вида $\varphi_B \iff \varphi_C$ внутри любой замкнутой петли, образованной узлами с $\varphi_j = \varphi_A$, и т. п.. Такая замкнутая петля (простейший пример которой приведен на рис. 16(а)) может рассматриваться как доменная стенка с нулевой энергией, разделяющая два различных $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояния. Все подобные доменные стенки представляют собой ломаные линии, в которых соседние звенья образуют друг с другом углы $\pm 2\pi/3$, см. рис. 16(б). Естественно, они могут быть и не замкнутыми, т. е. бесконечными.

Вырождение, выражающееся в возможности построения доменных стенок с нулевой энергией, не связано с симметрией гамильтониана, и устраняется при включении в рассмотрение взаимодействия более далёких соседей. Для снятия этого случайного вырождения оказывается достаточным учесть взаимодействие следующих за ближайшими соседями, которое мы будем характеризовать константой связи J_2 . При ферромагнитном характере взаимодействия следующих за ближайшими соседями ($J_2 < 0$) основное состояние имеет $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ структуру [185], схематически показанную на рис. 15(а). При этом E_{DW} , энергия доменных стенок, аналогичных показанным на рис. 16, становится положительной. При дальнейшем анализе мы ограничимся предельным случаем $|J_2| \ll J_1$ (где $J_1 > 0$ это константа связи, описывающая взаимодействие соседних спинов), когда в пересчёте на одно звено $E_{DW} \approx 3|J_2|$. Поскольку каждое звено доменной стенки разделяет две треугольные ячейки с одинаковыми киральностями, можно сказать, что взаимодействия следующих за ближайшими соседями на решётке кагоме индуциру-

ет пропорциональное ему взаимодействие киральностей соседних треугольных ячеек, имеющее противоположный знак.

При антиферромагнитном характере взаимодействия следующих за ближайшими соседями ($J_2 > 0$) наименьшей энергией обладает так называемое $\mathbf{q} = 0$ состояние [185], схематически показанное на рис. 15(b), которое характеризуется ферромагнитным упорядочением киральностей треугольных ячеек. При обоих знаках J_2 вырождение основного состояния редуцируется до $U(1) \times Z_2$ [23].

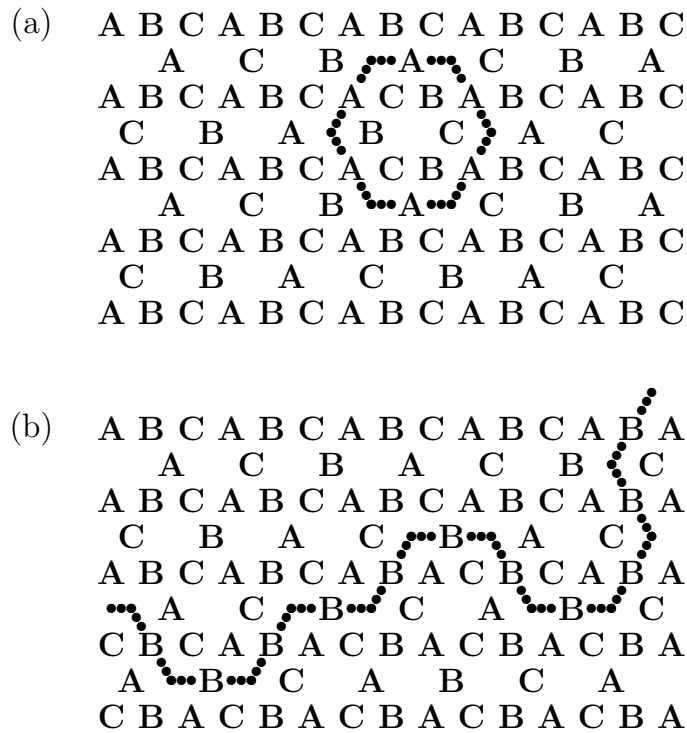


Рис. 16: Доменные стенки, разделяющие два различных $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояния: (a) замкнутая, (b) пересекающая всю систему.

4.2 Нультемпературные флуктуации

Как уже упоминалось выше, при учёте взаимодействия только ближайших соседей набор основных состояний антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме оказывается таким же, как и в трёхпозиционной антиферромагнитной модели Поттса на той же решётке. Известно, что возможно построить отображение этого набора основных состояний на набор состояний SOS модели, в которой определённые в центрах шестиугольных ячеек переменные $\mathbf{n}_{\mathbf{R}}$, имеющие смысл "высот" поверхности являются векторными [186]. На рис. 14 узлы \mathbf{R} , в которых определены переменные $\mathbf{n}_{\mathbf{R}}$, обозначены белыми кружками. Они образуют треугольную решётку, которую мы будем обозначать \mathcal{T} . Каждый узел \mathbf{j} решётки кагоме может быть сопоставлен связи $(\mathbf{R}\mathbf{R}')$ решётки \mathcal{T} , а каждая переменная $\varphi_{\mathbf{j}} = \varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ - принимающей три значения поттсовской переменной $\alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \equiv \alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}$, определённой на этой связи.

Поскольку каждая треугольная ячейка решётки кагоме должна содержать три различных переменных φ_A, φ_B и φ_C , они могут быть сопоставлены трём базисным векторам

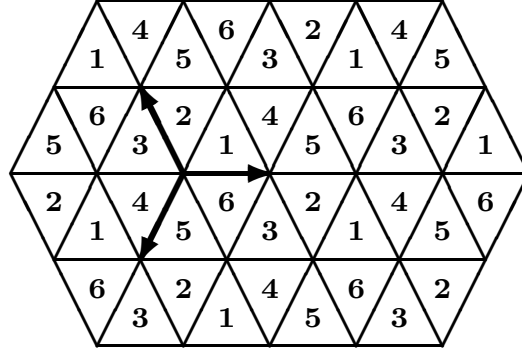


Рис. 17: Треугольная решётка \mathcal{T}_a и три её базисных вектора \mathbf{a}_α . Узлы дуальной решётки \mathcal{H}_a обозначены цифрами от 1 до 6. Одинаковые цифры соответствуют физически эквивалентным состояниям.

\mathbf{a}_α ($\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 0$, см. рис. 17) некоторой вспомогательной треугольной решётки, которую мы будем обозначать \mathcal{T}_a . Переменные $\mathbf{n}_{\mathbf{R}}$, принимающие значения, определённые на \mathcal{T}_a , могут быть тогда введены следуя правилу

$$\mathbf{n}_{\mathbf{R}'} = \begin{cases} \mathbf{n}_{\mathbf{R}} + \mathbf{a}_{\alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}} , & \text{если } \mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{e}_\alpha , \\ \mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{a}_{\alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}} , & \text{если } \mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{e}_\alpha , \end{cases} \quad (51)$$

где \mathbf{e}_α - это три базисных вектора решётки \mathcal{T} ($\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$). Это и определяет соответствие между состояниями антиферромагнитной модели Поттса и векторной SOS модели, в которой имеющие смысл высот переменные $\mathbf{n}_{\mathbf{R}} \in \mathcal{T}_a$ должны удовлетворять условию

$$|\mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{n}_{\mathbf{R}'}| = a , \quad (52)$$

на всех связях решётки \mathcal{T} . Здесь $a \equiv |\mathbf{a}_\alpha|$ это постоянная решётки для решётки \mathcal{T}_a .

Используя известные свойства точного решения [183] трёхпозиционной антиферромагнитной модели Поттса во внешнем поле, стабилизирующем антиферромагнитное упорядочение по киральностям, Хьюз и Рутенберг продемонстрировали [24], что во введённой выше векторной SOS модели (в статсумму которой все разрешённые конфигурации входят с одинаковыми весами) корреляционная функция $\langle (\mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{n}_{\mathbf{R}'})^2 \rangle$ при $|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| \rightarrow \infty$ ведёт себя как

$$\langle (\mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{n}_{\mathbf{R}'})^2 \rangle \approx \frac{3a^2}{\pi^2} \ln |\mathbf{R} - \mathbf{R}'| ,$$

что означает, что эта модель находится точно в точке фазового перехода из шероховатой в гладкую фазу. Поэтому можно ожидать, что любое дополнительное возмущение, ведущее к уменьшению флуктуаций, сдвинет систему из точки перехода в гладкое состояние, в котором флуктуации $n_{\mathbf{R}}$ не являются расходящимися.

Согласно условию (52) значения переменных $\mathbf{n}_{\mathbf{R}}$ в соседних узлах должны всегда отличаться друг от друга, поэтому даже максимально гладкое состояние "поверхности" будет представлять собой регулярное чередование трёх различных значений $\mathbf{n}_{\mathbf{R}}$. В такой ситуации фазовый переход в гладкую фазу более естественно описывать в терминах переменных

$$\mathbf{u}_{\mathbf{r}} \equiv \frac{\mathbf{n}_{\mathbf{R}} + \mathbf{n}_{\mathbf{R}'} + \mathbf{n}_{\mathbf{R}''}}{3} ,$$

представляющих собой среднее арифметическое значений переменных $\mathbf{n}_\mathbf{R}$ в трёх узлах решётки \mathcal{T} , принадлежащих к одной и той же треугольной ячейке. Переменные $\mathbf{u}_\mathbf{r}$ можно считать определенными в узлах \mathbf{r} сотовой решётки \mathcal{H} , дуальной к \mathcal{T} , и принимающими значения $\mathbf{u}_\mathbf{r} \in \mathcal{H}_a$, где \mathcal{H}_a - это сотовая решётка, дуальная к \mathcal{T}_a (см. рис. 17).

В терминах исходных спиновых переменных гладкие состояния векторной SOS модели (в которых все переменные $\mathbf{u}_\mathbf{r}$ равны друг другу) соответствуют $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояниям, а ступеньки с нулевой энергией, существование которых приводит к переходу поверхности в шероховатое состояние - доменным стенкам с нулевой энергией (типа показанных на рис. 16), разделяющим различные $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояния.

Крупномасштабные свойства векторной SOS модели (а также дальнейших её обобщений) удобно анализировать при помощи многокомпонентной версии модели синус-Гордона с той же симметрией. Обезразмеренный гамильтониан такой модели может быть выбран в виде [184]

$$H_{\text{SG}} = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{KQ^2}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r})]^2 + y \sum_{\alpha=1}^3 \cos[\mathbf{Q}_\alpha \mathbf{u}(\mathbf{r})] \right\}. \quad (53)$$

Первое слагаемое в (53) описывает эффективную жёсткость (энтропийного происхождения), связанную с флуктуациями $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, тогда как второе слагаемое делает предпочтительными значения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, принадлежащие к \mathcal{H}_a . Здесь \mathbf{Q}_α это три базисных вектора треугольной решётки, обратной к \mathcal{T}_a , так что

$$\mathbf{Q}_\alpha^2 = \frac{16\pi^2}{3a^2}, \quad \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 = 0.$$

Аналогичный гамильтониан (с противоположным знаком второго слагаемого) и эквивалентный ему векторный кулоновский газ исследовались Нельсоном [187] в связи с задачей о плавлении двумерного кристалла с треугольной решёткой. И хотя позднее было осознано [9–11], что задача о плавлении должна описываться несколько более сложным гамильтонианом, в который вклады, связанные со сжатием и со сдвигом входят различным образом (а не в виде инвариантной комбинации), в рассматриваемой нами задаче смещение \mathbf{u} имеет место в некотором абстрактном пространстве, никак не связанным с реальным пространством, что действительно позволяет ввести лишь один упругий модуль, как это и предполагается в (53).

В наших обозначениях ренормгрупповые уравнения [187], описывающие эволюцию K и y при изменении масштаба могут быть переписаны как

$$\frac{dK}{dl} = \frac{3\pi}{8} y^2, \quad (54a)$$

$$\frac{dy}{dl} = \left(2 - \frac{1}{4\pi K} \right) y - \pi y^2, \quad (54b)$$

где l это логарифм масштаба. Соответствующая ренормгрупповая диаграмма схематически изображена на рис. 18, где $K_c \equiv 1/8\pi$. Из вида уравнений (54) следует, что фазовый переход из гладкой в шероховатую фазу происходит тогда, когда перенормированное значение K сравнивается с K_c . Это означает, что введённая выше векторная SOS модель (которая, как установлено в [24], находится в точке фазового перехода) может быть сопоставлена [184] одной из точек, принадлежащих сепаратрисе, которая заканчивается при $y = 0$ и $K = K_c$.

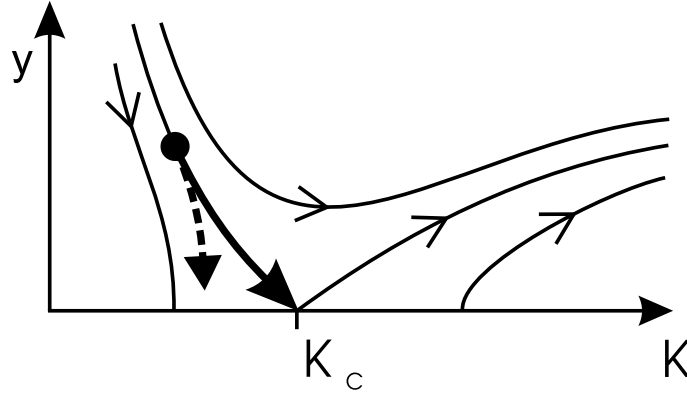


Рис. 18: Ренормгрупповая диаграмма для уравнений (54). Система с взаимодействием только соседних спинов и $T = 0$ может быть сопоставлена некоторой точке, принадлежащей левой сепаратрисе. Пунктирной стрелкой показано направление потока при $T > 0$, когда следует учесть пропорциональный z^2 отрицательный вклад в правую часть (54a).

4.3 Флуктуации при конечной температуре

При конечной температуре становятся возможны и иные типы флуктуаций, которые, в отличие от нультемпературных флуктуаций, рассмотренных в предыдущем разделе, требуют затрат энергии. В частности, речь может идти об образовании вихрей, которые при низких температурах должны быть связаны в пары малого размера. Наряду с обычными вихрями (с целым топологическим зарядом), в системе оказывается возможным образование также и дробных вихрей с топологическим зарядом $\pm 1/3$, локализованных на доменных стенках в тех точках, где соседние сегменты стенки образуют угол, отличный от $2\pi/3$ [184] (аналогично тому, как это имеет место в случае треугольной решётки, см. раздел 3.1).

На рис. 19(a) показана доменная стенка, содержащая одну такую точку. Она разделяет эту стенку на две части - верхнюю, образованную узлами C и нижнюю, образованную узлами B. Из рисунка видно, что при пересечении верхней части доменной стенки состояние справа от стенки должно отличаться от состояния слева от стенки перестановкой φ_A и φ_B , тогда как состояние, возникающее при пересечении нижней части доменной стенки должно отличаться от состояния слева перестановкой φ_A и φ_C . Это приводит к рассогласованию значений фазы на $2\pi/3$, которое, например, может быть локализовано на линии X-Y-Z. Естественно, минимум энергии достигается когда вместо скачка на $2\pi/3$ на этой линии фаза плавным образом меняется на $2\pi/3$ при обходе вокруг особой точки, что и означает появление дробного вихря с топологическим зарядом, абсолютная величина которого равна $1/3$.

При низких температурах все дробные вихри должны быть связаны в нейтральные пары. Пример такой пары приведен на рис. 19(b). При повышении температуры должна происходить диссоциация пар дробных вихрей [24, 188, 189].

Если бы дробные вихри существовали бы независимо от доменных стенок, это происходило бы при температуре T_{FV} удовлетворяющей соотношению

$$T_{FV} = \frac{\pi}{18} \Gamma(T_{FV}), \quad (55)$$

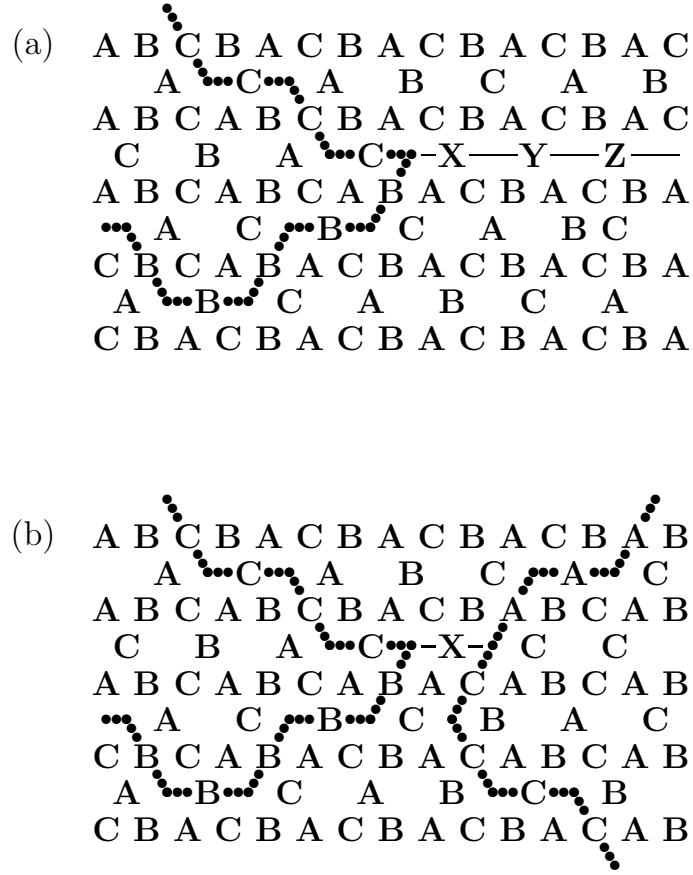


Рис. 19: (a) дробный вихрь, (b) дислокация, представляющая собой нейтральную пару дробных вихрей.

аналогичному соотношению (37). Поскольку в любом из вырожденных основных состояний $\Gamma = (\sqrt{3}/4)J_1$, это даёт для T_{FV} оценку [184]

$$T_{FV} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{72}J_1 \approx 0.0756J_1, \quad (56)$$

которая находится в хорошем согласии со значениями температуры фазового перехода, $T_{FV} \approx (0.070 \div 0.076)J_1$, следующими из результатов численного моделирования [190]. В [191] эта же оценка для T_{FV} была получена существенно более сложным способом, основанном на использовании дуального преобразования (см. раздел 1.1.6).

Сравнение правила (51) с рис. 19 позволяет убедиться, что в терминах векторной SOS модели, введённой в предыдущем разделе, каждый дробный вихрь соответствует точке, при обходе вокруг которой переменная \mathbf{u} изменяется на $\Delta\mathbf{u}$, где $|\Delta\mathbf{u}| = a$. Это означает, что каждый дробный вихрь представляет собой точку, где начинается или заканчивается ступенька высотой $\Delta\mathbf{u}$ (или, в более общем случае, набор ступенек с суммарной высотой $\Delta\mathbf{u}$). Соответственно, флуктуации SOS модели приведут к дополнительному вкладу во взаимодействие дробных вихрей, связанному с разницей в энтропии между состояниями с различными положениями точек окончания ступенек [184]. Во всей шероховатой фазе (включая точку перехода в гладкое состояние) это дополнительное взаимодействие, которое может быть выражено через корреляционную

функцию некоторой новой XY модели, дуальной к SOS модели [56, 57], также является логарифмическим. Его наличие ведёт к некоторому увеличению T_{FV} и относительному ослаблению взаимного влияния между дробными и обычными вихрями. Из сравнения с [192] следует, что, в принципе, такое взаимодействие могло бы привести к появлению дополнительного фазового перехода, связанного с диссоциацией пар обычных вихрей и происходящего при $T_V > T_{FV}$. Этого, однако, не происходит из-за того, что величина энтропийного взаимодействия дробных вихрей является достаточно слабой [184].

С другой стороны, при $T > 0$ теряется строгая эквивалентность с SOS моделью [184]. Напомним, что бесконечное множество различных "гладких" состояний SOS модели в терминах спиновых переменных соответствуют (для данного φ_A) всего лишь шести различным $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояниям, которые могут быть получены из состояния, показанного на рис. 15(a) при помощи всех возможных перестановок A, B и C. На рис. 17 узлы решётки \mathcal{H}_a , которые в терминах исходных фазовых переменных φ_j соответствуют одним и тем же состояниям, обозначены одинаковыми цифрами.

При нулевой температуре специфические свойства доменных стенок с нулевой энергией, разделяющих такие состояния (в частности, две замкнутых доменных стенки не могут пересекаться друг с другом) позволяют трактовать их как неэквивалентные состояния SOS модели. Аналогичная ситуация имеет место при использовании шестивершинной модели сегнетоэлектрика (модели льда [59]) для построения SOS модели грани (001) кристалла с объёмно-центрированной кубической решёткой [58].

При конечной температуре у набора доменных стенок, разделяющих два физически эквивалентных состояния, появляется возможность слиться друг с другом и исчезнуть. Подобные точечные дефекты хорошо известны в теории перехода из соизмеримого в несоизмеримое состояние [193]. Собственная энергия E_D такого дефекта конечна и пропорциональна J_1 : $E_D = c_D J_1$, где c_D порядка единицы.

В терминах многокомпонентной модели синус-Гордона (53) такие дефекты соответствуют дислокациям поля \mathbf{u} , вектора Бюргерса которых, \mathbf{b}_α ($\alpha = 1, 2, 3$), как это следует из рис. 17, имеют вид

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1.$$

Пример такой дислокации показан на рис. 19(b). Она образована нейтральной парой дробных вихрей, локализованных на двух различных доменных стенках, не являющихся продолжением друг друга. Буквой X обозначен узел на котором $\varphi_j \approx (\varphi_A + \varphi_B)/2$. В окрестности этого узла значения φ_j слегка отклоняются от подразумеваемых обозначениями A, B и C. Последовательное применение правила (51) вдоль периметра любого замкнутого контура, окружающего точку X, приводит к $\Delta \mathbf{n} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$.

Ренормировка химической активности дислокации $z = \exp(-c_D J_1/T)$ при изменении масштаба описывается уравнением [9, 10]

$$\frac{dz}{dl} = \lambda_z z + 2\pi z^2$$

где

$$\lambda_z = 2 - \frac{KQ^2 b^2}{4\pi} \equiv 2 - 4\pi K$$

В окрестности перехода шероховатости ($K \approx K_c \approx 1/8\pi$) индекс λ_z , описывающий перенормировку z , близок к $\lambda_z^0 = 3/2$, что соответствует быстрому росту z . Сравнение λ_z с $\lambda_y = 2 - 1/(4\pi K)$ показывает, что y и z не могут одновременно ренормироваться в

ноль. В этом смысле ситуация оказывается совершенно аналогична возникающей при анализе обычной (ферромагнитной) XY модели со слабой анизотропией не слишком высокого порядка [44, 157].

Присутствие дислокаций (или, точнее говоря, дислокационных пар) приводит к появлению в правой части (54a) дополнительного отрицательного слагаемого, пропорционального z^2 . Наличие такого слагаемого сдвигает поток с сепаратрисы в область, соответствующую шероховатой фазе SOS модели [184].

С другой стороны, неограниченный рост z при ренормировке означает, что в системе появится конечная концентрация свободных дислокаций, что превратит шероховатую фазу SOS модели в неупорядоченную фазу модели с шестью состояниями. В такой фазе спадание корреляций характеризуется конечным корреляционным радиусом ξ_z , который может быть найден как масштаб, на котором ренормированное значение z становится порядка единицы. ξ_z определяет масштаб, на котором экранируется дополнительное (энтропийное) взаимодействие дробных вихрей, связанное с флуктуациями доменных стенок. Конечность ξ_z устраняет даже гипотетическую возможность того, что диссоциация пар обычных вихрей будет происходить как независимый фазовый переход при $T_V > T_{FV}$.

4.4 Фазовый переход, связанный с упорядочением по киральностям

4.4.1 При ферромагнитном взаимодействии следующих за ближайшими соседями

Как уже отмечалось выше, ферромагнитное взаимодействие следующих за ближайшими соседями приводит к тому, что энергия доменных стенок, аналогичных показанным на рис. 16, становится конечной ($E_{DW} \approx 3|J_2|$). Обычно T_{DW} , температуру фазового перехода, связанного с появлением бесконечных доменных стенок, можно оценить сравнивая энергетический и энтропийный вклады в свободную энергию стенки [194, 195], что в рассматриваемой ситуации привело бы к $T_{DW} \propto |J_2|$. Однако такой подход не учитывает, что появление бесконечной стенки приводит к дополнительному уменьшению энтропии из-за того, что создаёт препятствия для появления флуктуационно образующихся замкнутых доменных стенок, и поэтому не всегда приводит к правильному ответу.

В терминах введённой выше векторной SOS модели конечная величина E_{DW} (т. е. энергии ступени) вызывает сдвиг системы из точки перехода шероховатости в гладкую фазу. С другой стороны, появление при конечной температуре свободных дислокаций способствует сдвигу в противоположную сторону, т. е. в неупорядоченную фазу. Ренорм-групповой анализ, учитывающий конкуренцию двух этих эффектов [184], приводит к выводу, что в пределе $|J_2|/J_1 \rightarrow 0$

$$T_{DW} \sim J_1 \left(\frac{E_{DW}}{J_1} \right)^{3/8} \propto J_1^{5/8} |J_2|^{3/8}, \quad (57)$$

тогда как при увеличении отношения $|J_2|/J_1$ происходит переход в режим, в котором значение индекса меняется на $1/2$, что может быть показано при помощи самосогласованного приближения, аналогичного введённому в [196].

Следует подчеркнуть, что уравнение (57) выведено в предположении, что все дробные вихри связаны в пары и, соответственно, справедливо лишь при $T_{DW} < T_{FV}$. С

другой стороны, диссоциация пар дробных вихрей возможна лишь при $T > T_{DW}$, поскольку при $T < T_{DW}$ дробные вихри помимо логарифмического взаимодействия связаны друг с другом так же и доменными стенками, обладающими конечной свободной энергией на единицу длины. Поэтому сценарий с $T_{DW} > T_{FV}$ оказывается невозможен, а диссоциация пар дробных вихрей происходит либо при более высокой температуре, чем появление бесконечных доменных стенок, либо одновременно с ним.

Появление сетки из доменных стенок ведёт к перемешиванию шести основных состояний, которые могут быть получены из состояния, показанного на рис. 15(a), при помощи всех возможных перестановок A, B и C, поэтому связанный с этим фазовый переход не должен относиться к изинговскому классу универсальности. Построение шестипозиционной модели с такой же статистикой доменных стенок [148, 184] приводит к модели, дуальной к шестипозиционной кубической модели, в которой, как известно, фазовый переход происходит первым родом [158]. Следовательно, и в рассматриваемой задаче фазовый переход при $T = T_{DW}$ должен происходить первым родом, по крайней мере, при $T_{DW} < T_{FV}$, а скорее всего и при бóльших значениях E_{DW} , когда непрерывные и дискретные степени свободы одновременно становятся разупорядоченными.

Сравнение (55) и (57) показывает, что выполнение соотношения $T_{DW} < T_{FV}$ возможно лишь при $-J_{\max} < J_2 < 0$, где J_{\max} порядка $10^{-3}J_1$ [184]. При $J_2 < -J_{\max}$ в системе будет происходить единственный фазовый переход, при котором возникновение бесконечных доменных стенок вызывает появление свободных вихрей всех возможных типов. В этом случае диссоциация пар дробных вихрей происходит из-за зануления линейного вклада в их взаимодействие (связанного со свободной энергией соединяющих их доменных стенок), в то время как логарифмический вклад во взаимодействие слишком слаб, чтобы удержать такие пары в связанном состоянии. Поэтому можно ожидать, что значение модуля жёсткости в точке перехода будет неуниверсальным:

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\Gamma(T_c)}{T_c} < \frac{18}{\pi}.$$

Подчеркнём, что приведенная выше оценка для J_{\max} была получена при пренебрежении численными коэффициентами, которые могут содержаться в соотношении (57), так что должна восприниматься с некоторой осторожностью.

4.4.2 При антиферромагнитном взаимодействии следующих за ближайшими соседями

При антиферромагнитном характере взаимодействия следующих за ближайшими соседями ($J_2 > 0$) минимум энергии достигается в одном из $\mathbf{q} = 0$ состояний с ферромагнитным упорядочением киральностей треугольных ячеек [185], см. рис. 15(b). Понятно, что дискретное вырождение такого состояния также является двукратным.

Как и в предыдущем случае, это состояние допускает построение доменной стенки, энергия которой (в пересчёте на элементарное звено) E_{DW} пропорциональна константе связи следующих за ближайшими соседями: $E_{DW} \approx 3|J_2| = 3J_2$, см. рис. 20(a). Однако, сравнение рис. 20(a) с рис. 20(b) показывает, что в данном случае состояние по другую сторону доменной стенки однозначно определяется её ориентацией и различно для различных ориентаций. Возникающее при этом рассогласование значений φ_j должно быть скомпенсировано присутствием дробных вихрей на всех углах доменных стенок, совершенно аналогично тому, как это имеет место в случае максимально фрустрированной XY модели на квадратной решётке, см. раздел 2.2. В рассматриваемой сейчас

ситуации это имеет особое значение, поскольку делает невозможным построение замкнутой доменной стенки, энергия которой определяется исключительно значением J_2 и не зависит от J_1 [184].

Вследствие этого возникающие в результате тепловых флуктуаций дефекты основного состояния, связанные с изменением знака киральностей, при $J_2 \ll J_1$ будут иметь вид узких полосок, ограниченных двумя доменными стенками с малой энергией, см. рис. 20(c). Также, как и на рис. 19, буквой X обозначены узлы, на которых $\varphi_j \approx (\varphi_A + \varphi_B)/2$. Аналогичную форму имеют дефекты структуры, возникающие при повышении температуры в однородно фрустрированной XY модели с $f = 1/4$ или $f = 1/3$ и треугольной решёткой [198].

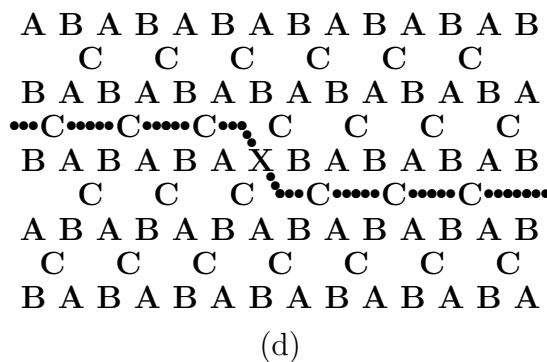
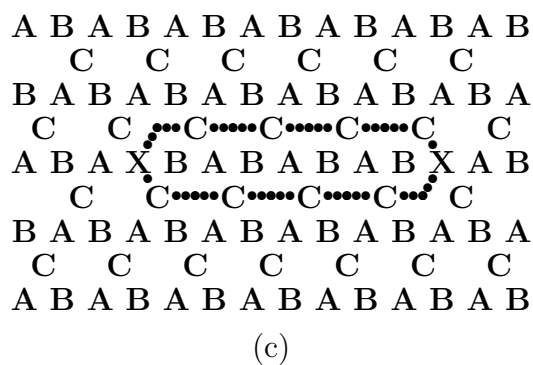
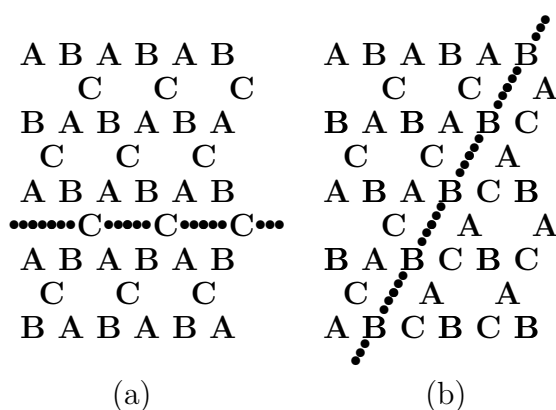


Рис. 20: Дефекты на фоне $\mathbf{q} = 0$ состояния: (a) и (b) прямые доменные стенки с различной ориентацией, (c) типичный дефект конечного размера, (d) перегиб на стенке.

Энергия такого дефекта близка к $2E_0 + 2E_{\text{DW}}L$, где $E_0 = c_0J_1$ ($c_0 \approx 0.55$) это энергия каждого из его концов, а L - его длина. Это позволяет оценить долю площади системы ρ , занятую подобными дефектами. При выполнении условия $E_{\text{DW}} \ll T \ll J_1$

$$\rho \sim \left(\frac{T}{2E_{\text{DW}}} \right)^2 \exp\left(-\frac{2E_0}{T}\right).$$

Предположение, что фазовый переход происходит тогда, когда ρ становится порядка единицы [80], даёт для температуры перехода T_{DW} уравнение

$$T_{\text{DW}} \approx \frac{E_0}{\ln(T_{\text{DW}}/E_{\text{DW}})},$$

откуда [184] $T_{\text{DW}} \sim J_1/\ln(J_1/J_2)$. Такая же оценка следует из сравнения энергии доменной стенки E_{DW} с её энтропией $S_{\text{DW}} \approx 2 \exp(-E_{\text{K}}/T)$, связанной с возможностью образования на ней перегибов. Пример такого перегиба показан на рис. 20(d). Его структура весьма похожа на структуру точки окончания линейного дефекта, изображённого на рис. 20(c), в соответствии с чем $E_{\text{K}} \approx E_0$.

На самом же деле при $J_2 \ll J_1$ фазовый переход обусловлен энтропией образования *сетки* из доменных стенок, и происходит при конечной температуре даже при $J_1 = \infty$, когда флуктуации конечного размера на фоне $\mathbf{q} = 0$ состояния просто невозможны. В этом пределе при низких температурах упорядоченная фаза является полностью замороженной, а её свободная энергия (на узел) совпадает с энергией $\mathbf{q} = 0$ состояния,

$$E_{\mathbf{q}=0} = -J_1 - J_2.$$

С другой стороны, поскольку при $J_2 > 0$ энергия $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояния,

$$E_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -J_1 + 2J_2$$

является наибольшей среди всех состояний, разрешённых при $J_1 = \infty$, свободная энергия неупорядоченной фазы F_{D} должна удовлетворять неравенству

$$F_{\text{D}} < F_{\text{D}}^+ = E_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - TS_0,$$

где $S_0 \approx 0.1264$ [183] это остаточная энтропия (при $J_2 = 0$, $T = 0$) в пересчёте на узел. Сравнение $E_{\mathbf{q}=0}$ с F_{D}^+ позволяет заключить, что при $J_1 = \infty$ температура фазового перехода в неупорядоченную фазу T_{DW} не должна превышать

$$T_{\text{DW}}^+ = \frac{E_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - E_{\mathbf{q}=0}}{S_0} \approx 23.7 J_2. \quad (58)$$

Аналогичная оценка была предложена в [197] исходя из общих соображений, однако на самом деле неравенство $T_{\text{DW}} < T_{\text{DW}}^+$ является строгим. Понятно, что эта же оценка будет работать также и при достаточно больших конечных значениях J_1 .

Так же, как и в случае антиферромагнитного упорядочения киральностей, появление бесконечных доменных стенок может происходить как отдельный фазовый переход (не вызывающий диссоциацию пар дробных вихрей) только при $T < T_{\text{FV}}$. Сравнение (56) и (58) показывает, что выполнение неравенства $T_{\text{DW}}^+ < T_{\text{FV}}$ требует $J_2 < J_{\text{max}}^+$, где J_{max}^+ порядка $3 \cdot 10^{-3} J_1$. Поскольку появление доменных стенок и в этом случае связано с перемешиванием шести различных состояний (а не двух), фазовый переход при $T = T_{\text{DW}}$ не должен иметь изинговскую природу.

4.4.3 При взаимодействии только ближайших соседей

При взаимодействии только соседних спинов случайное вырождение снимается лишь при конечной температуре за счёт разницы в свободных энергиях малых флуктуаций (спиновых волн). Аналогичный механизм снятия случайного вырождения был рассмотрен выше, в разделах 2.5 и 3.2. Однако, в отличие от этих двух примеров, в случае планарного антиферромагнетика с решёткой кагоме гамильтониан, описывающий гармонические флуктуации, оказывается одним и тем же для всех основных состояний. По этой причине разница между свободными энергиями флуктуаций в окрестности различных основных состояний возникает лишь при учёте ангармонизмов и должна являться величиной по меньшей мере второго порядка малости по температуре [24].

Проведенный в [184] расчёт показывает, что достаточно ограничиться ангармоническими поправками наинизшего порядка. Свободная энергия ангармонических флуктуаций оказывается минимальна, если киральности соседних треугольных ячеек имеют противоположные знаки (т. е. в $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состоянии), а её величина соответствует

$$E_{\text{DW}}^{\text{eff}} = \gamma \frac{T^2}{J_1} \quad (59)$$

где $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-3} > 0$. Тенденция к упорядочению в $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ состояние проявляет себя и при построении высокотемпературного разложения [185], которое, однако, не позволяет сделать каких-либо выводов о поведении системы в пределе низких температур.

Известно, что как термодинамические [199, 200], так и квантовые [201–203] ангармонические флуктуации в *гайзенберговском* антиферромагнетике с решёткой кагоме также приводят к стабилизации (по крайней мере, локальной) планарного состояния с $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ структурой. К таким же последствиям приводят *гармонические* флуктуации модуля параметра порядка в имеющей геометрию решётки кагоме сетке из сверхпроводящих проволок, помещённой во внешнее магнитное поле, величина которого соответствует полуцелому числу квантов потока на каждую треугольную ячейку [197].

Следует отметить, что эффективная энергия доменной стенки, задаваемая уравнением (59), оказывается всегда мала по сравнению с температурой, что, например, в случае модели Изинга привело бы к её недостаточности для стабилизации упорядочения по киральностям. Однако, в рассматриваемой нами системе ситуация является качественно иной. Подстановка (59) в (57) показывает, что при $J_2 = 0$ температура фазового перехода, связанного с антиферромагнитным упорядочением киральностей при $J_2 = 0$ может быть оценена как

$$T_{\text{DW}}(J_2 = 0) \sim \gamma^{3/2} J_1. \quad (60)$$

Подстановка в (60) найденного из численного вычисления значения γ , упоминавшегося выше, даёт тогда $T_{\text{DW}}(J_2 = 0) \sim 10^{-4} J_1$.

Следует подчеркнуть, что в системе конечного размера упорядочение по киральностям выживает лишь если свободная энергия доменной стенки, пересекающей всю систему, велика по сравнению с температурой. Это накладывает на размер образца L условие $L \gg L_c$, где L_c больше или порядка $L_c^{\text{min}} = T/E_{\text{DW}}^{\text{eff}} = J_1/\gamma T$. Из (59) и (60) следует, что в низкотемпературной фазе с дальним порядком по киральностям L_c^{min} оказывается больше или порядка 10^7 [79], что делает наблюдение упорядочения киральностей, вызванного ангармоническими флуктуациями, весьма и весьма проблематичным. Это согласуется с результатами численного моделирования в [190], которые продемонстрировали отсутствие упорядочения по киральностям при $T \geq 10^{-3} J_1$

и $L \leq 300$. Как показывает наш анализ, наблюдение такого упорядочения требует не только существенно более низких температур, но и гораздо бóльших размеров системы.

Интересно, что необходимость учёта ангармонических флуктуаций возникает также и при анализе максимально фрустрированных XY моделей на сотовой [79] и гексагональной ромбической [80] решётках. Хотя в обеих этих моделях (в отличие от антиферромагнитной модели на решётке кагоме) гамильтониан, описывающий гармонические флуктуации, в различных основных состояниях имеет различный вид, свободная энергия таких флуктуаций (равно как и энергия их нулевых колебаний) оказывается одинаковой для всех основных состояний из-за наличия у этих гамильтонианов скрытой калибровочной инвариантности [79, 80].

При этом в обоих случаях эффективная энергия доменной стенки, связанная с ангармоническими флуктуациями, также описывается уравнением (59) и также является крайней малой в силу численной малости коэффициента γ ($\gamma \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$). В результате оказывается, что в обеих системах упорядочение по киральностям даже при оптимальной температуре характеризуется настолько большим корреляционным радиусом, что его наблюдение при численном моделировании становится невозможным [79, 80].

4.5 Структура фазовой диаграммы

Структура фазовой диаграммы планарного антиферромагнетика с решёткой кагоме [184] схематически (не в масштабе) показана на рис. 21. Фазы с ферромагнитным и антиферромагнитным упорядочением киральностей обозначены, соответственно, F и AF. Фаза, в которой разрушено упорядочение по киральностям, но имеется упорядочение по $\exp(i3\varphi)$ и конечная эффективная жёсткость обозначена S, а полностью разупорядоченная фаза - D.

Фазовый переход из S в D связан с диссоциацией пар дробных вихрей с топологическим зарядом $\pm 1/3$ [24, 188, 189]. В разделе 4.3 показано, что дополнительное взаимодействие дробных вихрей, обусловленное флуктуациями связывающих их доменных стенок, является короткодействующим, и, следовательно, несущественно. Поэтому соответствующий фазовый переход должен относиться к классу универсальности БКТ, а значение модуля жёсткости в точке перехода удовлетворять соотношению (55).

Однако область параметров, в которой реализуется сценарий с $T_{DW} < T_{FV}$ и диссоциация пар дробных вихрей происходит как независимый фазовый переход, оказывается чрезвычайно узкой: $-J_{\max} < J_2 < J_{\max}^+$, где $J_{\max}, J_{\max}^+ \sim (10^{-2} \div 10^{-3})J_1$. Для бóльших значений $|J_2|$ два фазовых перехода должны слиться в один. Это подтверждается результатами численного моделирования Гехта и Бондаренко [23], которые показали, что при $|J_2| \geq 0.1J_1$ разупорядочение по непрерывным и дискретным степеням свободы происходит при одной и той же температуре, а термодинамическая сингулярность близка к изинговской.

При $J_2 < 0$ и $|J_2| \sim J_1$ должно произойти новое расщепление фазового перехода на два, соответствующее реализации сценария с $T_V < T_{DW}$ и связанное с механизмом, рассмотренным во второй главе. Это расщепление показано в нижней части рис. 21.

Учёт ангармонических флуктуаций приводит к небольшому увеличению эффективной величины константы связи J_2 , что вызывает некоторый загиб вверх области существования фазы S, имеющей форму клювика. Вследствие этого при очень малых, но положительных J_2 в системе при повышении температуры должно происходить четыре фазовых перехода в последовательности $F \rightarrow S \rightarrow AF \rightarrow S \rightarrow D$.

Также, как в случае треугольной решётки, полученные результаты применимы для

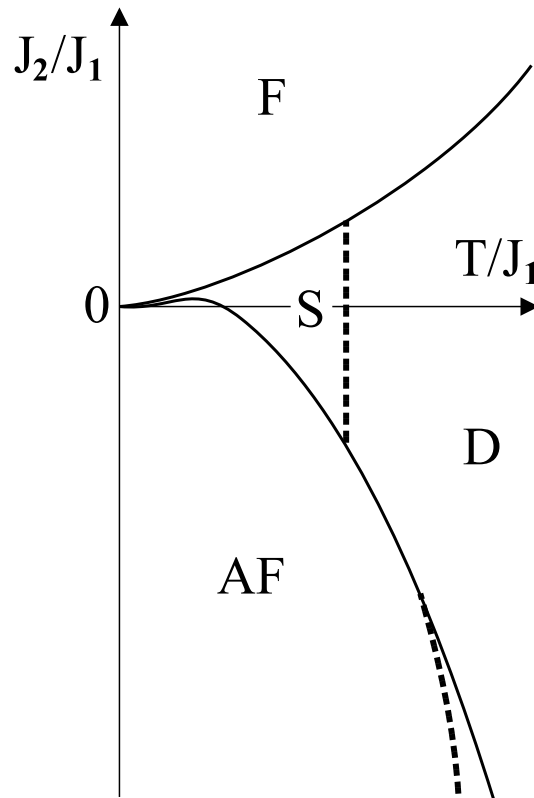


Рис. 21: Схематическое изображение структуры фазовой диаграммы антиферромагнитной XY модели на решётке кагоме.

описания не только планарных антиферромагнетиков, но и решёток джозефсоновских контактов и сеток из сверхпроводящих проволок с полуцелым числом квантов потока на каждую треугольную ячейку, а также решёток π -контактов в отсутствие магнитного поля. В таких системах взаимодействием, приводящим к снятию случайного вырождения, является магнитное взаимодействие токов [197].

В [197] было показано, что магнитная энергия токов минимальна в $\mathbf{q} = 0$ состоянии. Отсюда следует, что её учёт в рамках представленного в этой главе анализа должен был бы соответствовать $J_2 > 0$. Однако, несколько более внимательный подход [80], учитывающий не только собственную энергию магнитных полей, создаваемых токами, но и влияние этих полей на изменение свободной энергии джозефсоновских контактов (или сверхпроводящих проволок), показывает, что суммарное изменение свободной энергии имеет противоположный знак. Вследствие этого во фрустрированных сверхпроводящих системах с геометрией решётки кагоме учёт магнитных эффектов соответствует $J_2 < 0$.

5 Решётка SFS контактов

Рассмотрим теперь модификацию XY модели, описываемую гамильтонианом

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} V(\varphi_i - \varphi_j), \quad (61)$$

где, в отличие от стандартной XY модели с $V(\theta) = -J \cos \theta$, применимой для описания планарных ферромагнетиков и решёток обычных джозефсоновских контактов в отсутствие магнитного поля, будем полагать, что чётная периодическая функция $V(\theta)$ наряду с основным минимумом, расположенным при $\theta = 0$, имеет почти столь же глубокий дополнительный минимум при $\theta = \pi$ (см. рис. 22). Определённые с точностью до сдвига на 2π фазовые переменные φ_j будут предполагаться заданными в узлах квадратной решётки.

Как показано в [25–27], такая зависимость джозефсоновской энергии от разности фаз характерна для SFS (сверхпроводник-ферромагнетик-сверхпроводник) контактов, параметры которых близки к точке перехода контакта в так называемое π -состояние [204–206], так что рассматриваемая модель применима для описания регулярной решётки, изготовленной из подобных контактов. Экспериментально переход SFS контакта в π -состояние при изменении температуры был продемонстрирован в [207–209], а при изменении параметров контакта - в [210]. Первый эксперимент на решётке SFS контактов (состоящей, правда, из всего двух ячеек) был осуществлён в [211].

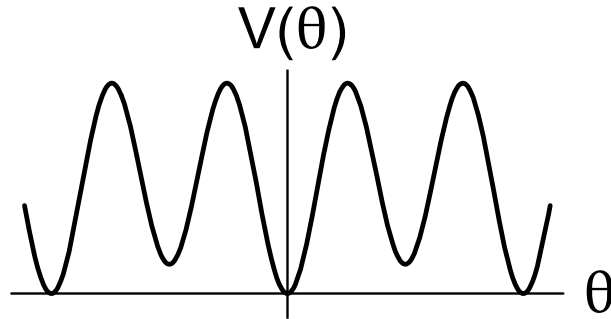


Рис. 22: Взаимодействие $V(\theta)$, приводящее к возможности появления солитонов.

5.1 Классификация дефектов и возможные фазовые переходы

Введём обозначения: $V_1 \equiv V(\pi) - V(0)$ - для разницы в энергиях между неэквивалентными минимумами функции $V(\theta)$ и V_2 - для её кривизны вблизи минимумов, которую будем полагать одинаковой для обоих типов минимумов и удовлетворяющей условию $V_2 \gg V_1$.

При низких температурах основной вклад в статистическую сумму системы с непрерывным вырождением вносят как её основные состояния (соответствующие абсолютноному минимуму гамильтониана), так и низколежащие локальные минимумы гамильтониана, а также малые флуктуации в окрестностях этих минимумов (спиновые волны). Последние ответственны за степенное спадание корреляционной функции $\langle \exp i[\varphi_{j+\mathbf{r}} - \varphi_j] \rangle$ с ростом $|\mathbf{r}|$ [1, 34].

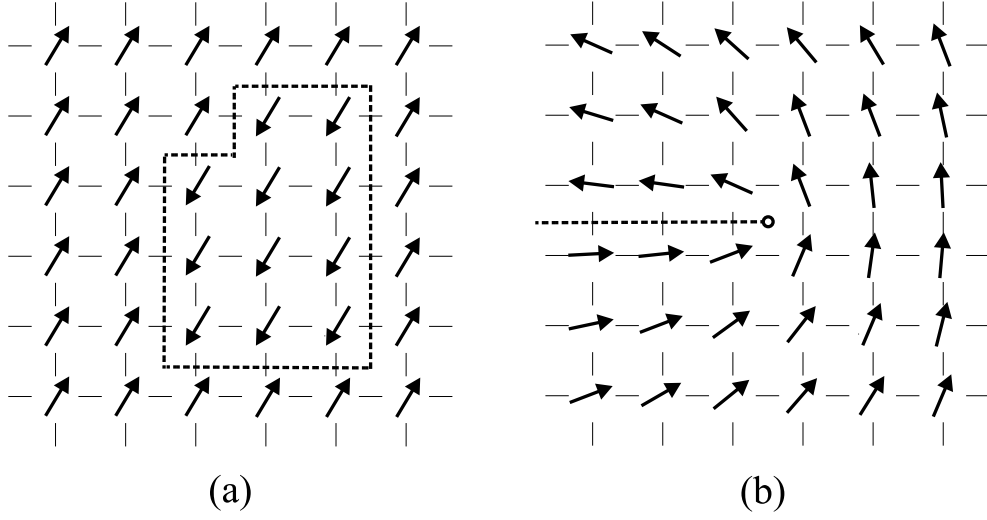


Рис. 23: Топологические возбуждения в XY модели с модифицированным взаимодействием: (a) замкнутый солитон; (b) солитон, оканчивающийся на полувихре с $m = +1/2$.

В XY модели с введённым выше модифицированным взаимодействием можно выделить два базовых типа локальных минимумов гамильтониана, вихри и солитоны. Вихри - это точечные топологические возбуждения, имеющие ту же структуру, что и в стандартной XY модели (см. рис. 1). Поскольку в рассматриваемой системе затравочное значение модуля жёсткости равно V_2 , можно ожидать, что диссоциация вихревых пар будет происходить при $T = T_V \sim (\pi/2)V_2$. Вторым же видом локальных минимумов гамильтониана это солитоны - линии на дуальной решётке, при пересечении которых фаза меняется на π [212–214], см. рис. 23(a). Энергия солитона на единицу длины равна V_1 , поэтому при $T \ll V_1$ все солитоны, возникающие как тепловые флуктуации, должны быть замкнуты и иметь небольшую длину.

Следует подчеркнуть, что солитон не является стабильным топологическим возбуждением, поскольку состояния по обе стороны от него могут быть переведены друг в друга непрерывным образом, не выходя из пространства вырождения. Это означает, что, в отличие от доменных стенок в модели Изинга, солитоны могут иметь точки окончания. При этом, чтобы скомпенсировать скачок фазы на солитоне, при обходе вокруг точки окончания солитона фаза должна постепенно меняться на $\pm\pi$, что означает, что точки окончания солитонов представляют собой вихри с полуцелым топологическим зарядом [212–214]. Естественно, минимальная энергия соответствует $m = \pm 1/2$. Для краткости мы будем называть такие объекты [см. рис. 23(b)] полувихрями.

Как и в случае целочисленных вихрей с $m = \pm 1$, взаимодействие полувихрей с $m = \pm 1/2$ является логарифмическим, при этом константа взаимодействия (стоящая перед логарифмом) оказывается в четыре раза меньше. Если бы полувихри существовали независимо от солитонов, диссоциация нейтральных пар, ими образованных, происходила бы при температуре $T = T_{HV}$, где $T_{HV} \ll T_V$ - решение уравнения

$$T_{HV} = \frac{\pi}{8} \Gamma(T_{HV}), \quad (62)$$

аналогичного уравнению (18). Однако, поскольку каждый полувихрь является к тому же и точкой окончания солитона, попытка развести два полувихря на произвольное

расстояние выявляет наличие так же и линейного по расстоянию вклада в их взаимодействие, связанного с энергией соединяющего их солитона. При V_1 одного порядка с V_2 наличие такого взаимодействия служит препятствием к диссоциации пар полувихрей при $T = T_{\text{HF}}$.

Если $T \ll V_2/4$, а соотношение между T и V_1 произвольно, логарифмическое взаимодействие точек окончания солитонов приводит к тому, что все они связаны в нейтральные (по топологическому заряду) пары малого размера. Поэтому рядом с любой точкой окончания солитона всегда должна находиться другая точка окончания, выходящий из которой солитон можно считать продолжением первого. Благодаря этому, при $T \ll V_2/4$ солитоны ведут себя как топологические возбуждения в модели Изинга (доменные стенки), даже и не будучи таковыми по своей сути [212, 213].

Это означает, что при $T = T_S \sim V_1$ в системе должен происходить фазовый переход из низкотемпературной фазы, в которой все солитоны образуют замкнутые петли (пусть и содержащие маленькие разрывы), в фазу, в которой присутствуют солитоны бесконечной длины. Поскольку в этой фазе с увеличением расстояния между двумя точками число некоррелированных солитонов, их разделяющих, неограниченно растёт, а на каждом из них φ скачком меняется на π , поведение системы при $T > T_S$ будет характеризоваться экспоненциальным спаданием корреляционной функции $\langle \exp i(\varphi_{j+r} - \varphi_j) \rangle$.

В то же время присутствие солитонов не оказывает существенного влияния на поведение корреляционной функции $\langle \exp 2i(\varphi_{j+r} - \varphi_j) \rangle$, которая при $T > T_S$, так же как и при $T < T_S$, будет вести себя степенным образом, поскольку фазовый переход происходящий при $T = T_S$, не приводит к занулению модуля жёсткости. Таким образом, фазовый переход при $T = T_S$ можно трактовать как переход в нематическую фазу, в которой симметрия по отношению к повороту на угол π не является нарушенной. Интересно, что хотя этот фазовый переход связан с группой симметрии Z_2 , из-за отсутствия дальнего порядка по $\exp i\varphi_j$ не удаётся ввести явное выражение (в терминах φ_j) для параметра порядка, связанного с этим переходом.

Обращение в ноль при $T > T_S$ свободной энергии на единицу длины солитона означает, что линейный вклад во взаимодействие полувихрей экранируется, и возникает реальная возможность диссоциации пар полувихрей. Если считать, что наличие солитонов не приводит к какой-либо перенормировке затравочного логарифмического взаимодействия полувихрей, то их распаривание и фазовый переход в неупорядоченную фазу, в которой не только корреляционная функция $\langle \exp i(\varphi_{j+r} - \varphi_j) \rangle$, но и корреляционная функция $\langle \exp 2i(\varphi_{j+r} - \varphi_j) \rangle$ спадает экспоненциально, должны происходить при $T = T_{\text{HV}} \sim V_2/4$. Сравнение с оценкой $T_S \sim V_1$ показывает, что при уменьшении отношения V_1/V_2 в системе с неизбежностью должно происходить расщепление фазового перехода на два [212–214].

5.2 Дуальное и кулоновское представления

Для более строгого доказательства возможности существования промежуточной фазы нематической природы, отделённой от высокотемпературной неупорядоченной фазы фазовым переходом, относящимся к классу универсальности БКТ, рассмотрим взаимодействие $V(\theta)$, для которого весовой фактор $w(\theta) = \exp[-V(\theta)/T]$ имеет вид [213, 214]

$$w(\theta) = w_{\text{BV}}(\theta) + \exp(-K/T)w_{\text{BV}}(\theta - \pi), \quad (63)$$

где $w_{\text{BV}}(\theta)$ это весовой фактор (4), соответствующий взаимодействию Березинского-Виллэна. При $K \ll T \ll J$ определённые выше параметры V_1 и V_2 близки к K и J

$(V_1 \approx K, V_2 \approx J)$.

Применение дуального преобразования (см. раздел 1.1.6) позволяет трансформировать статсумму XY модели, определённой таким образом, в статсумму SOS модели, определённой гамильтонианом [212]

$$H_{\text{SOS}} = \sum_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \left[\frac{J_*}{2} (n_{\mathbf{R}} - n_{\mathbf{R}'})^2 - \frac{K_*}{2} s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'} \right], \quad (64)$$

где $J_* = T^2/J$, целочисленные переменные $n_{\mathbf{R}}$ определены в узлах \mathbf{R} дуальной решётки, $s_{\mathbf{R}} \equiv \exp i\pi n_{\mathbf{R}} = \pm 1$, а K и K_* связаны соотношением дуальности Крамерса-Ванье [88]

$$\sinh(K/T) \sinh(K_*/T) = 1,$$

так что условию $K \ll T \ll J$ соответствует $K_* \gg T \gg J_*$.

Из вида гамильтониана (64) легко понять, что энергия ступеней единичной высоты, $E_{\text{step}}^{(1)}$, равна $K_* + J_*/2$, тогда как энергия ступеней двойной высоты, $E_{\text{step}}^{(2)} = 2J_*$, может быть и меньше, чем $E_{\text{step}}^{(1)}$. При $K_* \rightarrow \infty$ величина $E_{\text{step}}^{(1)}$ стремится к бесконечности, так что все переменные $n_{\mathbf{R}}$ должны быть либо чётные, либо нечётные. Если при этом $J_* \ll T$, то система тем не менее будет находиться в шероховатом состоянии, в котором квадрат ширины поверхности расходится, а свободная энергия двойной ступени (на единицу длины) равна нулю.

При $K_* < \infty$ становится возможным образование доменных стенок, разделяющих эти два шероховатых "вакуума". Эти доменные стенки (они же ступени единичной высоты), обладают большой энергией на единицу длины, и, следовательно, при $K_* \ll T$ их свободная энергия должна быть конечна (энтропия может быть оценена сверху величиной порядка единицы). Это означает, что существуют лишь небольшие вкрапления одного из двух вакуумов в другом, и сохраняется асимметрия между чётными и нечётными значениями n , т.е. дальний порядок по переменной s [212].

Из результатов [56, 57] следует, что конечность свободной энергии простой ступени на языке исходной XY модели означает экспоненциальное спадание коррелятора $\langle \exp i(\varphi_{\mathbf{j}+\mathbf{r}} - \varphi_{\mathbf{j}}) \rangle$, а зануление свободной энергии двойной ступени - степенное спадание коррелятора $\langle \exp 2i(\varphi_{\mathbf{j}+\mathbf{r}} - \varphi_{\mathbf{j}}) \rangle$. Таким образом, мы получили ещё одно подтверждение того, что XY модель с взаимодействием (63) при $K \ll T \ll J$ находится в нематической фазе, описанной выше.

Однако, как в исходном представлении в терминах $\varphi_{\mathbf{j}}$, так и в дуальном представлении нематическая фаза представляет собой фазу, в которой флуктуации являются слабыми лишь для одного из двух возможных типов флуктуаций, тогда как наиболее убедительным доказательством её существования стало бы построение представления, в котором при выполнении условия $K \ll T \ll J$ все флуктуации были бы слабыми.

Для достижения этой цели оказывается удобным перейти в статсумме SOS модели от суммирования по переменным $n_{\mathbf{R}}$ к интегрированию, сохраняя при этом $s_{\mathbf{R}}$ в качестве независимых переменных. Для этого следует представить $n_{\mathbf{R}}$ в виде

$$n_{\mathbf{R}} = 2\tilde{n}_{\mathbf{R}} + \frac{1 - s_{\mathbf{R}}}{2},$$

где $\tilde{n}_{\mathbf{R}}$ также целое, и перейти от суммирования по $\tilde{n}_{\mathbf{R}}$ к интегрированию при помощи формулы суммирования Пуассона (22). Это приводит к статсумме [212],

$$Z_{CG} = \prod_{\mathbf{R}} \left(\sum_{m_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} \sum_{s_{\mathbf{R}}=\pm 1} \right) \exp \left[-\frac{1}{2T} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \frac{m_{\mathbf{R}_1}}{2} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \frac{m_{\mathbf{R}_2}}{2} + i\pi \sum_{\mathbf{R}} \frac{m_{\mathbf{R}}}{2} s_{\mathbf{R}} - \frac{K_*}{2T} \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'} \right], \quad (65)$$

которая наряду с суммированием по $s_{\mathbf{R}} = \pm 1$ включает в себя также и суммирование по целочисленным переменным $m_{\mathbf{R}}$, также определённым в узлах дуальной решётки, причём $G_0(\mathbf{R})$ имеет стандартный вид (8). Статсумма (65) может интерпретироваться как статсумма кулоновского газа, состоящего из целых и полуцелых зарядов $m_{\mathbf{R}}/2$, взаимодействующих с моделью Изинга. Понятно, что при $T \ll J, K_*$ все эти заряды связаны в пары, а изинговские переменные $s_{\mathbf{R}}$ упорядочены. Рассмотрим теперь, к каким последствиям приводит взаимодействие m и s .

При $J \rightarrow \infty$ (65) переходит в статсумму двумерной модели Изинга, точное решение которой было впервые найдено Онзагером [86]. Фазовый переход в этой модели происходит при $T = T_c = K_*/\ln(1 + \sqrt{2})$, что может быть показано из соображений дуальности [88].

При $J \gg T$ в (65) можно провести суммирование по $m_{\mathbf{R}}$, считая, что все заряды связаны в нейтральные пары, находящиеся далеко друг от друга, причём взаимное влияние пар проявляет себя только в перенормировке J . Результатом суммирования является появление дополнительного ферромагнитного взаимодействия переменных $s_{\mathbf{R}}$, спадающего на больших расстояниях как $R^{-\pi J/2T}$. Если полувихри связаны в пары, то $\pi J/2T \geq 4$, и, согласно [215], это дополнительное взаимодействие не может привести к изменению характера изинговского перехода.

При $K_* \rightarrow \infty$ (65) переходит в статсумму кулоновского газа, образованного зарядами $m_{\mathbf{R}}/2$, фазовый переход в котором связан с диссоциацией нейтральных пар зарядов минимальной величины $m_{\mathbf{R}}/2 = \pm 1/2$, т. е. полувихрей. При $K_* < \infty$ учёт флуктуаций s приводит к тому, что к затравочному взаимодействию полувихрей добавляется слагаемое $-T \ln \langle s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'} \rangle$. При больших K_* , когда $\langle s_{\mathbf{R}} \rangle \neq 0$, это приводит лишь к уменьшению химической активности полувихрей, а поправка к их взаимодействию спадает экспоненциально. При меньших K_* , когда $\langle s_{\mathbf{R}} \rangle$ зануляется, возникает взаимодействие, пропорциональное расстоянию между полувихрями, т.е. свободная энергия солитона (на единицу длины) становится конечной.

5.3 Структура фазовой диаграммы

Следующая из результатов этой главы фазовая диаграмма XY модели с модифицированным взаимодействием [212–214] схематически изображена на рис. 24 в переменных T/J и K/T . Через D обозначена неупорядоченная фаза, через S - низкотемпературная (сверхпроводящая) фаза и через I - промежуточная "нематическая" фаза, в которой сверхтекучая плотность также является конечной. Согласно [216, 217] в терминах сверхпроводящей решётки в этой фазе когерентным является движение не куперовских пар (поскольку парный коррелятор параметра порядка спадает экспоненциальным образом), а пар куперовских пар.

На линии ab происходит диссоциация пар обычных вихрей, на линии sc диссоциация пар полувихрей (оба перехода относятся к классу универсальности БКТ), а на линии bd - фазовый переход, связанный с солитонами. На участке cd это должен быть переход изинговского типа, а на участке bc при обращении в ноль свободной энергии солитона логарифмическое взаимодействие полувихрей оказывается недостаточно сильным для

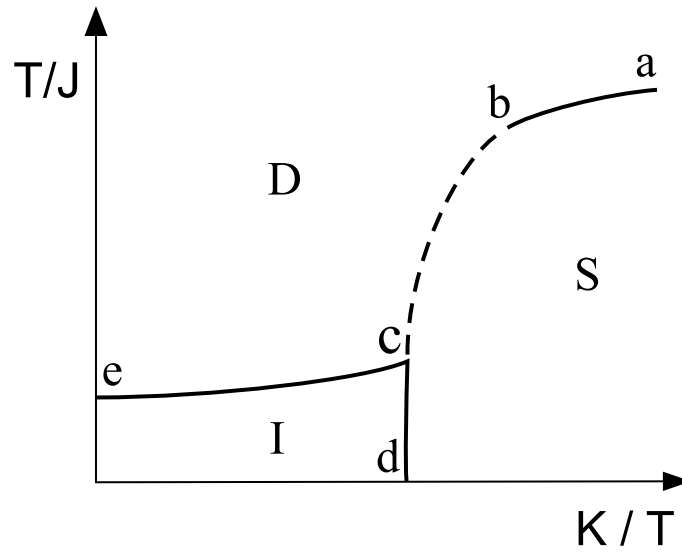


Рис. 24: Фазовая диаграмма XY модели с модифицированным взаимодействием, приводящим к возможности появления солитонов.

того, чтобы они были связаны в пары. Поэтому переход в этом случае должен происходить непосредственно в неупорядоченную фазу, однако иным, чем на линии ab , образом.

Можно ожидать, что это будет происходить при помощи перехода первого рода. Из результатов численного моделирования известно, что различные модификации взаимодействия в XY модели, ведущие к увеличению химической активности вихрей [218–221] (т.е. уменьшению энергии кора), или же непосредственное увеличение плотности двумерного кулоновского газа [222] приводят к превращению перехода БКТ в переход первого рода. К этому же выводу приводят попытки самосогласованного обобщения ренормгруппового подхода на область больших химических активностей [223–226].

В рассматриваемой нами модели уменьшение K приводит к возможности расщепления кора на два полувихря, связанных солитоном, который в свою очередь, может флуктуировать. Понятно, что это приводит к уменьшению эффективной свободной энергии кора и, соответственно, способствует изменению рода перехода на первый. Исходя из (18) и (62) можно ожидать, что на линии bc значение модуля жёсткости Γ в низкотемпературной фазе будет плавно меняться от $(2/\pi)T$ в точке b до $(8/\pi)T$ в точке c .

Фазовая диаграмма с аналогичной топологией возникает также при использовании обобщения рекурсивной процедуры Мигдала-Каданова [227, 228], основанного на ограничении числа параметров, описывающих взаимодействие [213]. Такая модификация этого метода (стандартная версия которого не замечает БКТ переход [44]) оказывается применима и для описания систем с $U(1)$ вырождением. Предложенная структура фазовой диаграммы также нашла своё подтверждение при численном моделировании [229].

Линия $K = 0$ соответствует переходу контактов в π -состояние. При пересечении этой линии происходит перестройка основных состояний. В случае квадратной решётки она состоит в относительном развороте переменных φ_j , относящихся к различным $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ подрешёткам, на π . Соответствующая такому развороту замена переменных позволяет убедиться, что вид статсуммы не зависит от знака K , поэтому полная фазовая диаграмма XY модели с модифицированным взаимодействием и квадратной решёткой будет зеркально симметрична относительно линии $K = 0$.

6 Двумерная сверхтекучая ферми-жидкость с p -спариванием

В приближении Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) минимум свободной энергии двумерной сверхтекучей ферми-жидкости с p -спариванием достигается сразу в двух различных фазах - аксиальной и планарной [230–232]. Выбор между ними определяется конкретными особенностями взаимодействия, которые проявляют себя в диаграммах следующего порядка малости по T_c/ϵ_F [233]. Экспериментальное исследование сверхтекучести и фазовых переходов в плёнках ^3He , толщина которых сравнима с длиной когерентности осуществлялось в [234–239], а переход в сверхтекучее состояние субатомной плёнки ^3He на поверхности тонкой плёнки ^4He был зарегистрирован в [240].

6.1 Аксиальная фаза

В аксиальной фазе параметр порядка имеет вид

$$A_{\alpha k} = \Delta d_{\alpha}(w_k^{(1)} + iw_k^{(2)}),$$

где Δ - действительное число, d_{α} - единичный вектор в спиновом (трёхмерном) пространстве, а $w_k^{(1)}$ и $w_k^{(2)}$ - взаимно перпендикулярные единичные вектора в орбитальном (двумерном) пространстве [231]. Положение векторов $w_k^{(1)}$ и $w_k^{(2)}$ удобно параметризовать при помощи фазы φ , выразив комбинацию $w_k^{(1)} + iw_k^{(2)}$ через какие-либо фиксированные орты w'_k и w''_k орбитального пространства

$$A_{\alpha k} = \Delta d_{\alpha}(w'_k + iw''_k) \exp i\varphi, \quad (66)$$

где $l = \hat{\mathbf{z}}[\mathbf{w}^{(1)} \times \mathbf{w}^{(2)}] = \pm 1$ это орбитальное число, а $\hat{\mathbf{z}}$ - нормаль к поверхности. Пространство вырождения параметра порядка (66) представляет собой $((S^2 \times S^1)/Z_2) \times Z_2$, где двумерная сфера S^2 есть область изменения \mathbf{d} , одномерная сфера S^1 - область изменения φ , а факторизация прямого произведения $S^2 \times S^1$ по группе Z_2 отражает тот факт, что пары переменных (\mathbf{d}, φ) и $(-\mathbf{d}, \varphi + \pi)$ соответствуют одному и тому же значению $A_{\alpha k}$. При учёте спин-орбитального (дипольного) взаимодействия, имеющего вид

$$E_{\text{dip}}^a = -\frac{g_{\text{dip}}^a}{2}(\mathbf{d}\hat{\mathbf{z}})^2 \quad (67)$$

это пространство вырождения сужается до $S^1 \times Z_2$.

Рассматривая лишь орбитальную часть параметра порядка аксиальной фазы, Стайн и Кросс [241] пришли к выводу о том, что в ней существует два вида топологических возбуждений - вихри, при обходе вокруг которых φ меняется на $\pm 2\pi$, и доменные стенки, разделяющие области с $l = \pm 1$, в соответствии с чем в системе должны происходить два фазовых перехода, относящиеся к классам универсальности БКТ и Изинга.

Халси [85] показал, что доменная стенка в аксиальной фазе характеризуется возможностью непрерывного распределения завихренности на ней. Иначе говоря, на доменной стенке могут образовываться не связанные в пары дробные вихри с произвольными топологическими зарядами. Из анализа, представленного в разделе 2.3, следует, что это должно привести к потере когерентности между флуктуациями фазы по обе стороны стенки при сколь угодно низкой температуре. Как уже обсуждалось в разделе 2.4, в

такой ситуации фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар должен происходить при заведомо более низкой температуре, чем фазовый переход изинговского типа, связанный с разупорядочением по орбитальному числу l .

Если принять во внимание возможность изменения и спиновой части параметра порядка (66), то в число текстур, являющихся локальными минимумами энергии, помимо вихрей и доменных стенок войдут также и солитоны - линейные объекты, внутри которых вектор \mathbf{d} меняет своё направление (проходя через максимум дипольной энергии), а фаза φ остаётся постоянной [233]. Солитон разделяет области с противоположно направленным вектором \mathbf{d} , что эквивалентно отличающимся на π значениям фазы φ . Толщина солитона порядка дипольной длины $\xi_{\text{dip}} = K_d/g_{\text{dip}}^a$, а характерная энергия (в пересчёте на длину, равную ширине) порядка K_d , где K_d это один из коэффициентов в выражении для градиентной энергии

$$E_{\text{grad}}^a = \frac{K_d}{2}(\nabla_k d_\alpha)^2 + \frac{K_\varphi}{2}(\nabla_k \varphi)^2.$$

Следует отметить, что солитоны не являются неустранимыми топологическими особенностями, поскольку они разделяют области значений параметра порядка, переводимых друг в друга непрерывным преобразованием. Поэтому, в отличие от доменных стенок, солитоны могут иметь точки окончания. Так же как в А-фазе трёхмерного ^3He [242] и в модифицированной ХУ модели, рассмотренной в предыдущей главе, солитон может оканчиваться на вихре с полувещным топологическим зарядом. Согласно результатам предыдущей главы это делает возможным сценарий, при котором фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар, расщепляется на два отдельных перехода, первый из которых (при $T = T_S \sim K_d$) связан с появлением солитонов (ведущих себя при низких температурах как доменные стенки изинговского типа), а второй (при $T = T_{\text{HF}} \sim K_\varphi/4$) с диссоциацией связанных пар полувихрей.

В приближении БКШ $K_d = K_\varphi$, что, на первый взгляд, не оставляет возможностей для реализации сценария с $T_S < T_{\text{HF}}$. Следует, однако, учесть, что флуктуации трёхмерного вектора \mathbf{d} могут привести к существенной перенормировке K_d [243] при переходе от масштабов порядка длины когерентности ξ к масштабам порядка ξ_{dip} , на которых эта перенормировка заканчивается (мы считаем что $\xi_{\text{dip}} \gg \xi$, как это и имеет место быть в сверхтекучем ^3He). В этом случае фазовый переход, связанный с обращением в нуль свободной энергии солитона, должен происходить при $T_S \sim K_d/\ln(\xi_{\text{dip}}/\xi)$ (ср. с [244]). Именно выполнение условия $\xi_{\text{dip}} \gg \xi$ позволяет надеяться, что этот фазовый переход произойдёт при температуре достаточно низкой для того, чтобы точки окончания солитонов были связаны (логарифмическим взаимодействием, пропорциональным K_φ) в пары малого размера [213].

Следует особо подчеркнуть, что эффективная величина спин-орбитального взаимодействия может быть уменьшена при помощи магнитного поля [245]. В двумерной аксиальной фазе, так же как и в её трёхмерном аналоге (т. е. А-фазе сверхтекучего ^3He), зависящая от ориентации параметра порядка часть свободной энергии, связанная с магнитным полем \mathbf{H} , может быть представлена в виде $E_{\text{magn}}^a = (\chi/2)(\mathbf{dH})^2$. Сравнение с (67) показывает что при $\mathbf{H} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ включение магнитного поля эквивалентно замене g_{dip}^a на $g_{\text{dip}}^{\text{eff}} = g_{\text{dip}}^a - \chi H^2$. При увеличении поля $g_{\text{dip}}^{\text{eff}}$ уменьшается и при $H = g_{\text{dip}}^a/\chi$ обращается в ноль. Соответствующим образом растёт и обращается в бесконечность ξ_{dip} , что даёт возможность понизить T_S насколько это необходимо.

При $T > T_S$ система оказывается в фазе, в которой парный коррелятор параметра порядка $A_{\text{ак}}$ спадает экспоненциальным образом, однако сверхтекучая плотность

остаётся конечной (поскольку флуктуации \mathbf{d} не ведут к перенормировке K_φ). В отсутствие спин-орбитального взаимодействия такая фаза существует при сколь угодно малых температурах. Из-за флуктуаций спиновой части параметра порядка в ней оказывается восстановленной симметрия по отношению к повороту фазы на π , поэтому дальнейшее разупорядочение будет проходить через диссоциацию пар полувихрей, а не вихрей. Как следствие, универсальное отношение сверхтекучей плотности к температуре при этом переходе, следующее из результатов [6], будет в четыре раза выше [233],

$$\frac{\rho_s(T_{\text{HV}})}{T_{\text{HV}}} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{2m_3}{\hbar} \right)^2, \quad (68)$$

чем в случае, если переход связан с диссоциацией пар обычных вихрей, как это предполагалось в [241].

Если вспомнить, что при ещё более высоких температурах происходит уже упомянутое разупорядочение по l , то можно заключить, что при наличии слабого спин-орбитального взаимодействия переход из аксиальной фазы в полностью разупорядоченное состояние состоит из трёх последовательных фазовых переходов (двух изинговских и перехода БКТ между ними [233]). При выполнении условия приближения слабой связи, $T_c \ll \epsilon_F$, все эти переходы должны происходить в малой окрестности T_c , температуры перехода в приближении БКШ, так как лишь при $(T_c - T)/T_c \sim T_c/\epsilon_F$ константы в выражении для градиентной энергии становятся порядка T .

Численное моделирование по методу Монте-Карло решёточной модели аксиальной фазы, не учитывающей дипольного взаимодействия, подтвердило [246], что в ней имеют место два фазовых перехода. При понижении температуры вначале происходит переход изинговского типа, видимый по расходимости теплоёмкости, а затем переход БКТ, связанный с появлением квазиупорядочения по $\exp 2i\varphi$.

6.2 Планарная фаза

Параметр порядка планарной фазы может быть представлен в виде

$$A_{\alpha k} = \Delta R_{\alpha k'} (\delta_{k'k} - \hat{z}_{k'} \hat{z}_k) e^{i\varphi}, \quad (69)$$

где $R_{\alpha k}$ - матрица трёхмерных вращений. Благодаря наличию проектирующего множителя $(\delta_{k'k} - \hat{z}_{k'} \hat{z}_k)$ индекс k пробегает фактически только два значения. Это проектирование приводит к тому, что одно и то же значение $A_{\alpha k}$ может быть двумя способами представлено в виде (69) с различными матрицами $R_{\alpha k}$ и фазами φ , отличающимися на π . В соответствии с этим пространство вырождения параметра порядка (69) имеет структуру $(SO(3) \times S^1)/Z_2$, где $SO(3)$ есть область изменения $R_{\alpha k}$, окружность S^1 - область изменения φ , а факторизация по Z_2 отражает неоднозначность, указанную выше.

Ситуация в планарной фазе оказывается совершенно аналогична ситуации в аксиальной фазе, описанной в предыдущем разделе (если отвлечься от наличия в аксиальной фазе дополнительной дискретной степени свободы). Градиентная энергия распадается на слагаемые, связанные с $R_{\alpha k}$ и φ . В отсутствие спин-орбитального взаимодействия не ренормируется в ноль лишь жёсткость, связанная с φ (сверхтекучая плотность). При этом парный коррелятор параметра порядка спадает экспоненциальным образом, однако остаётся конечной сверхтекучая плотность ρ_s . При уменьшении ρ_s до величины, определяемой соотношением (68), происходит связанный с диссоциацией полувихрей переход в полностью разупорядоченное состояние.

Дипольная энергия в планарной фазе зависит от матрицы трёхмерных вращений $R_{\alpha k}$, которую удобно параметризовать стандартным образом [247, 248] с помощью вектора \mathbf{n} , указывающего направление вращения и угла θ , на который производится поворот. Тогда выражение для дипольной энергии, следующее из общей формулы Леггета [249], принимает вид [233]

$$E_{\text{dip}}^{\text{pl}} = g_{\text{dip}}^{\text{pl}} \left\{ \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \left[(1 - \cos \theta) n_{\parallel}^2 + \frac{4}{3} \cos \theta \right]^2 \right\}, \quad (70)$$

где $\mathbf{n}_{\parallel} = \mathbf{n} - (\mathbf{n}\hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}$ - проекция \mathbf{n} на плоскость. Минимум (70) достигается при $\cos \theta = 0$ и $\mathbf{n} = \pm \hat{\mathbf{z}}$. Все значения $A_{\alpha k}$, минимизирующие (70), можно задать при помощи одной и той же матрицы $R_{\alpha k}$ (поворот на $\pi/2$ вокруг $\hat{\mathbf{z}}$) и различных значений фазы. Это означает, что пространство вырождения сужается до S^1 .

В планарной фазе, также как и в аксиальной, конечность дипольного взаимодействия приводит к существованию солитонов [233]. В этом случае внутри солитона меняет своё направление на противоположное вектор \mathbf{n} (что опять-таки эквивалентно повороту фазы на π). Если $\xi_{\text{dip}} \gg \xi$, то из-за неабелевости группы $SO(3)$ константа в градиентной энергии, ответственная за флуктуации $R_{\alpha k}$ (а, в конечном итоге, и за характерную энергию солитона) сильно перенормируется флуктуациями, аналогично тому, как это происходит в аксиальной фазе (соответствующие ренормгрупповые уравнения могут быть найдены в работах Азария и др. [250, 251], посвящённых изучению неколлинеарных антиферромагнетиков).

Вследствие этого в планарной фазе также реализуется ситуация, в рамках которой при повышении температуры первым происходит переход изинговского типа, связанный с обращением в ноль свободной энергии солитонов. Это переход в фазу с экспоненциальным спаданием корреляторов $A_{\alpha k}$, но с конечной сверхтекучей плотностью (при $g_{\text{dip}}^{\text{pl}} = 0$ область существования этой фазы простирается вплоть до нулевой температуры). При дальнейшем повышении температуры происходит второй фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар. Значение скачка сверхтекучей плотности при этом переходе даётся тем же выражением (68). По тем же причинам, что и в случае аксиальной фазы, оба фазовых перехода должны происходить при температурах, достаточно близких к температуре перехода в приближении БКШ.

В случае планарной фазы анизотропная часть магнитной энергии может быть представлена в виде $E_{\text{magn}}^{\text{pl}} = -(\chi/2)(H_{\alpha} R_{\alpha j} \hat{z}_j)^2$, при $\mathbf{H} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ сводящемуся к

$$E_{\text{magn}}^{\text{pl}} = -(\chi/2)H^2[\cos \theta - (1 - \cos \theta)n_{\parallel}^2]^2,$$

откуда видно, что и в этом случае энергия солитона уменьшается при приложении магнитного поля, что будет способствовать расщеплению фазового перехода, даже если оно и не имеет места в отсутствие поля.

7 XY модель со случайным сдвигом фазы

Как уже отмечалось в разделе 1.2.1, если число квантов потока на ячейку является целым, решётка джозефсоновских контактов может быть описана XY моделью без фрустрации. Это означает, что при таких условиях в гамильтониане

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} V(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}) \quad (71)$$

при помощи калибровочного преобразования могут быть одновременно обращены в ноль все переменные A_{ij} . Однако, подобное упрощение возможно только в том случае, если геометрическая структура решётки является идеально регулярной. Если же площади различных ячеек случайным образом отличаются друг от друга, оказывается невозможным обратить в ноль все переменные A_{ij} одновременно, даже если среднее число квантов потока на ячейку является целым. В такой ситуации переменные A_{ij} могут рассматриваться как замороженные (т.е. не флуктуирующие) случайные переменные, обладающие нулевым средним

$$\overline{A_{ij}} = 0. \quad (72)$$

В этом случае модель (71) принято называть XY моделью с геометрическим беспорядком (positional disorder [29]) или со случайным сдвигом фазы [252]. В (72) и далее усреднение по замороженному беспорядку (т.е. по распределению A_{ij}) обозначается чертой над выражением.

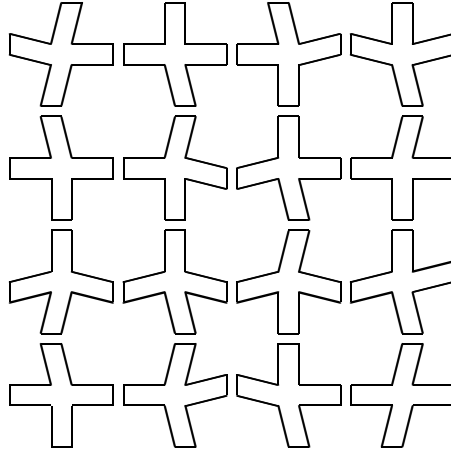


Рис. 25: Квадратная решётка, образованная случайным образом смещёнными джозефсоновскими контактами.

Если изменение площадей ячеек решётки происходит из-за смещения положений джозефсоновских контактов, в то время как положения узлов решётки остаются неизменными (как это показано на рис. 25), то случайные переменные A_{ij} можно считать не зависящими друг от друга. Если же флуктуируют положения узлов решётки [29, 253–255], то переменные A_{ij} характеризуются короткодействующими корреляциями, что однако не приводит к каким-либо качественным изменениям. По этой причине в дальнейшем для простоты переменные A_{ij} предполагаются независимыми. Аналитические расчёты обычно производятся в предположении, что распределение A_{ij} является

гауссовым и может быть охарактеризовано единственным параметром σ , определяющим его ширину:

$$\overline{A_{ij}^2} = \sigma. \quad (73)$$

Предел $\sigma \rightarrow \infty$ соответствует равномерному распределению A_{ij} . Такой вариант модели (71) известен под названием калибровочного стекла (gauge glass) [256].

Модель (71)-(73) с $V(\theta) = -J \cos \theta$ была впервые предложена Рубинштейном, Шрайманом и Нельсоном [28] для описания планарных магнетиков, в которых взаимодействие магнитных примесей происходит через немагнитные примеси (случайное взаимодействие Дзялошинского-Мория [30, 31]) и лишь позднее было выяснено [29], что эта же модель применима для описания решёток джозефсоновских контактов с геометрическим беспорядком в присутствии внешнего магнитного поля. Согласно [257], аналогичная модель применима для описания дислокационного плавления двумерного кристалла с замороженными неоднородностями плотности (т.е. примесными атомами).

В отличие от замороженных флуктуаций константы связи, которые при слабом беспорядке являются заведомо несущественными [28], а при сильном могут привести к изменению рода перехода на первый [258, 259], достаточно сильный геометрический беспорядок приводит к полному разрушению низкотемпературной упорядоченной фазы (см. ниже).

7.1 Случайный потенциал

В терминах вихрей наличие случайно распределённых фазовых сдвигов A_{ij} проявляет себя через возникновение случайного потенциала $v_{\mathbf{R}}$, зависящего от A_{ij} . При этом каждой переменной A_{ij} может быть сопоставлен замороженный вихревой диполь, а $v_{\mathbf{R}}$ представляет собой сумму потенциалов всех таких диполей, которые должны считаться не скоррелированными друг с другом. Поскольку в двумерии дипольный потенциал спадает как $1/R$, усреднённый по беспорядку квадрат $v_{\mathbf{R}}$ оказывается логарифмически расходящимся с размером системы [28].

В случае, если взаимодействие в (71) выбрано в виде взаимодействия Березинского-Виллена (см. раздел 1.1.3), величина $v_{\mathbf{R}}$ может быть найдена точно для любых значений A_{ij} . При этом статистическая сумма, соответствующая гамильтониану (71), переходит в статистическую сумму двумерного кулоновского газа, описываемого гамильтонианом

$$H_{CG} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} m_{\mathbf{R}_1} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) m_{\mathbf{R}_2} - \sum_{\mathbf{R}} v_{\mathbf{R}} m_{\mathbf{R}}, \quad (74)$$

где потенциал $v_{\mathbf{R}}$ является распределённой по Гауссу случайной величиной с нулевым средним, корреляции которой в различных узлах дуальной решётки зависят от расстояния между ними так же, как и затравочное взаимодействие вихрей [260]:

$$\overline{v_{\mathbf{R}}} = 0, \quad \overline{v_{\mathbf{R}_1} v_{\mathbf{R}_2}} = \sigma J G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad (75)$$

что означает логарифмическую расходимость коррелятора

$$U(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \equiv \overline{(v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2})^2} \quad (76)$$

при $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \rightarrow \infty$. Например, в случае квадратной решётки [261]

$$U(\mathbf{R}) \approx 4\pi\sigma J^2 \ln |\mathbf{R}|. \quad (77)$$

Это же соотношение справедливо и для непрерывной версии модели, возникающей при включении в (2) случайного векторного потенциала $A_\alpha(\mathbf{r})$ с $\overline{A_\alpha(\mathbf{r})A_\beta(\mathbf{r}')} = \sigma\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Входящая в правую часть (76) разность $v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2}$, представляет собой не что иное, как связанный с беспорядком вклад в энергию вихревой пары, состоящей из положительного вихря, расположенного в точке \mathbf{R}_1 и отрицательного вихря, расположенного в точке \mathbf{R}_2 . Подчеркнём, что наличие беспорядка не приводит к изменению вида функции $G_0(\mathbf{R})$, описывающей взаимодействие топологических зарядов $m_{\mathbf{R}}$.

7.2 Беспорядок и появление неспаренных вихрей

Фазовый переход в обычной XY модели связан с появлением свободных, т.е. не связанных в пары вихрей, возникающих вследствие тепловых флуктуаций. Рассмотрим теперь, не может ли распределённый по Гауссу случайный потенциал, параметры которого определяются соотношениями (75), так же приводить к появлению одиночных вихрей, даже если тепловые флуктуации отсутствуют.

Чтобы адекватным образом учесть логарифмическую расходимость различных величин, будем считать, что система имеет конечный линейный размер L . Это делает конечными как не связанную с беспорядком часть энергии вихря,

$$E_V(L) \approx \pi J \ln L, \quad (78)$$

так и ширину распределения,

$$\epsilon(L) \approx J\sqrt{2\pi\sigma \ln L}, \quad (79)$$

случайного вклада в эту энергию $v_{\mathbf{R}}$, зависящего от положения центра вихря \mathbf{R} .

Сравнение (78) с (79) показывает, что в пределе $L \rightarrow \infty$ типичное значение $v_{\mathbf{R}}$ становится пренебрежимо малым по сравнению с $E_V(L)$. Но это отнюдь не означает, что спонтанное рождение вихрей невозможно. Для того, чтобы проверить, является ли появление вихря энергетически выгодным, его собственная энергия $E_V(L)$ должна сравниваться не с типичным значением $v_{\mathbf{R}}$ для данного L , а с максимальным значением $v_{\mathbf{R}}$ для данной реализации случайного потенциала, т.е. с максимальным выигрышем в энергии $v_{\max} \equiv \max\{v_{\mathbf{R}}\}$, к которому может рождение вихря.

Простейшая оценка для этой величины может быть получена, если пренебречь корреляциями $v_{\mathbf{R}}$ в различных узлах дуальной решётки, т.е. предположить, что $N = L^2$ переменных $v_{\mathbf{R}}$ являются независимыми случайными величинами, которые характеризуются одним и тем же гауссовым распределением

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\epsilon^2}\right]$$

ширина которого определяется соотношением (79) и, следовательно, зависит от числа этих переменных. В этом приближении рассматриваемая система оказывается эквивалентна так называемой модели случайных энергий (random energy model) [263], а распределение v_{\max} может быть найдено точно:

$$P(v_{\max}) = Np(v_{\max}) \left[\int_{-\infty}^{v_{\max}} dV p(V) \right]^{N-1} \quad (80)$$

Дифференцирование логарифма $P(v_{\max})$ позволяет установить [262], что при $N \gg 1$ распределение (80) имеет максимум при

$$v_{\max} = v_{\max}^{(0)} \approx \sqrt{2 \ln N} \epsilon \quad (81)$$

и является сравнительно узким:

$$\frac{\sqrt{[v_{\max} - v_{\max}^{(0)}]^2}}{v_{\max}^{(0)}} \sim \frac{1}{2 \ln N},$$

вследствие чего среднее значение v_{\max} оказывается близко к $v_{\max}^{(0)}$.

Подстановка (79) в (81) показывает, что $\overline{v_{\max}}$ логарифмически расходится с размером системы [262]:

$$\overline{v_{\max}}(L) \approx J\sqrt{8\pi\sigma} \ln L$$

и, следовательно, средняя энергия вихря, появившегося в наиболее выгодном для этого месте решётки равна

$$E_{\min}(L) \equiv E_V(L) - \overline{v_{\max}}(L) \approx \pi J \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_0}}\right) \ln L,$$

где $\sigma_0 = \pi/8$. При $\sigma < \sigma_0$ доминирующую роль играет собственная энергия вихря и его создание требует (в пределе $L \rightarrow \infty$) бесконечной энергии. С другой стороны, при $\sigma > \sigma_0$ появление вихря в наиболее оптимальном для этого месте приводит к уменьшению энергии системы и, следовательно, спонтанное рождение вихрей [252, 262, 264] оказывается заведомо неизбежным. В [265] аналогичный подход применён для анализа возникновения дислокаций в двумерном кристалле, взаимодействующим со случайным потенциалом.

Учёт корреляций между значениями случайного потенциала в различных узлах приводит к уменьшению относительного разброса переменных $v_{\mathbf{R}}$, так что найденную выше оценку для $\overline{v_{\max}}(L)$ следует трактовать как оценку сверху. Это означает, что по крайней мере при $\sigma < \sigma_0$ система оказывается устойчива по отношению к вызванному беспорядком спонтанному рождению вихрей при нулевой температуре. Для того же, чтобы убедиться, что при достаточно большом σ такая неустойчивость действительно возникает, следует построить для v_{\max} оценку снизу, которая так же являлась бы логарифмической.

Один из способов получить такую оценку основан на разделении вкладов в $v_{\mathbf{R}}$ от разных масштабов [262]. Разобьём нашу систему, состоящую из $N = L^2$ узлов, на $M \gg 1$ равных частей и рассмотрим вклад в случайный потенциал, создаваемый внутри каждой из них воздействием со стороны остальных подсистем. Чтобы оценить этот вклад в случайный потенциал, заменим каждую из $M - 1$ подсистем (окружающих данную) на случайный диполь.

Ширина распределения этих случайных диполей будет в $\sqrt{N/M}$ раз больше, чем равная $\sigma^{1/2}$ ширина распределения "элементарных" случайных диполей, которые могут быть сопоставлены переменным A_{ij} . Однако, поскольку линейный размер каждой из подсистем в то же самое число раз превышает постоянную решётки, а дипольный потенциал в двумерии спадает как $1/R$, два фактора $\sqrt{N/M}$ в выражении для потенциала сокращают друг друга, и мы вновь возвращаемся к буквально той же самой задаче, в которой, однако, число узлов N оказалось заменено на число подсистем M .

Поэтому, если мы выберем подсистему, внутри которой значение случайного потенциала, создаваемого другими подсистемами, является максимальным, среднее значение этого потенциала будет определяться той же самой функцией $\overline{v_{\max}}(l)$ (где $l = \sqrt{M}$), которую мы, вообще говоря, и пытаемся найти. Однако при таком подходе у нас сохраняется возможность дальнейшей оптимизации положения вихря, теперь уже внутри

выбранной на предыдущем шаге подсистемы. Эта оптимизация может быть проведена при помощи применения той же самой процедуры, что приведёт к добавлению ещё одного слагаемого, равного $\overline{v_{\max}}(l)$, в выражение для потенциала. Понятно, что если полная система состоит из $N \gg M$ узлов, оказывается возможным повторить эту процедуру $\ln N / \ln M = \ln L / \ln l$ раз, что приводит к выбору узла с

$$v_{\mathbf{R}} \approx v_{\max}^{(1)}(L) = \frac{\ln L}{\ln l} \overline{v_{\max}}(l)$$

Таким образом, мы построили явный алгоритм выбора узла с достаточно большим значением случайного потенциала, которое оказалось логарифмически зависящим от размера системы. Поскольку этот алгоритм не позволяет определить узел с действительно наибольшим значением $v_{\mathbf{R}}$, построенная таким образом функция $v_{\max}^{(1)}(L)$ представляет собой оценку снизу для $\overline{v_{\max}}$. Логарифмическая зависимость этой оценки от L доказывает, что при $L \rightarrow \infty$ действительно выполняется зависимость $\overline{v_{\max}} \propto \ln L$ и, следовательно, существует критическое значение σ , при превышении которого происходит спонтанное рождение не связанных в пары вихрей [262].

Аргументация, основанная на сравнении различных вкладов в энергию вихря, не учитывает тепловых флуктуаций и непосредственно применима лишь в пределе нулевой температуры. При конечной температуре необходимо учитывать также и энтропийный вклад в свободную энергию вихря, который в случае однородной системы является логарифмическим (см. раздел 1.A.2). В случае рассматриваемой нами сейчас неоднородной системы энтропия одиночного вихря имеет вид

$$S_V(L) = -\ln \left[\sum_{\mathbf{R}} \exp \left(-\frac{v_{\max} - v_{\mathbf{R}}}{T} \right) \right] \quad (82)$$

Поскольку разность между значениями случайного потенциала в различных точках растёт с увеличением расстояния между ними, можно ожидать что результат суммирования в уравнении (82) будет определяться лишь некоторой окрестностью точки, в которой значение $v(\mathbf{R})$ максимально, т.е. равно v_{\max} , и, следовательно, $S_V(L)$ не будет содержать вклада, растущего как $\ln L$. Это означало бы, что критическое значение σ при малой температуре должно оставаться таким же, как и при $T = 0$.

7.3 Вихревые пары и перенормировка модуля жёсткости

Как показано в разделе 1.1.4, наличие связанных пар вихрей приводит к уменьшению эффективной жёсткости и, соответственно, уменьшению области существования фазы, в которой все вихри связаны в пары. Рассмотрим теперь, как этот механизм работает в присутствии случайного потенциала.

Из физического смысла выражения (14) для статвеса вихревой пары следует, что при наличии случайного потенциала оно может быть заменено на

$$W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = Y^2 \exp \left[-\frac{G(0) - G(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) - v_{\mathbf{R}_1} + v_{\mathbf{R}_2}}{T} \right], \quad (83)$$

где к собственной энергии вихревой пары добавлена энергия её взаимодействия с потенциалом. Усреднение (83) по флуктуациям случайного потенциала и подстановка результата в (16) показывают [28], что в этом случае поправка к модулю жёсткости, связанная с вихревыми парами, является сходящейся лишь при

$$\frac{2\pi J}{T} - \frac{2\pi\sigma J^2}{T^2} > 4, \quad (84)$$

т.е. в интервале температур

$$T_-(J, \sigma) < T < T_+(J, \sigma), \quad (85)$$

где

$$T_{\pm}(J, \sigma) = 2J\sigma_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}} \right) \quad (86)$$

и расходится при $T \rightarrow T_{\pm}(J, \sigma) \mp 0$. Эта же самая расходимость возникает и при использовании репличного формализма, состоящего в усреднении по беспорядку статистической суммы n идентичных реплик рассматриваемой системы, что в пределе $n \rightarrow 0$ оказывается эквивалентным усреднению свободной энергии [266–268]. В репличном представлении взаимодействие зарядов кулоновского газа $G_0^{ab}(\mathbf{R})$ зависит не только от расстояния между ними \mathbf{R} , но и от номеров реплик a и b , к которым они принадлежат [28],

$$G_0^{ab}(\mathbf{R}) = G_0(\mathbf{R}) \left(\delta^{ab} - \frac{\sigma J}{T} \right),$$

откуда видно, что комбинация, стоящая в левой части неравенства (84), есть не что иное, как предлогарифмический фактор в выражении для энергии нейтральной пары зарядов, принадлежащих к одной и той же реплике.

Из вида (85)-(86) следует, что не только повышение, но и понижение температуры должно приводить к подавлению модуля жёсткости, даже если беспорядок является слабым. Обнаружение этого обстоятельства, дополненное построенной на его основе модификацией костерлицевской ренормгруппы, привели Рубинстайна и соавторов [28] к выводу о том, что при сколь угодно слабом беспорядке в рассматриваемой системе должен происходить так называемый возвратный переход (reentrant transition) в неупорядоченное состояние. Это утверждение, однако, не нашло своего подтверждения ни при экспериментальном исследовании решёток джозефсоновских контактов с геометрическим беспорядком [253], ни при численном моделировании соответствующей XY модели [253–255]. Помимо этого, оно находится в противоречии с теоремой, доказанной Озеки и Нишимори [269] (см. раздел 7.4).

Попытка учёта поправок к Γ более высокого порядка по Y , чем рассмотренная в [28], продемонстрировала возникновение новой расходимости [261] в каждом следующем порядке разложения по Y^2 , которое, казалось бы, должно быть применимо в области существования упорядоченной фазы. Возникновение таких расходимостей особенно очевидно при применении репличного подхода, в рамках которого оно обусловлено существованием не только нейтральных пар, состоящих из одиночных зарядов (относящихся к одной и той же реплике), но и более сложных объектов - нейтральных пар, образованных многочастичными комплексами, состоящими из k штук связанных друг с другом зарядов одного знака, относящихся к различным репликам. Предлогарифмический фактор в выражении для энергии пары таких комплексов имеет вид [261, 270]

$$2\pi \left(\frac{J}{T} k - \frac{\sigma J^2}{T^2} k^2 \right),$$

откуда следует, что при любых значениях параметров все поправки к Γ , соответствующие достаточно большим k , являются расходящимися.

Наличие такого набора расходимостей означает [261], что область существования упорядоченной фазы либо вообще отсутствует (а её наблюдение в [253–255] должно

интерпретироваться как эффект, связанный с конечным размером системы), либо не может быть найдена при помощи метода предложенного в [28] и получившего своё дальнейшее развитие в [261, 270, 271]. Оказывается, что возникающие проблемы связаны с использованием формального разложения по степеням химической активности Y , тогда как более адекватным подходом является разложение по концентрации вихревых пар [260].

С физической точки зрения понятно, что простейшая поправка к взаимодействию вихрей в упорядоченной фазе (если таковая фаза вообще существует) представляет собой поправку от связанных вихревых пар и пропорциональна их плотности. При этом вклады от различных пар в эту поправку могут считаться не скоррелированными друг с другом.

При наличии случайного потенциала функция $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, определяющая, согласно (11), величину флуктуационной поправки к взаимодействию зарядов кулоновского газа, представляет собой неприводимую часть корреляционной функции зарядов этого газа [28, 260]

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle m_{\mathbf{R}_1} m_{\mathbf{R}_2} \rangle - \langle m_{\mathbf{R}_1} \rangle \langle m_{\mathbf{R}_2} \rangle. \quad (87)$$

В отсутствие беспорядка $\langle m_{\mathbf{R}} \rangle = 0$ и второе слагаемое в (87) исчезает. Выражение (87) может быть также представлено в виде второй производной от свободной энергии [260],

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial v_{\mathbf{R}_1} \partial v_{\mathbf{R}_2}}. \quad (88)$$

Подчеркнём, что соотношения (87) и (88) являются точными. Их вывод не требует каких-либо приближений или усреднения по беспорядку.

В наинизшем порядке по концентрации вихревых пар вклады в правую часть (88) от различных пар могут считаться не зависящими друг от друга. Следовательно, при вычислении $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ можно пренебречь взаимодействием между зарядами, принадлежащими к различным парам. В этом приближении статсумма кулоновского газа, находящегося в фазе, в которой все заряды образуют связанные пары, может быть представлена [260] в виде

$$Z_{CG} = \prod_{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)} [1 + W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + W(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)] \quad (89)$$

где $W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ имеет вид (83), а произведение берётся по всем парам узлов дуальной решётки.

Структура выражения (89) предполагает, что для каждой пары узлов $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ рассматриваются три возможных варианта: отсутствие вихревой пары, наличие вихря с топологическим зарядом $+1$ в точке \mathbf{R}_1 и вихря с противоположным зарядом в точке \mathbf{R}_2 , а также присутствие вихревой пары с обратной поляризацией. В статсумме (89) учтено как взаимодействие всех вихрей со случайным потенциалом, так и взаимодействие друг с другом вихрей, принадлежащих к одной и той же паре. Неучтённым оказывается лишь взаимодействие вихрей, относящихся к различным парам.

Подстановка $F_{CG} = -T \ln Z_{CG}$ в (88) и дифференцирование по $v_{\mathbf{R}_1}$ и $v_{\mathbf{R}_2}$ позволяют (при $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$) представить $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ в виде

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = -2W_*(\mathbf{R}, v) \quad (90)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, $v = v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2}$,

$$W_*(\mathbf{R}, v) = -\frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{W(\mathbf{R}, v) - W(\mathbf{R}, -v)}{1 + W(\mathbf{R}, v) + W(\mathbf{R}, -v)} \right], \quad (91)$$

а $W(\mathbf{R}, v)$ имеет вид (83). В то же время вид $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ при $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ следует из соотношения

$$\sum_{\mathbf{R}_2} \Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 0,$$

обусловленного тем, что все вихри связаны в нейтральные пары. Входящая в (90)-(91) случайная переменная $v \equiv v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2}$ характеризуется гауссовым распределением, ширина которого определяется соотношением (77) и зависит только от разности $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, но не от \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 по отдельности.

Подстановка (90) в (11) показывает, что при наличии случайного потенциала в выражении (16) для поправки к модулю жёсткости $W(\mathbf{R})$ следует заменить на $\overline{W_*(\mathbf{R}, v)}$:

$$\delta\Gamma = -\frac{2\pi^2\Gamma^2}{T} \sum_{\mathbf{R}} R^2 \overline{W_*(\mathbf{R}, v)} \quad (92)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ результат усреднения $W_*(\mathbf{R}, v)$ по беспорядку характеризуется степенным поведением [260]:

$$\overline{W_*(\mathbf{R}, v)} \approx B(T)R^{-K(T)} \quad (93)$$

однако температурная зависимость параметров в (93) оказывается существенно различной при $T > T_*(J, \sigma) \equiv 2J\sigma$

$$B(T) = \frac{2}{T}, \quad K(T) = 2\pi \left(\frac{J}{T} - \frac{\sigma J^2}{T^2} \right) \quad (94)$$

и при $T < T_*(J, \sigma)$:

$$B(T) = \frac{\pi T/T_*}{\sin(\pi T/T_*)} \frac{1}{\pi J \sqrt{2\sigma \ln R}}, \quad K(T) = \frac{\pi}{2\sigma}. \quad (95)$$

Зависимости, описываемые уравнениями (94), совпадают с найденными Рубинштейном и др. [28]. В терминах описанного выше подхода приближение, использованное в [28], соответствует замене знаменателя в правой части (91) на единицу. Как показывает более последовательный анализ, подобный подход оказывается оправданным лишь при $T > T_*$, тогда как при $T < T_*$ необходим учёт полного вида знаменателя. Интересно, что попытка разложения

$$\frac{1}{1 + W(\mathbf{R}, v) + W(\mathbf{R}, -v)}$$

в ряд по степеням $W(\mathbf{R}, v) + W(\mathbf{R}, -v)$, т.е. по степеням Y^2 , приводит к воспроизведению всего набора расходимостей, обнаруженных в [261] и [270]. Таким образом, использование разложения по концентрации вихревых пар представляет собой способ эффективного суммирования этого набора расходимостей.

7.4 Структура фазовой диаграммы

Подстановка (93)-(95) в (91) показывает, что при $T > T_*(J, \sigma)$ поправка к модулю жёсткости становится расходящейся при $T = T_+(J, \sigma) = 2J\sigma_0(1 + \sqrt{1 - \sigma/\sigma_0})$ (т.е. на линии CD на рис. 26), тогда как при более низких температурах [$T < T_*(J, \sigma)$] область сходимости ограничена линией $\sigma = \sigma_0 = \pi/8$ (линия AC на рис. 26), параллельной оси температур [252, 260].

Это определяет область стабильности упорядоченной фазы в пределе нулевой химической активности (что соответствует стремящейся к бесконечности энергии кора). Если энергия кора конечна (либо равна нулю) следует учесть эффекты ренормировки, что приводит к уменьшению области стабильности упорядоченной фазы. Поскольку в рассматриваемом здесь приближении перенормируется только модуль жёсткости, а параметр σ , характеризующий беспорядок, остаётся без изменений [260], положение низкотемпературной части линии фазовых переходов ($\sigma = \sigma_0$) должно остаться тем же, тогда как искривлённая часть этой же линии (CD) сдвинется в область более низких температур (BE).

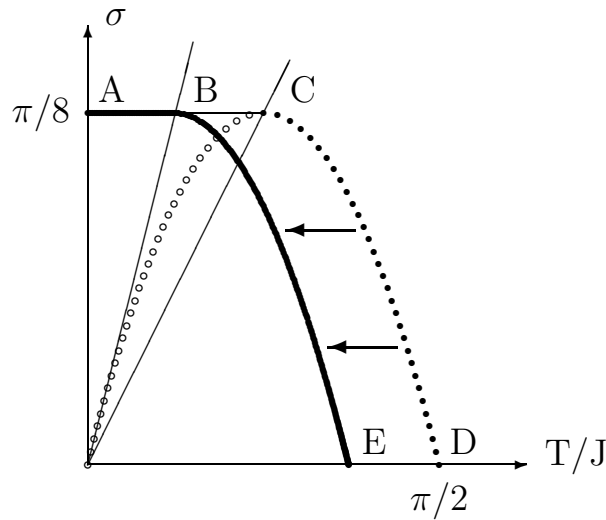


Рис. 26: В пределе нулевой химической активности область стабильности упорядоченной фазы расположена под линией $ABCD$. Эффекты ренормировки приводят к сдвигу искривлённой части линии фазового перехода в область более низких температур.

Напомним, что рассмотрение возможности появления одиночных вихрей (см. раздел 7.2) также приводит к выводу о том, что при низких температурах σ_c (критическое значение σ) не зависит от температуры. Более того, значения σ_c , полученные двумя методами, совпадают друг с другом. В то же время, учёт в ренормгрупповых уравнениях дополнительных слагаемых приводит к заключению [264, 272], что при $T < T_*$ величина σ является перенормируемой, что, в свою очередь, должно привести к некоторой зависимости σ_c от температуры и в области низких температур. Такой вывод, однако, находится в противоречии с результатами теоремы, доказанной Озеки и Нишимори [269]. Поскольку согласно этой теореме линия фазовых переходов (если таковая вообще существует) при $T < J\sigma$ должна быть параллельна оси температур, на рис. 26 показано, что эффекты, связанные с ренормировкой, приводят к сдвигу сингулярной точки, разделяющей линию фазовых переходов на две части, из точки C в точку B, где линия $\sigma = \sigma_0$ пересекает линию $T = J\sigma$.

Поскольку правая часть линии фазовых переходов (сегмент BE на рис. 26) соответствует значениям параметров, при которых знаменатель в (91) несущественен, для описания критического поведения на этой линии могут использоваться [252, 264, 272] ренормгрупповые уравнения, выведенные в [28]. Они не приводят к изменению критического поведения по сравнению с чистым случаем ($\sigma = 0$), однако значение скачка Γ

в точке перехода становится неуниверсальным.

В работах Карпентье и Лё Дуссала [273, 274] было показано, что описание фазового перехода на линии АВ в терминах перенормировки конечного числа параметров (например, σ и Γ) не является достаточно адекватным, поскольку не ухватывает весьма нетривиальную перенормировку функции распределения энергии кора вихрей, которая оказывается негауссовой. Явный учёт такой перенормировки позволил этим авторам продемонстрировать [274], что при $T = 0$ фазовый переход происходит при значении σ ($\sigma = \sigma_0 = \pi/8$), следующем из простых оценок не учитывающих каких-либо перенормировок (см. раздел 7.2), однако обобщение этого результата на $T > 0$ остаётся предметом дальнейших исследований. При этом данные численных экспериментов Манкурта и Гремпеля [275] свидетельствуют, что в широком интервале температур $0.392 < \sigma_c(T) < 0.393$, т. е. сдвиг σ_c относительно $\sigma_0 = \pi/8 \approx 0.3927$ если и существует, то является чрезвычайно малым.

Интересно, что если среднее число квантов потока на ячейку является *полуцелым*, то сколь угодно слабый геометрический беспорядок приводит к разрушению упорядочения по киральностям [276]. Влияние такого беспорядка оказывается аналогично влиянию случайного поля в двумерной модели Изинга, которое, как известно [277–280], приводит к разрушению упорядочения при сколь угодно малой его амплитуде.

8 Слоистый сверхпроводник

В трёхмерных системах с непрерывным вырождением, соответствующим группе $U(1)$, топологическими особенностями, при обходе которых фаза меняется на 2π , не являются точечными, а представляют собой вихревые линии [281–283]. При низких температурах все такие линии, возникающие как следствие тепловых флуктуаций, образуют замкнутые петли. Фазовый переход, связанный с разрушением дальнего порядка по фазе, обусловлен спонтанным появлением не замкнутых, т.е. бесконечных вихревых линий.

В 1988 г. Фридель [32] обратил внимание на то, что в слоистых системах энергия межслойных вихревых петель уменьшается с ослаблением связи между слоями и пришёл к выводу о возможности расщепления фазового перехода на два таким образом, что при повышении температуры вначале (при $T = T_{\perp}$) теряется когерентность между слоями (как следствие появления бесконечных межслойных вихревых линий), и лишь при $T = T_{\parallel} > T_{\perp}$ - внутри каждого из слоёв.

Поскольку анализ фазового перехода в терминах ренормировки взаимодействия вихревых петель [284–286] не позволяет адекватным образом описать фазовый переход даже в изотропном случае, в первом разделе этой главы предложен альтернативный метод исследования слоистой системы, основанный на представлении её статсуммы в виде статсуммы слоистого кулоновского газа. Этот метод позволяет не только качественный, но и количественный анализ обоих фазовых переходов, предположительно возможных в системе, и приводит к выводу, что они должны происходить одновременно, а существование промежуточной фазы с отсутствием когерентности между слоями невозможно.

Анализ производится в терминах решёточной модели слоистого сверхпроводника, в которой принимаются во внимание лишь фазовые флуктуации, однако явным образом учитывается магнитное взаимодействие токов, приводящее к экранировке взаимодействия вихревых линий. Полученные выводы справедливы при произвольном соотношении между энергией конденсации и магнитной энергией. Гамильтониан планарного магнетика воспроизводится в пределе бесконечной глубины экранировки. Применимость аналогичного гамильтониана для описания некоторых биологических объектов обсуждается в [287], а для плавления слоистых кристаллов в [288].

При наличии внешнего магнитного поля, направленного параллельно слоям, потеря когерентности между слоями сверхпроводника могла бы происходить при плавлении вихревой решётки, образованной этим полем. Флуктуации вихрей в такой решётке могут быть описаны при помощи модели, также допускающей редукцию к слоистому кулоновскому газу, что позволяет получить для температуры гипотетического фазового перехода, связанного с потерей когерентности между слоями, оценку, исключающую возможность его независимого существования. В заключительном разделе показано, что приводящий к тем же выводам переход к слоистому кулоновскому газу может быть произведен и в режиме сильного магнитного поля, когда коры соседних вихрей сильно перекрываются, что делает невозможным обсуждение флуктуаций в терминах смещений вихрей и заставляет вернуться к описанию системы в терминах флуктуаций фазы.

Особый интерес результаты этой главы представляют в связи с интенсивным экспериментальным исследованием высокотемпературных сверхпроводников. Напомним, что соединения висмутовой группы являются слоистыми материалами сами по себе, а соединения иттриевой группы, хотя и не обладают настолько сильной анизотропией, чтобы считаться слоистыми [289], позволяют изготовление сверхрешёток из микроскопически тонких (2-4 постоянных решётки) слоёв сверхпроводящего $YBa_2Cu_3O_7$,

разделенных слоями изолятора с той же структурой, $\text{PrBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ [290–292].

8.1 В отсутствие внешнего магнитного поля

Рассмотрим анизотропную версию решёточной модели слоистого сверхпроводника [282, 283], задаваемую гамильтонианом

$$H_{\text{LS}}\{\varphi, A\} = \sum_{\mathbf{j}, \alpha} \left[-J_\alpha \cos(\nabla_\alpha \varphi - A_\alpha) + \frac{D}{2} (\nabla \times A)_\alpha^2 \right], \quad (96)$$

где фазовые переменные $\varphi \equiv \varphi_{\mathbf{j}}$ определены в узлах \mathbf{j} простой кубической решётки с периодом d , тогда как определённые на связях переменные

$$A_\alpha \equiv A_\alpha(\mathbf{j}) = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}^{\mathbf{r}_{\mathbf{j}+\mathbf{e}_\alpha}} d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

описывают флуктуирующее магнитное поле и выражены через его векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Второе слагаемое в (96) соответствует энергии магнитного поля, а

$$D = \frac{\phi_0^2 d}{16\pi^3}.$$

где $\phi_0 = hc/2e$ это квант потока.

В уравнении (96) использовано обозначение $\nabla_\alpha \varphi \equiv \varphi_{\mathbf{j}+\mathbf{e}_\alpha} - \varphi_{\mathbf{j}}$ для решёточной разности и

$$(\nabla \times A)_\alpha \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta A_\gamma \quad (97)$$

для решёточного ротора. Правая часть уравнения (97) представляет собой направленную сумму переменных A_α по периметру квадратного плакета, так что переменная $(\nabla \times A)_\alpha$ может считаться определённой на связи дуальной решётки, пересекающей этот плакет. В случае слоистой системы константу связи J_α можно считать принимающей два различных значения: для связей внутри слоя ($\alpha = x, y$) $J_\alpha = J_\parallel$, тогда как для связей между слоями ($\alpha = z$) $J_\alpha = J_\perp \ll J_\parallel$.

После замены в статсумме, соответствующей гамильтониану (96), косинусоидального взаимодействия на взаимодействие Березинского-Виллэна (см. раздел 1.1.3) выполнение гауссова интегрирования по переменным $\varphi_{\mathbf{j}}$ позволяет преобразовать её в статсумму вихревых петель, энергия которых описывается гамильтонианом

$$H_{\text{VL}}\{p\} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} (\nabla \times p)_\alpha(\mathbf{R}_1) U_\alpha(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) (\nabla \times p)_\alpha(\mathbf{R}_2), \quad (98)$$

где $p \equiv p_{\mathbf{j}}$ - целочисленные переменные, определённые на связях исходной решётки. Целочисленные же переменные $(\nabla \times p)_\alpha(\mathbf{R})$, определённые на связях дуальной решётки при этом играют роль топологических зарядов вихревых петель, сохранение которых обеспечивается выполнением условия

$$\sum_{\alpha=x,y,z} \nabla_\alpha (\nabla \times p)_\alpha = 0.$$

Аналогичное представление статсуммы для изотропной системы было впервые выведено Томасом и Стоуном [282]. В случае анизотропной (слоистой) системы Фурье-образ

взаимодействия вихревых линий имеет вид [293]:

$$U_{\parallel}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2}{D^{-1} + J_{\perp}^{-1}k_{\parallel}^2 + J_{\parallel}^{-1}k_{\perp}^2}, \quad (99a)$$

$$U_{\perp}(\mathbf{q}) = \frac{D^{-1} + J_{\perp}^{-1}k^2}{D^{-1} + J_{\parallel}^{-1}k^2} U_{\parallel}(\mathbf{q}), \quad (99b)$$

где $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2$; $k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2$; $k_{\alpha}^2 = 2(1 - \cos q_{\alpha})$ (подробный вывод для может быть найден в [294]). Из вида выражения (99a) следует, что при $J_{\perp} \rightarrow 0$ взаимодействие и собственная энергия межслойных вихревых петель стремятся к нулю, что и привело Фриделя [32] к выводу о возможности существования отдельного фазового перехода, связанного с появлением разомкнутых межслойных петель.

Для более адекватного анализа подсистемы межслойных вихревых линий (что соответствует случаю $p_{\parallel} \equiv 0$) удобно произвести преобразование от переменных p_{\perp} к целочисленным же переменным n , возникающим при замене в статсумме, соответствующей гамильтониану (98), суммирования по $p_{\perp j}$ на интегрирование при помощи формулы суммирования Пуассона (22):

$$\begin{aligned} Z_{\text{VL}} &= \prod_{\mathbf{j}} \left(\sum_{p_{\perp j}=-\infty}^{\infty} \right) \exp \left[-\frac{H_{\text{VL}}\{p\}}{T} \right] \\ &\Rightarrow \prod_{\mathbf{j}} \left(\sum_{n_{\mathbf{j}}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\perp j} \right) \exp \left[-2\pi i \sum_{\mathbf{j}} p_{\perp j} n_{\mathbf{j}} - \frac{H_{\text{VL}}\{p\}}{T} \right], \end{aligned} \quad (100)$$

что позволяет выполнить гауссово интегрирование по переменным $p_{\perp j}$, переводящее выражение (100) в статсумму слоистого кулоновского газа

$$Z_{\text{LCG}} = \prod_{\mathbf{j}} \left(\sum_{n_{\mathbf{j}}=-\infty}^{\infty} \right) \exp \left[-\frac{T}{2J_{\perp}} \sum_{\mathbf{j}} n_{\mathbf{j}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2} n_{\mathbf{j}_1} G_0(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) n_{\mathbf{j}_2} \right] \quad (101)$$

с химической активностью $Y = \exp(-T/2J_{\perp})$ и безразмерным взаимодействием $G_0(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2)$, Фурье-образ которого имеет вид

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 T}{k_{\parallel}^2 U_{\parallel}(\mathbf{q})} - \frac{T}{J_{\perp}} = \frac{T k_{\perp}^2}{J_{\parallel} k_{\parallel}^2} + \frac{T}{D k_{\parallel}^2}. \quad (102)$$

Форма выражения (102) соответствует наличию двумерного кулоновского (т. е. логарифмического) взаимодействия между зарядами $n_{\mathbf{j}}$ как в том случае, когда они расположены в одном и том же слое, так и в том случае, когда они расположены в соседних слоях (но уже с иным коэффициентом перед логарифмом). Ренормгрупповые уравнения для такого слоистого кулоновского газа оказываются весьма близкими к аналогичным уравнениям для обычного двумерного кулоновского газа (см. раздел 1.1.5), и позволяют сделать вывод о том, что фазовый переход должен происходить тогда, когда предлогарифмический фактор во взаимодействии относящихся к одному слою зарядов равен 4. Для T_{\perp} , температуры фазового перехода, связанного с потерей межслойной когерентности, это даёт [293]

$$\left(\frac{2}{J_{\parallel}} + \frac{1}{D} \right) \frac{T_{\perp}}{2\pi} - 4 \propto \exp \left(-\frac{T_{\perp}}{J_{\perp}} \right). \quad (103)$$

Правая часть (103) описывает перенормировку T_{\perp} вследствие конечной химической активности зарядов слоистого кулоновского газа.

Из вида уравнения (103) следует, что при уменьшении J_{\perp} температура перехода T_{\perp} уменьшается, но при $J_{\perp} \rightarrow 0$ стремится к конечному пределу

$$T_{\perp}^{\min} = \frac{8\pi J_{\parallel} D}{2D + J_{\parallel}} \sim 4\pi \min[J_{\parallel}, 2D]. \quad (104)$$

T_{\perp}^{\min} представляет собой не что иное, как температуру, при которой слабая связь между слоями перестаёт быть растущим при ренормировке возмущением [157].

Существование неравенства $T_{\perp} > T_{\perp}^{\min} > 0$ доказывает несправедливость вывода Фриделя [32] о том, что при $J_{\perp} \rightarrow 0$ происходит неограниченное падение T_{\perp} , но, тем не менее, не исключает возможности разрушения сверхпроводимости через два последовательных фазовых перехода, один из которых связан с потерей когерентности между слоями. Для проверки возможности реализации подобного сценария следует сравнить T_{\perp} с T_{\parallel} , температурой фазового перехода в слоистой системе в отсутствие непосредственной связи между слоями (т.е. вычисленной в предположении, что J_{\perp} перенормировалось в ноль).

При $J_{\perp} = 0$ гамильтониан (98) становится не зависящим от $(\nabla \times p)_{\parallel}$, что позволяет рассматривать $m_{\mathbf{R}} \equiv (\nabla \times p)_{\perp}$ в качестве независимых целочисленных переменных. Переменные $m_{\mathbf{R}}$ представляют собой топологические заряды двумерных вихрей (pancake vortices) в том или ином слое. Из (99b) следует, что при $J_{\perp} = 0$ их взаимодействие имеет вид

$$U_{\perp}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 k^2}{(D^{-1} + J_{\parallel}^{-1} k^2) k_{\parallel}^2}$$

и оказывается логарифмическим (по расстоянию вдоль слоёв) как для вихрей в одном и том же слое, так и для вихрей в различных слоях. Это означает, что в пределе $J_{\parallel} \rightarrow 0$ переменные $m_{\mathbf{R}}$ так же образуют слоистый кулоновский газ. Следует особо подчеркнуть, что в случае одиночного слоя магнитное взаимодействие токов приводит к экранировке логарифмического взаимодействия вихрей [36, 65], тогда как в слоистой системе с $J_{\perp} = 0$ перенормируется лишь коэффициент перед логарифмом [293, 295–298].

Так же, как и в предыдущем случае, фазовый переход в полученном слоистом кулоновском газе описывается ренормгрупповыми уравнениями, аналогичными уравнениям Костерлица [5], и происходит тогда, когда обезразмеренный предлогарифмический фактор во взаимодействии находящихся в одном слое вихрей равен 4. Это позволяет заключить, что $T_{\parallel} < T_{\parallel}^{\max}$, где [293]

$$T_{\parallel}^{\max} = \lim_{q_{\parallel}^2 \rightarrow 0} \left[\frac{q_{\parallel}^2}{8\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{dq_z}{2\pi} U_{\perp}^{(0)}(\mathbf{q}) \right] = \frac{2\pi J_{\parallel} D}{J_{\parallel} + 4D + \sqrt{J_{\parallel}(J_{\parallel} + 4D)}} \sim \frac{\pi}{2} \min(J_{\parallel}, 2D), \quad (105)$$

Отличие T_{\parallel} от T_{\parallel}^{\max} обусловлено влиянием перенормировок, связанных с конечностью энергии кора вихрей.

Сравнение (104) и (105) показывает, что при любом соотношении между J_{\parallel} и D отношение $T_{\perp}^{\min}/T_{\parallel}^{\max}$ лежит в интервале $8 \leq T_{\perp}^{\min}/T_{\parallel}^{\max} < 9.66$. Таким образом, вычисления, основанные на предположении $T_{\perp} < T_{\parallel}$, приводят к $T_{\perp} > 8T_{\parallel}$, что позволяет сделать вывод о невозможности потери когерентности между слоями при $T_{\perp} < T_{\parallel}$. Соответственно, в системе происходит лишь один фазовый переход, температура которого T_c лежит в интервале $T_{\parallel} < T_c < T_{\perp}$. При $J_{\perp} \ll T_{\perp}$ отличие T_c от T_{\perp} экспоненциально

мало [293]. Более подробно зависимость T_c от соотношения между J_{\perp} и энергией кора вихрей в слоях проанализирована в работах Хоровица [299–301].

В работе О’Херна и др. [287] было показано, что реализация сценария с $T_{\perp} < T_{\parallel}$ возможна при наличии перекрестного взаимодействия градиентов фазы в удалённых друг от друга слоях, однако никаких физических причин для существования такого взаимодействия пока не выявлено. Таким образом, результаты [287] представляют собой ещё одно подтверждение выводов этого раздела. В [302] показано, что потеря когерентности в перпендикулярном слоем направлении возможна в неупорядоченной системе, в которой в каждом из слоёв J_{\parallel} с достаточно большой вероятностью обращается в ноль.

8.2 В параллельном слоем магнитном поле

При добавлении внешнего магнитного поля, направленного параллельно слоем, в слоем сверхпроводнике образуется вихревой кристалл, смещения вихревых линий в котором в широком интервале параметров могут считаться строго одноосными [303]. Иначе говоря, вихревые линии могут свободно изгибаться между слоями, но образованием перегибов, переводящих их из слоя в слой, можно пренебречь, поскольку такие перегибы связаны в нейтральные пары малого размера [304].

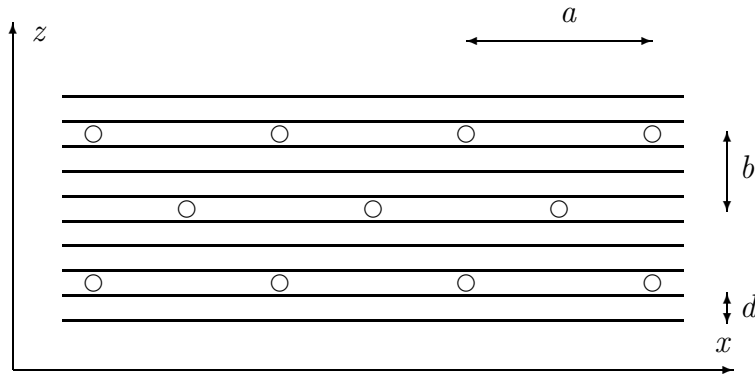


Рис. 27: Схематическое изображение треугольной вихревой решётки, изучаемой в разделе 8.2. Магнитное поле приложено в направлении оси y , которая перпендикулярна плоскости рисунка

Чакраварти, Ивлев и Овчинников [304] предположили, что плавление подобного вихревого кристалла может происходить при достаточно низких температурах, когда предположение об его одноосности является самосогласованным. Нетрудно понять, что в терминах сверхпроводника потеря когерентности между смещениями вихрей в различных слоях соответствует потере когерентности между слоями сверхпроводника, разделёнными слоями вихрей (см. рис. 27), т.е. разрушению сверхпроводимости в перпендикулярном слоем направлении. Настоящий раздел посвящён количественному анализу такого сценария возникновения промежуточной фазы.

В простейшем приближении малые флуктуации в одноосном вихревом кристалле, изображённом на рис. 27, могут быть описаны квадратичным гамильтонианом

$$H_{\text{VC}}^{(0)} = \iiint dx dy dz \left[\frac{\mu_x}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu_y}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu_z}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (106)$$

содержащим три бездисперсионных упругих модуля: модуль сжатия μ_x , модуль наклона μ_y и модуль сдвига μ_z .

Как и в случае обычного кристалла, дефектами структуры такого вихревого кристалла являются дислокации. При низких температурах все дислокации, возникающие вследствие тепловых флуктуаций, образуют замкнутые петли. Условие непрерывности вихревых линий и ограничения на направление их смещения проявляют себя в том, что все дислокационные петли должны быть ориентированы параллельно слоям.

Возможность образования таких дислокационных петель может быть учтена заменой последнего слагаемого в (106) на периодическое обобщение его дискретной версии:

$$H_{\text{VC}} = \iint dx dy \left\{ \int dz \left[\frac{\mu_x}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu_y}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \sum_{z=bn} \tilde{\mu}_z \cos \frac{2\pi}{a} [u(z+b) - u(z)] \right\} \quad (107)$$

где $\tilde{\mu}_z = (a^2/4\pi^2 b)\mu_z$.

Разложение статистической суммы

$$Z = \int D\{u\} \exp[-H_{\text{VC}}\{u\}/T]$$

в ряд по степеням $\tilde{\mu}_z/T$ воспроизводит статистическую сумму слоистого кулоновского газа (101) с химической активностью $Y = \tilde{\mu}_z/2T$ и безразмерным взаимодействием

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 (2 - 2 \cos bq_z) T}{a^2 K_{\parallel}(\mathbf{q})}, \quad (108)$$

где

$$K_{\parallel}(\mathbf{q}) = \mu_x q_x^2 + \mu_y q_y^2$$

это связанная с квадратичной частью гамильтониана (107) часть пропагатора, описывающего малые флуктуации u .

Форма (108), так же, как и в случае взаимодействия (102), соответствует наличию логарифмического взаимодействия как зарядов в одном и том же слое, так и в соседних слоях. Использование тех же самых ренормгрупповых уравнений, что и при выводе (103), позволяет найти, что при $\mu_z^2 \ll \mu_x \mu_y$ зависимость T_{\perp} , температуры фазового перехода, связанного с появлением бесконечных дислокационных петель (и потерей межслойной когерентности), от μ_z имеет вид [305]

$$T_{\perp} - T_{\perp}^{\min} \propto \mu_z^2 / (\mu_x \mu_y)^{1/2},$$

где

$$T_{\perp}^{\min} = \frac{a^2 b}{\pi} (\mu_x \mu_y)^{1/2},$$

так что при $\mu_z \rightarrow 0$ значение T_{\perp} стремится к конечному пределу.

Упругие модули вихревого кристалла можно полагать бездисперсионными, если периоды вихревой решётки велики по сравнению с глубинами проникновения магнитного поля для соответствующих направлений. В этом режиме дальнедействующее взаимодействие вихревых линий является экспоненциально слабым. Михеев и Коломейский [306] показали, что если даже совсем пренебречь этим взаимодействием внутри каждого слоя и учитывать лишь энтропийное взаимодействие Покровского-Талапова [307], обусловленное невозможностью пересечения или наложения вихревых линий, T_{\perp} оказывается существенно выше, чем температура фазового перехода в отсутствие связи

между слоями и, следовательно расщепления фазового перехода на два не происходит. В настоящем разделе нас будет интересовать режим более сильных полей, для которых периоды вихревой решётки велики по сравнению с соответствующими глубинами проникновения.

Из результатов Брандта [308] следует, что в лондоновском пределе упругая энергия одноосного вихревого кристалла имеет вид:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{x,z,x',z'} \int dy \int dy' u(\mathbf{r}) K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') ,$$

где (x, z) - это координаты вихрей в плоскости xz в равновесной конфигурации, а ядро $K(\mathbf{r})$ определяется соотношениями

$$K(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} K(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} , \quad (109a)$$

$$K(\mathbf{q}) = \sum_{\{\mathbf{Q}\}} [K(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) - K(0, \mathbf{Q})] , \quad (109b)$$

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = [(q_x + Q_x)^2 + q_y^2] G_{\parallel}(\mathbf{q} + \mathbf{Q}) . \quad (109c)$$

Здесь $-\pi/a < q_x < \pi/a$, $-\infty < q_y < +\infty$, $-\pi/b < q_z < \pi/b$, а суммирование по \mathbf{Q} производится по набору векторов обратной решётки. Для треугольной решётки, изображённой на рис. 27,

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{2\pi n}{a}, 0, \frac{\pi(n + 2n')}{b} \right) ,$$

где n и n' целые. В соответствии с видом выражения (99a) в длинноволновом пределе, в этом разделе мы будем полагать

$$G_{\parallel}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2}{D^{-1} + J_{\perp}^{-1} q_{\parallel}^2 + J_{\parallel}^{-1} q_{\perp}^2} . \quad (110)$$

В (110) и далее в этой главе предполагается, что компоненты волнового вектора \mathbf{q} , а так же все величины размерности длины обезразмерены при помощи d - расстояния между слоями.

Подстановка (110) в (109c) с последующим суммированием по n' дают

$$K_n(\mathbf{q}) \equiv \sum_{n'} K(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \frac{2\pi k_{\parallel}^2}{(AB)^{1/2}} \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma - (-1)^n \cos bq_z}$$

где

$$k_{\parallel}^2 = (q_x + 2\pi n/a)^2 + q_y^2 , \quad \gamma = (A/B)^{1/2} ,$$

$$A = D^{-1} + J_{\perp}^{-1} q_{\parallel}^2 , \quad B = (J_{\perp} b^2)^{-1} .$$

Слагаемое с $n = 0$ является существенно нелокальным. При $q_{\parallel}^2 \ll a^{-2}$ [305]

$$K_0(\mathbf{q}) \approx \frac{4\pi^2 q_{\parallel}^2}{D^{-1} + J_{\perp}^{-1} q_{\parallel}^2 + J_{\parallel}^{-1} [2(1 - \cos bq_z)/b^2]} \quad (111)$$

В интересующем нас режиме, когда периоды вихревой решётки велики по сравнению с глубинами проникновения для соответствующих направлений (т.е. $a^2 \gg \lambda_{\parallel}^2 \equiv D/J_{\parallel}$, а $b^2 \gg \lambda_{\perp}^2 \equiv D/J_{\perp}$), первое слагаемое в знаменателе (111) может быть опущено.

В то же время сумма остальных слагаемых является практически локальной:

$$K'(\mathbf{q}) \equiv \sum_{n \neq 0} [K_n(\mathbf{q}) - K_n(0)] \approx \mu_{\parallel} q_{\parallel}^2 + \mu_{\perp} q_z^2$$

где коэффициенты μ_{\parallel} and μ_{\perp} зависят от параметра $\kappa = J_{\parallel} b^2 / J_{\perp} a^2$, характеризующего геометрию решётки. Величина κ определяется как способом приготовления вихревой решётки (т.е. способом охлаждения образца), так и величиной внешнего магнитного поля. Равновесная решётка соответствует $\kappa = \kappa_0 = 3/4$. При $\kappa > \kappa_0$ решётка является пересжатой в направлении оси x . При понижении κ до $\kappa_c \approx 1/3$ происходит фазовый переход связанный с деформацией элементарной ячейки [303]. Пределу высоких полей соответствует $b = d$ и $\kappa \gg 1$.

Параметр μ_{\perp} сильно зависит от κ . При $\kappa \gg 1$ он экспоненциально мал:

$$\mu_{\perp} \approx 8\pi^3 (J_{\parallel} J_{\perp})^{1/2} (b^3/a) \exp(-2\pi\kappa^{1/2})$$

тогда как при $\kappa \sim 1$ эта малость исчезает. В то же время зависимость μ_{\parallel} от κ является весьма слабой. Как при $\kappa \gg 1$, так и при $\kappa \sim \kappa_0$

$$\mu_{\parallel} \approx \pi (J_{\parallel} J_z)^{1/2} ab \ln(a/\xi),$$

где $\xi \ll a$ есть длина когерентности в плоскости слоёв.

Замена (108) на

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{(2\pi b)^2 (2 - 2 \cos bq_z) T}{K_0(\mathbf{q}) + \mu_{\parallel} q_{\parallel}^2} \quad (112)$$

не приводит к качественному изменению характера взаимодействия в слоистом кулоновском газе (добавляется логарифмическое взаимодействие зарядов, расположенных через слой друг от друга). При $\kappa \gg \kappa_* = [3 \ln(a/\xi)/4\pi]^2$ для зарядов, относящихся к одному слою, определяющим является первое слагаемое в знаменателе (112), что даёт [305]

$$T_{\perp} - T_{\perp}^{\min} \propto \exp(-4\pi\kappa^{1/2}), \quad T_{\perp}^{\min} = \frac{4\pi}{3} b J_{\parallel},$$

тогда как при $\kappa_c \ll \kappa \ll \kappa_*$ значение T_{\perp}^{\min} оказывается ещё выше: $T_{\perp}^{\min} \approx (J_{\parallel} J_{\perp})^{1/2} a \ln(a/\xi)$.

Таким образом, мы показали, что в случае относительно плотной вихревой решётки температура предполагаемого фазового перехода, связанного с потерей межслойной когерентности лишь слабо (при $\kappa \gg 1$ экспоненциально слабо) зависит от J_{\perp} и a , определяется J_{\parallel} и b . При этом даже в "оптимальном" случае $b = 1$ (напомним, что мы полагаем a и b измеренными в единицах d) найденное в настоящем разделе значение T_{\perp} оказывается значительно выше, чем T_{\parallel} , температура фазового перехода в отсутствие связи между слоями, когда параллельное слоям магнитное поле выпадает из гамильтониана, что позволяет воспользоваться выражением (105).

Поскольку флуктуации вихревого кристалла, образованного параллельными слоям вихревыми линиями, можно полагать одноосными лишь при $T \ll T_{\parallel}$, когда перегибы (переводящие вихревые линии из слоя в слой) связаны в нейтральные пары малого размера, остаётся заключить, что разрушение сверхпроводимости в перпендикулярном слоям направлении вследствие плавления вихревого кристалла в режиме одноосных флуктуаций [304] с занулением лишь одного из трёх упругих модулей [309] не представляется возможным (по крайней мере, в чистой системе). Фазовый переход будет происходить при температурах, когда флуктуации вихревых линий являются существенно

трёхмерными и никаких особых причин для постоидийной потери когерентности не существует.

Проблема, рассмотренная в этом разделе, исследовалась также в работах Хоровица [299, 310] в рамках описания системы вихревых линий в терминах взаимодействующих фермионов. Вывод этого автора о возможности реализации сценария с $T_{\perp} < T_{\parallel}$ при $b = 8\text{--}10$ основан на утверждении, что возможна ситуация, когда температура фазового перехода в слоистой системе конечной толщины пропорциональна числу слоёв, её образующих. С нашей точки зрения, при слабой связи между слоями подобное поведение попросту невозможно, поскольку даже в изотропной системе при изменении числа слоёв от одного до бесконечности изменение температуры перехода происходит далеко не во многие разы (т.е. зависит от числа слоёв не линейно, а гораздо более слабо), ну а в случае слабого межслойного взаимодействия может представлять собой лишь малую поправку к температуре перехода в одном слое [288, 293, 311]. При учёте этих обстоятельств выводы, следующие из расчётов Хоровица, согласуются с нашими.

8.3 Предел сильного поля

При увеличении магнитного поля кóры межслойных (джозефсоновских) вихрей, создаваемых параллельным слоям внешним магнитным полем, начинают перекрываться друг с другом. При ещё бóльших полях описание флуктуаций в слоистом сверхпроводнике в терминах флуктуаций вихревого кристалла становится невозможным, и возникает необходимость вернуться к описанию в терминах флуктуаций фазы.

В этом режиме удобно воспользоваться так называемой моделью Лоренса-Дониаха, представляющей собой обобщение гамильтониана (96), возникающее при пренебрежении дискретностью внутри каждого из слоёв [312, 313]:

$$H_{\text{LS}} = \sum_n \iint dx dy \left[\frac{J_{\parallel}}{2} \left(\nabla_{\parallel} \varphi_n - \frac{2\pi}{\phi_0} \mathbf{A}_n \right)^2 - \tilde{J}_{\perp} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + hx) \right] + \frac{1}{8\pi} \iiint dx dy dz (\text{rot} \mathbf{A})^2, \quad (113)$$

где $\tilde{J}_{\perp} \equiv J_{\perp}/d^2$. В (113) выбрана калибровка, в которой флуктуирующая часть векторного потенциала имеет лишь x и y компоненты, тогда как векторный потенциал постоянного магнитного поля B , направленного вдоль оси y , имеет лишь z компоненту $A_z(x) = -Bx$, так что во втором слагаемом

$$h = \frac{2\pi B d}{\phi_0}.$$

Гамильтониан (113) квадратичен по флуктуациям векторного потенциала, что позволяет выполнение гауссова интегрирования, приводящего к их исключению. В результате такого преобразования эффективный гамильтониан приобретает вид [314]:

$$H_{\text{LS}}^{\text{eff}} = \iint dx dy \left[\frac{1}{2} \sum_{n,n'} g(n-n') (\nabla_{\parallel} \varphi_n) (\nabla_{\parallel} \varphi_{n'}) - \tilde{J}_{\perp} \sum_n \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + hx) \right] \quad (114)$$

где

$$g(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq_{\perp}}{2\pi} e^{iq_{\perp}n} g(q_{\perp}); \quad g(q_{\perp}) = \frac{2(1 - \cos q_{\perp})J_{\parallel}}{D^{-1} + 2(1 - \cos q_{\perp})J_{\parallel}^{-1}}$$

В реальных слоистых сверхпроводниках обычно выполняется неравенство $J_{\parallel} \ll D$ (иначе говоря, $\lambda_{\parallel} \gg d$), так что $g(q)$ почти везде близко к единице, а $|g(n \neq 0)| \ll 1$.

Для достаточно сильных полей, соответствующих проникновению вихрей между всеми слоями, минимум (114) достигается при

$$\varphi_n(x, y) = (-1)^n [\pi/4 - \Psi(x)] \quad (115)$$

где $\Psi(x)$ - это решение уравнения

$$g(\pi)J_{\parallel} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2\tilde{J}_{\perp} \cos 2\Psi \cos hx = 0,$$

которое при

$$\Psi_0 \equiv \frac{2\tilde{J}_{\perp}}{h^2 g(\pi)J_{\parallel}} \approx \frac{2\tilde{J}_{\perp}}{h^2 J_{\parallel}} \ll 1 \quad (116)$$

имеет вид [315]:

$$\Psi(x) \approx \Psi_0 \cos hx. \quad (117)$$

Периодичность решения (115)-(117) соответствует периодичности вихревой решётки, однако в этом случае уже невозможно разделить вклады от различных вихрей. Поскольку в слабых полях площадь кода вихря $S_c \sim (\lambda_{\parallel}/\lambda_{\perp})d^2$, неравенство (116) может быть переписано как условие на величину магнитного поля

$$B \gg \frac{\phi_0}{2\pi d^2} \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}},$$

необходимого для сильного перекрытия кодов вихрей.

При низких температурах непрерывные флуктуации фазы (не связанные с образованием вихревых пар в слоях) можно описать, заменив (115) на

$$\varphi_n(x, y) = (-1)^n [\pi/4 - u_n \cos hx - v_n \sin hx] + w_n$$

где $u_n \equiv u_n(x, y)$, $v_n \equiv v_n(x, y)$ и $w_n \equiv w_n(x, y)$ медленно (по сравнению с $\cos hx$) меняющиеся функции x и y . Это позволяет исключить из гамильтониана быстро осциллирующие члены, произведя в (114) усреднение по x на малых масштабах [314]. Сохранение в полученном таким образом новом гамильтониане членов до второго порядка по u_n и v_n с последующим их исключением из статсуммы при помощи гауссова интегрирования позволяют перейти к гамильтониану, зависящему только от w_n , который в главном порядке разложения по ∇_{\parallel} имеет вид [314]

$$H_{\text{LS}}^{\text{eff}} = \iint dx dy \left[\frac{J_{\parallel}}{2} \sum_{n, n'} g(n - n') (\nabla_{\parallel} w_n) (\nabla_{\parallel} w_{n'}) - \eta \sum_n \cos(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) \right], \quad (118)$$

где

$$\eta = \frac{\tilde{J}_{\perp}^2}{2J_{\parallel} g(\pi) h^2} = \frac{\Psi_0}{9} \tilde{J}_{\perp} \ll \tilde{J}_{\perp}.$$

Разложение статистической суммы, соответствующей гамильтониану (118) по степеням второго слагаемого, воспроизводит статистическую сумму слоистого кулоновского газа (101) с химической активностью $Y = \eta/2T$ и обезразмеренным взаимодействием

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{(2 - 2 \cos q_{\perp}) [J_{\parallel}^{-1} + (2 - 2 \cos q_{\perp}) D^{-1}] T}{q_{\parallel}^2},$$

вид которого весьма близок к (112). Как следствие этого, выражение для температуры перехода [314], следующее из ренормгруппового анализа,

$$T_{\perp} = T_{\perp}^{\min} + O(\eta^2/T_{\perp}^{\min}), \quad T_{\perp}^{\min} = \frac{9\pi J_{\parallel}}{3 + J_{\parallel}/D}, \quad (119)$$

оказывается практически таким же, что и найденное в предыдущем разделе для $b = 1$ при исследовании плавления одноосного вихревого кристалла с учётом лишь нелокального вклада в $K_{\parallel}(\mathbf{q})$.

Сравнение (119) с выражением для T_{\parallel} , даваемым (105) (использование которого вполне правомерно, поскольку при $J_{\perp} = 0$ величина h выпадает из гамильтониана), показывает, что выводы предыдущего раздела справедливы и в пределе сильных полей, когда описание в терминах вихревого кристалла неприменимо.

Замена второго слагаемого в (118) на его гармоническую аппроксимацию помогает понять, что при низких температурах флуктуации фазы являются сходящимися, т.е. в системе существует дальний порядок по $\exp i\varphi$. Утверждение Ефетова [33] о том, что в достаточно сильном поле коррелятор $\langle \exp i(\varphi_n - \varphi_{n'}) \rangle$ спадает экспоненциальным образом, сделанное в рамках разложения статсуммы по степеням J_{\perp}/J_{\parallel} , основано на неполном учёте различных слагаемых в выражении для этого коррелятора. Интересно, что добиться потери межслойной когерентности можно приложив сильное магнитное поле не параллельно, а перпендикулярно слоям [316, 317]. В параллельном слое магнитном поле возможность разрушения когерентности между слоями возникает лишь при учёте неоднородностей [318, 319].

Заключение

Из представленного цикла исследований, основные результаты которого изложены в двадцати печатных работах (список публикаций приводится в приложении), могут быть сделаны следующие выводы:

1. Последовательность фазовых переходов в двумерных системах с комбинированным вырождением (например, во фрустрированных магнитным полем решётках джозефсоновских контактов) в существенной степени определяется существованием нового класса топологических возбуждений - дробных вихрей, возникающих на дефектах доменных стенок. В частности, в случае $U(1) \times Z_2$ вырождения (квадратная или треугольная решётка с полуцелым числом квантов потока на ячейку) взаимодействие таких объектов с обычными вихрями приводит к тому, что разрушение фазовой когерентности происходит при чуть более низкой температуре, чем разупорядочение по дискретным степеням свободы. Учёт взаимодействия со следующими за ближайшими соседями не приводит к изменению последовательности фазовых переходов до тех пор, пока оно не вызывает перестройку основного состояния.
2. Реализация альтернативной последовательности фазовых переходов, при которой потеря фазовой когерентности связана с диссоциацией пар дробных вихрей и происходит при более высокой температуре, чем разупорядочение по дискретным степеням свободы, оказывается возможна в случае решётки кагоме и взаимодействия не только ближайших соседей, но лишь в чрезвычайно узком окне значений параметров, за пределами которого разупорядочение всех степеней свободы происходит одновременно.
3. Структура фазовой диаграммы планарного антиферромагнетика с треугольной решёткой в внешнем магнитном поле обусловлена снятием случайного непрерывного вырождения гармоническими флуктуациями, приводящими к стабилизации трёх различных упорядоченных фаз, каждая из которых характеризуется наличием настоящего дальнего порядка по ориентации спинов.
4. При взаимодействии только ближайших соседей стабилизация дальнего порядка (по киральностям треугольных ячеек) в планарном антиферромагнетике с решёткой кагоме связана с ангармоническими флуктуациями и происходит при аномально низкой температуре, которая на три порядка ниже, чем температура диссоциации пар дробных вихрей. Это упорядочение настолько слабо, что характеризуется макроскопически большими значениями корреляционного радиуса, что делает весьма проблематичным его наблюдение в реальном или численном эксперименте.
5. Наличие геометрических нерегулярностей в решётке джозефсоновских контактов с целым (в среднем) числом квантов потока на ячейку не может привести при понижении температуры к возвратному переходу в неупорядоченное состояние.
6. При изменении параметров, соответствующем приближению SFS контакта к точке перехода в π состояние, в состоящей из таких контактов регулярной решётке должно происходить расщепление перехода Березинского-Костерлица-Таулеса на два, один из которых имеет изинговскую природу, а другой связан с диссоциацией пар дробных вихрей с топологическими зарядами $\pm 1/2$.
7. Аналогичное расщепление должно иметь место в обеих сверхтекучих фазах двумерной ферми-жидкости с p -спариванием, причём параметром, позволяющим ре-

гулировать его глубину, является перпендикулярное образцу внешнее магнитное поле.

8. Ослабление связи между слоями не может вызвать в слоистом сверхпроводнике расщепление фазового перехода, при котором потеря фазовой когерентности вдоль и поперёк слоёв происходила бы при различных температурах. Этот вывод справедлив не только в отсутствие внешнего магнитного поля, но и при наличии параллельного слоям поля.

Приложение. Список публикаций

1. С. Е. Коршунов "Двумерная сверхтекучая ферми-жидкость с р-спариванием", ЖЭТФ **89**, 531 (1985).
2. С. Е. Коршунов "О возможности расщепления фазового перехода в двумерной XY-модели", Письма ЖЭТФ **41**, 216 (1985).
3. С. Е. Коршунов "Антиферромагнитная XY-модель на треугольной решётке: упорядоченные состояния в магнитном поле", Письма ЖЭТФ **41**, 525 (1985).
4. S. E. Korshunov "Phase diagram of the antiferromagnetic XY-model with a triangular lattice in an external magnetic field", J. Phys. C. **19**, 5927 (1986).
5. S. E. Korshunov "Phase diagram of the modified XY-model", J. Phys. C. **19**, 4427 (1986).
6. S. E. Korshunov and G. V. Uimin "Phase transitions in 2D uniformly frustrated XY-models. I. Antiferromagnetic model on a triangular lattice", J. Stat. Phys. **43**, 1 (1986).
7. S. E. Korshunov "Phase transitions in 2D uniformly frustrated XY-models. II. General scheme", J. Stat. Phys. **43**, 17 (1986).
8. S. E. Korshunov "Vortex rings and phase transition in layered lattice superconductor", Europhys. Lett. **11**, 757 (1990).
9. S. E. Korshunov "Fluctuations and melting of the uniaxial vortex crystal in a layered superconductor", Europhys. Lett. **15**, 771 (1991).
10. S. E. Korshunov and A. I. Larkin "Problem of Josephson-vortex-lattice melting in layered superconductors", Phys. Rev. B **46**, 6395 (1992).
11. S. E. Korshunov "Possible destruction of the ordered phase in Josephson-junction arrays with positional disorder", Phys. Rev. B **48**, 1124 (1993).
12. S. E. Korshunov "Destruction of superconductivity in Josephson junction arrays by positional disorder", Helv. Phys. Acta **65**, 492 (1992).
13. T. Nattermann, S. Scheidl, S. E. Korshunov and M. S. Li "Absence of reentrance in two-dimensional XY-model with random phase shift", J. Physique I **5**, 565 (1995).
14. S. E. Korshunov and T. Nattermann "Absence of reentrance in superconducting arrays with positional disorder", Phys. Rev. B **53**, 2746 (1996).
15. S. E. Korshunov and T. Nattermann "Phase diagram of a Josephson junction array with positional disorder", Physica B **222**, 280 (1996).
16. V. Cataudella, G. Franzese, S. E. Korshunov and R. Fazio, "How the next-nearest-neighbor interactions change the phase diagram of a fully frustrated XY model?", Physica B **284-288**, 431 (2000).
17. G. Franzese, V. Cataudella, S. E. Korshunov and R. Fazio, "Fully frustrated XY model with next-nearest neighbor interaction", Phys. Rev. B **62**, R9287 (2000).
18. S. E. Korshunov "Kink pairs unbinding on domain walls and the sequence of phase transitions in fully frustrated XY models", Phys. Rev. Lett. **88**, 167007 (2002).
19. S. E. Korshunov "Phase transitions in the antiferromagnetic XY model with a *kagomé* lattice", Phys. Rev. B **65**, 054416 (2002).
20. S. E. Korshunov and B. Douçot "Fluctuations and vortex-pattern ordering in the fully frustrated XY model on a honeycomb lattice", Phys. Rev. Lett. **93**, 097003 (2004).

Список литературы

- [1] В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **59**, 907 (1970).
- [2] В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **61**, 1144 (1971).
- [3] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **5**, L124 (1972).
- [4] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
- [5] J. M. Kosterlitz, *J. Phys. C* **7**, 1046 (1974).
- [6] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1201 (1977).
- [7] M. R. Beasley, J. E. Mooij and T. P. Orlando, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1165 (1979).
- [8] D. R. Nelson and R. A. Pelcovits, *Phys. Rev. B* **16**, 2191 (1977).
- [9] B. I. Halperin and D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 121 and 519 (1978).
- [10] D. R. Nelson and B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **19**, 2457 (1979).
- [11] A. P. Young, *Phys. Rev. B* **19**, 1855 (1979).
- [12] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, in: *Progress in Low Temperature Physics*, Vol. VIIB, edited by D. F. Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1978), p. 371.
- [13] D. R. Nelson, in: *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol. V, edited by E. G. D. Cohen (North-Holland, New York, 1980), p. 53.
- [14] D. R. Nelson, in: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 7, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, London, 1983), p.1.
- [15] P. Minnhagen, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1001 (1987).
- [16] К. Б. Ефетов, *ЖЭТФ* **78**, 2018 (1980).
- [17] Yu. E. Lozovik and S. G. Akopov, *J. Phys. C* **14**, L31 (1980).
- [18] J. Villain, *J. Phys. C* **10**, 1717 (1977).
- [19] S. Teitel and C. Jayaprakash, *Phys. Rev. B* **27**, 598 (1983).
- [20] J.-R. Lee, S. J. Lee, B. Kim and I. Chang, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2172 (1997).
- [21] S. Alexander and P. Pincus, *J. Phys. A* **3**, 263 (1980).
- [22] D. H. Lee, J. D. Joannopoulos, J. W. Negele and D. P. Landau, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 433 (1984); *Phys. Rev. B* **33**, 450 (1986).
- [23] Р. С. Гехт и И. Н. Бондаренко, *ЖЭТФ* **113**, 2209 (1998).
- [24] D. A. Huse and A. D. Rutenberg, *Phys. Rev. B* **45**, 7536 (1992).
- [25] N. M. Chtchelkatchev, W. Belzig, Yu. N. Nazarov and C. Bruder, *Письма ЖЭТФ* **74**, 357 (2001).
- [26] Yu. S. Barash and I. V. Bobkova, *Phys. Rev. B* **65**, 144502 (2002).
- [27] A. A. Golubov, M. Yu. Kuprijanov and Ya. V. Fominov, *Письма ЖЭТФ* **75**, 709 (2002).
- [28] M. Rubinstein, B. Shraiman and D. R. Nelson, *Phys. Rev. B* **27**, 1800 (1983).
- [29] E. Granato and J. M. Kostelitz, *Phys. Rev. B* **33**, 6533 (1986).
- [30] I. E. Dzyaloshinskii, *J. Phys. Chem. Solids* **4**, 241 (1958).
- [31] T. Moriya, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 228 (1960); *Phys. Rev.* **120**, 91 (1960).
- [32] J. Friedel, *J. Phys. (Paris)* **49**, 1561 (1988).
- [33] К. Б. Ефетов, *ЖЭТФ* **76**, 1781 (1979).
- [34] F. Wegner, *Z. Phys. B* **206**, 465 (1967).
- [35] M. E. Fisher, M. N. Barber and D. Jasnow, *Phys. Rev. A* **8**, 1111 (1973).

- [36] J. Pearl, in: *Proceedings of the Ninth International Conference on Low Temperature Physics (LT-9)*, edited by J. D. Daunt, D. O. Edwards, F. J. Milford and M. Yacub (Plenum Press, New York, 1965), p. 566.
- [37] Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **7**, 627 (1937) [*Сборник трудов*, т. 1 (Наука, Москва, 1969), статья № 29].
- [38] R. E. Peierls, *Ann. Inst. Henri Poincare* **5**, 177 (1937).
- [39] N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1133.
- [40] N. D. Mermin, *Phys. Rev.* **176**, 1133 (1968).
- [41] P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
- [42] В. Л. Березинский, Кандидатская диссертация, ИТФ им. Л.Д. Ландау (1971).
- [43] J. Villain, *J. Phys. (Paris)* **36**, 581 (1975).
- [44] J. V. José, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick and D. R. Nelson, *Phys. Rev. B* **16**, 1217 (1977).
- [45] T. Ohta and D. Jasnow, *Phys. Rev. B* **20**, 139 (1979).
- [46] P. W. Anderson, G. Yuval and D. R. Hamman, *Phys. Rev. B* **1**, 4464 (1970).
- [47] J. Tobochnik and G. V. Chester, *Phys. Rev. B* **20**, 3761 (1979).
- [48] J. F. Fernández, M. F. Ferreira and J. Stankiewicz, *Phys. Rev. B* **34**, 292 (1986).
- [49] H. Weber and P. Minnhagen, *Phys. Rev. B* **37**, 5986 (1988).
- [50] R. Gupta, J. DeLapp, G. G. Batrouni, G. C. Fox, C. F. Baillie and J. Apostolakis, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1996 (1988).
- [51] P. Olsson, *Phys. Rev. B* **52**, 4526 (1995).
- [52] W. Y. Shih and D. Stroud, *Phys. Rev. B* **30**, 6774 (1984).
- [53] H. J. F. Knops, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 766 (1977).
- [54] J. D. Weeks, in *Order in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems*, edited by T. Riste (Plenum, New York - London, 1980), pp. 293-317.
- [55] S. T. Chui and J. D. Weeks, *Phys. Rev. B* **14**, 4978 (1976).
- [56] J. P. van der Eerden and H. J. F. Knops, *Phys. Lett.* **66A**, 334 (1978).
- [57] R. H. Swendsen, *Phys. Rev. B* **17**, 3710 (1978).
- [58] H. van Beijeren, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 993 (1977).
- [59] F. Rys, *Helv. Phys. Acta* **36**, 537 (1963).
- [60] E. H. Lieb, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 1046 (1967).
- [61] E. H. Lieb and F. Y. Wu, in: *Phase transitions and critical phenomena*, Vol. 1, edited by C. Domb and M. C. Green (Academic Press, London, 1972), p. 331.
- [62] P. B. Wiegmann, *J. Phys. C* **11**, 1583 (1978).
- [63] T. Ohta, *Prog. Theor. Phys.* **60**, 968 (1978).
- [64] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt and G. Grinstein, *J. Phys. A* **13**, 585 (1980).
- [65] D. Stroud and S. Kivelson, *Phys. Rev. B* **35**, 3478 (1987).
- [66] S. Teitel and S. Jayaprakash, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1999 (1983).
- [67] R. S. Newrock, C. J. Lobb, U. Geigenmüller and M. Octavio, in *Solid State Physics*, Vol. 54, edited by H. Ehrenreich and F. Spaepen (Academic Press, San Diego, 2000), p. 263.
- [68] P. Martinoli and Ch. Leemann, *J. Low Temp. Phys.* **118**, 699 (2000).
- [69] A. Vallat, S. E. Korshunov and H. Beck, *Phys. Rev. B* **43**, 8482 (1991).

- [70] A. Vallat and H. Beck, Phys. Rev. B **50**, 4015 (1994).
- [71] E. Fradkin, B. Huberman and S. H. Shenker, Phys. Rev. B **18**, 4789 (1978).
- [72] T. Horiguchi and C.C. Chen, J. Math. Phys. **15**, 659 (1974).
- [73] B. Sutherland, Phys. Rev. B **34**, 5208 (1986).
- [74] W. Y. Shih and D. Stroud, Phys. Rev. B **32**, 158 (1985).
- [75] S. Teitel and C. Jayaprakash, J. Phys. Lett. (Paris), **46**, L33 (1985).
- [76] S. E. Korshunov, Phys. Rev. B **63**, 134503 (2001).
- [77] S. E. Korshunov, J. Stat. Phys. **43**, 17 (1986).
- [78] Yi Xiao, D.A. Huse, P.M. Chaikin, M.J. Higgins, S. Bhattacharya and D. Spencer, Phys. Rev. B **65**, 214503 (2002).
- [79] S. E. Korshunov and B. Douçot, Phys. Rev. Lett. **93**, 097003 (2004).
- [80] S. E. Korshunov, Phys. Rev. B **71**, 174501 (2005).
- [81] J. P. Straley, A. Y. Morozov and E. B. Kolomeisky, Phys. Rev. Lett. **79**, 2534 (1997).
- [82] M. Franz and S. Teitel, Phys. Rev. Lett. **73**, 480 (1994); Phys. Rev. B **51**, 6551 (1995).
- [83] S. Hattel and J. Wheatley, Phys. Rev. B **50**, 16 590 (1994).
- [84] S. Hattel and J. Wheatley, Phys. Rev. B **51**, 11 951 (1995).
- [85] T. C. Halsey, J. Phys. C **18**, 2437 (1985).
- [86] L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- [87] Н. В. Вдовиченко, ЖЭТФ **47**, 715 (1964).
- [88] H. A. Kramers and G. H. Wannier, Phys. Rev. **60**, 252 (1941).
- [89] J. M. Thijssen and H. J. F. Knops, Phys. Rev. B **37**, 7738 (1988).
- [90] J. M. Thijssen, Phys. Rev. B **40**, 5211 (1989).
- [91] S. E. Korshunov, Phys. Rev. Lett. **94**, 087001 (2005).
- [92] B. Berge, H. T. Diep, A. Ghazali and P. Lallemand, Phys. Rev. B **34**, 3177 (1986).
- [93] H. Eikmans, J. E. van Himbergen, H. J. F. Knops and J. M. Thijssen, Phys. Rev. B **39**, 11 759 (1989).
- [94] S. E. Korshunov, Phys. Rev. Lett **88**, 167007 (2002).
- [95] S. A. Bulgadaev, Phys. Lett. **86A**, 213 (1981); С. А. Булгадаев, ТМФ **51**, 424 (1982).
- [96] S. J. Lee, J.-R. Lee and B. Kim, Phys. Rev. E **51**, R4 (1995).
- [97] P. Olsson and S. Teitel, Phys. Rev. B **71**, 104423 (2005).
- [98] A. Coniglio, C. R. Nappi, F. Peruggi and L. Russo, J. Phys. A **10**, 205 (1977).
- [99] A. L. Stella and C. Vanderzande, Phys. Rev. Lett. **62**, 1067 (1989).
- [100] C. Vanderzande and A. L. Stella, J. Phys. A **22**, L445 (1989).
- [101] D. Stauffer, Phys. Rep. **54**, 1 (1979).
- [102] W. Klein, H. E. Stanley, P. J. Reynolds and A. Coniglio, Phys. Rev. Lett. **41**, 1145 (1978).
- [103] Вик. С. Доценко и Г. В. Уймин, Письма ЖЭТФ **40**, 236 (1984).
- [104] Vik. S. Dotsenko and G. V. Uimin, J. Phys. C **18**, 5019 (1985).
- [105] J. Lee, J. M. Kosterlitz and E. Granato, Phys. Rev. B **43**, 11 531 (1991).
- [106] Y. H. Lee and S. Teitel, Phys. Rev. Lett. **65**, 2595 (1990).
- [107] C. Denniston and C. Tang, Phys. Rev. Lett. **79**, 451 (1997); Phys. Rev. B **58**, 6591 (1998).
- [108] D. B. Nicolaides, J. Phys. A **24**, L231 (1991).

- [109] G. Ramirez-Santiago and J. V. José, Phys. Rev. Lett. **68**, 1224 (1992); Phys. Rev. B **49**, 9567 (1994).
- [110] S. Lee and K.-C. Lee, Phys. Rev. B **49**, 15 184 (1994).
- [111] Y. Ozeki and N. Ito, Phys. Rev. B **68**, 054414 (2003).
- [112] P. Olsson, Phys. Rev. Lett. **75**, 2758 (1995).
- [113] P. Olsson, Phys. Rev. Lett. **77**, 4850 (1996).
- [114] V. Cataudella and M. Nicodemi, Physica A **233**, 293 (1996).
- [115] P. Olsson, Phys. Rev. B **55**, 3585 (1997).
- [116] G. Grest, Phys. Rev. B **39**, 9267 (1989).
- [117] J.-R. Lee, Phys. Rev. B **49**, 3317 (1994).
- [118] E. Granato and M. P. Nightingale, Phys. Rev. B **48**, 7438 (1993).
- [119] E. H. Boubekeur and H. T. Diep, Phys. Rev. B **58**, 5163 (1998).
- [120] H. J. Luo, L. Schülke and B. Zheng, Phys. Rev. Lett. **81**, 180 (1998); Phys. Rev. E **57**, 1327 (1998).
- [121] S. Lee, S. Kim, S. H. Park, H.-B. Pyo and K.-C. Lee, Phys. Rev. **60**, 9256 (1999).
- [122] M. Yosefin and E. Domany, Phys. Rev. B **32**, 1778 (1985).
- [123] E. Granato, J. Phys. C **20**, L215 (1987).
- [124] E. Granato, J. M. Kosterlitz, J. Lee and M. P. Nightingale, Phys. Rev. Lett. **66**, 1090 (1991).
- [125] J. Lee, E. Granato and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. B **44**, 4819 (1991).
- [126] M. P. Nightingale, E. Granato and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. B **52**, 7402 (1995).
- [127] S. Lee, K.-C. Lee and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. B **56**, 340 (1997).
- [128] M. den Nijs, Phys. Rev. B, **46**, 10 386 (1992).
- [129] D. Davidson and M. den Nijs, Phys. Rev. E **55**, 1331 (1997).
- [130] Ph. Lerch, Ch. Leemann, R. Theron and P. Martinoli, Phys. Rev. B **41**, 11 579 (1990).
- [131] P. Martinoli, R. Theron, J.-B. Simond, R. Meyer, Y. Jaccard and Ch. Leemann, Physica Scripta **T49**, 176 (1993).
- [132] B. J. van Wees, H. S. J. van der Zant and J. E. Mooij, Phys. Rev. B **35**, 7291 (1987).
- [133] H. S. J. van der Zant, H. A. Rijken and J. E. Mooij, J. Low Temp. Phys. **82**, 67 (1991).
- [134] H. S. J. van der Zant, L. J. Geerligs and J. E. Mooij, Europhys. Lett. **19**, 541 (1992).
- [135] H. S. J. van der Zant, F. C. Fritschy, W. J. Elion, L. J. Geerligs and J. E. Mooij, Phys. Rev. Lett. **69**, 2971 (1992).
- [136] H. S. J. van der Zant, W. J. Elion, L. J. Geerligs and J. E. Mooij, Phys. Rev. B **54**, 10 081 (1996).
- [137] M. V. Feigel'man and A. I. Larkin, Chem. Phys. **235**, 107 (2001).
- [138] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin and M. A. Skvortsov, Phys. Rev. Lett. **86**, 1869 (2001).
- [139] G. Deutscher and P. G. de Gennes, in *Superconductivity*, edited by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1969), Vol. 2, p. 1005.
- [140] V. Cataudella, G. Franzese, S. E. Korshunov and R. Fazio, Physica B **284-288**, 431 (2000).
- [141] G. Franzese, V. Cataudella, S. E. Korshunov and R. Fazio, Phys. Rev. B **62**, 9287 (2000).
- [142] J. Villain, R. Bidaux, J.-P. Carton and R. Conte, J. Phys. (France) **41**, 1263 (1980).

- [143] E. Ф. Шендер, ЖЭТФ **83**, 326 (1982).
- [144] M. Y. Choi and S. Doniach, Phys. Rev. B **32**, 5773 (1985).
- [145] Q.-H. Chen, M.-B. Luo and Z.-K. Jiao, Phys. Rev. B **64**, 212403 (2001).
- [146] S. Miyashita and J. Shiba, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 1145 (1984).
- [147] D. H. Lee, R. G. Caffisch, J. D. Joannopoulos and F. Y. Wu, Phys. Rev. B **29**, 2680 (1984).
- [148] S. E. Korshunov and G. V. Uimin, J. Stat. Phys. **43**, 1 (1986).
- [149] G. H. Wannier, Rev. Mod. Phys. **17**, 50 (1945); Phys. Rev. **79**, 357 (1950).
- [150] J. E. van Himbergen, Phys. Rev. B **33**, 7857 (1986).
- [151] S. Lee and K.-C. Lee, Phys. Rev. B **57**, 8472 (1998).
- [152] H. Kawamura, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 2452 (1984).
- [153] С. Е. Коршунов, Письма ЖЭТФ **41**, 525 (1985).
- [154] S. E. Korshunov, J. Phys. C **19**, 5927 (1986).
- [155] E. Rastelli, A. Tassi, A. Pimpinelli and S. Sedazzari, Phys. Rev. B **45**, 7936 (1992).
- [156] R. J. Baxter, J. Phys. A **13**, L61 (1980).
- [157] V. L. Pokrovsky and G. V. Uimin, Phys. Lett. **45A**, 467 (1973);
В. Л. Покровский и Г. В. Уймин, ЖЭТФ **65**, 1691 (1973).
- [158] B. Nienhuis, E. K. Riedel and M. Schick, Phys. Rev. B **27**, 5625 (1983).
- [159] R. J. Baxter, J. Phys. C **6**, L445 (1973).
- [160] A. V. Chubukov and D. I. Golosov, J. Phys. Cond. Matt. **3**, 69 (1991).
- [161] N. Suzuki and F. Matsubara, Phys. Rev. B **55**, 12 331 (1997).
- [162] Д. И. Голосов и А. В. Чубуков, Письма ЖЭТФ **50**, 416 (1989).
- [163] H. Kawamura and S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 4530 (1985).
- [164] M. E. Zhitomirsky, Phys. Rev. Lett. **88**, 057204 (2002).
- [165] D. C. Cabra, M. D. Grynberg, P. C. W. Holdsworth and P. Pujol, Phys. Rev. B **65**, 094418 (2002).
- [166] K. Hida, J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 3673 (2001).
- [167] H. Suematsu, K. Ohmatsu, K. Sugiyama, T. Sakakibara, M. Motokawa and M. Date, Solid State Commun. **40**, 241 (1981).
- [168] L. E. Svistov, A. I. Smirnov, L. A. Prozorova, O. A. Petrenko, L. N. Demianets and A. Ya. Shapiro, Phys. Rev. **67**, 094434 (2003).
- [169] T. Ono, H. Tanaka, H. Aruga Katori, F. Ishikawa, H. Mitamura and T. Goto, Phys. Rev. B **67**, 104431 (2003).
- [170] R. Wang, W. F. Bradley and H. Steinfink, Acta Crystallogr. **18**, 249 (1965).
- [171] A. Bonnin and A. Lecerf, C. R. Acad. Sci. (Paris) **262**, 1782 (1966).
- [172] M. G. Townsend, G. Longworth and E. Roudaut, Phys. Rev. B **33**, 4919 (1986).
- [173] A. S. Willis, A. Harrison, C. Ritter and R. I. Smith, Phys. Rev. B **61**, 6156 (2000).
- [174] A. S. Willis, V. Dupuis, E. Vincent, J. Hammann and R. Calemczuk, Phys. Rev. B **62**, R9264 (2000).
- [175] X. Obrados *et al.*, Solid State Comm. **5**, 189 (1988).
- [176] A. P. Ramirez, G. P. Espinoza and A. S. Cooper, Phys. Rev. Lett. **64**, 2070 (1990).
- [177] C. Broholm, G. Aeppli, G. P. Espinosa and A. S. Cooper, Phys. Rev. Lett. **65**, 3173 (1990).

- [178] Y. J. Uemura *et al.*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3306 (1994).
- [179] A. P. Ramirez, B. Hesse and M. Winkelman, Phys. Rev. Lett. **84**, 2957 (2000).
- [180] I. S. Hagemann, Q. Huang, X. P. A. Gao, A. P. Ramirez and R. J. Cava, Phys. Rev. Lett. **86**, 894 (2001).
- [181] M. J. Higgins, Yi Xiao, S. Bhattacharya, P. M. Chaikin, S. Sethuraman, R. Bojko and D. Spencer, Phys. Rev. B **61**, R894 (2000).
- [182] V. Elser, Phys. Rev. Lett. **62**, 2405 (1989).
- [183] R. J. Baxter, J. Math. Phys. **11**, 784 (1970).
- [184] S. E. Korshunov, Phys. Rev. B **65**, 054416 (2002).
- [185] A. B. Harris, C. Kallin and A. J. Berlinsky, Phys. Rev. B **45**, 2899 (1992).
- [186] C. L. Henley, частное сообщение; N. Read, частное сообщение (цитируются по [24]).
- [187] D. R. Nelson, Phys. Rev. B **18**, 2318 (1978).
- [188] I. Ritchey, P. Chandra and P. Coleman, Phys. Rev. B **47**, 15342 (1993).
- [189] P. Chandra, P. Coleman and I. Ritchey, J. Phys. (France) I **3**, 591 (1993).
- [190] M. S. Rzchowski, Phys. Rev. B **55**, 11 745 (1997).
- [191] V. B. Cherepanov, I. V. Kolokolov and E. V. Podivilov, Письма ЖЭТФ, **74**, 674 (2001).
- [192] D. H. Lee, G. Grinstein and J. Toner, Phys. Rev. Lett. **56**, 2318 (1986).
- [193] S. N. Coppersmith, D. S. Fisher, B. I. Halperin, P. A. Lee and W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. **46**, 549 (1981); Phys. Rev. B **25**, 349 (1982).
- [194] R. E. Peierls, Proc. Cambridge Phil. Soc., **32**, 477 (1936).
- [195] C. Domb, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 3, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic Press, New York, 1974).
- [196] Y. Saito, Z. Phys. B **32**, 75 (1978).
- [197] K. Park and D. A. Huse, Phys. Rev. B **64**, 134522 (2001).
- [198] S. E. Korshunov, A. Vallat and H. Beck, Phys. Rev. B **51**, 3071 (1995).
- [199] J. T. Chalker, P. C. W. Holdsworth and E. F. Shender, Phys. Rev. Lett. **68**, 855 (1992).
- [200] J. N. Reimers and A. J. Berlinsky, Phys. Rev. B **48**, 9539 (1993).
- [201] S. Sachdev, Phys. Rev. B **45**, 12 377 (1992).
- [202] A. Chubukov, Phys. Rev. Lett. **69**, 832 (1992).
- [203] A. Chubukov, J. Appl. Phys. **73**, 5639 (1993).
- [204] Л. Н. Булаевский, В. В. Кузий и А. А. Собянин, Письма ЖЭТФ **25**, 314 (1977).
- [205] А. И. Буздин, Л. Н. Булаевский и С. В. Панюков, Письма ЖЭТФ **35**, 147 (1982).
- [206] А. И. Буздин, Б. Вуйичич и М. Ю. Куприянов, ЖЭТФ **101**, 231 (1992).
- [207] A. V. Veretennikov, V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, V. A. Larkin and J. Aarts, Physica B **284-288**, 495 (2000).
- [208] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov and J. Aarts, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001).
- [209] S. M. Frolov, D. J. van Harlingen, V. A. Oboznov, V.V. Bolginov and V. V. Ryazanov, Phys. Rev. B **70**, 144505 (2004).
- [210] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis and R. Boursier, Phys. Rev. Lett. **89**, 137007 (2002).
- [211] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. V. Veretennikov and A. Yu. Rusanov, Phys. Rev. B **65**, 020501 (2001).

- [212] С. Е. Коршунов, Письма ЖЭТФ, **41**, 216 (1985).
- [213] S. E. Korshunov, J. Phys. C **19**, 4427 (1986).
- [214] D. H. Lee and G. Grinstein, Phys. Rev. Lett. **55**, 541 (1985).
- [215] M. E. Fisher, S.-k. Ma and B. G. Nickel, Phys. Rev. Lett. **29**, 917 (1972).
- [216] L. B. Ioffe and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. B **66**, 224503 (2002).
- [217] B. Douçot, M. V. Feigel'man and L. B. Ioffe, Phys. Rev. Lett. **90**, 107003 (2003).
- [218] R. H. Swendsen, Phys. Rev. Lett. **49**, 1302 (1982).
- [219] E. Domany, M. Schick and R. Swendsen, Phys. Rev. Lett. **52**, 1535 (1984).
- [220] J. E. van Himbergen, Phys. Rev. Lett. **53**, 5 (1984).
- [221] A. Jonsson, P. Minnhagen and M. Nylén, Phys. Rev. Lett. **70**, 1327 (1993).
- [222] J. M. Caillol and D. Levesque, Phys. Rev. B **33**, 499 (1986).
- [223] P. Minnhagen, Phys. Rev. Lett. **54**, 2351 (1985); Phys. Rev. B **32**, 3088 (1985).
- [224] P. Minnhagen and M. Wallin, Phys. Rev. B **36**, 5620 (1987); Phys. Rev. B **40**, 5109 (1989).
- [225] J. M. Thijssen and H. J. F. Knops, Phys. Rev. B **38**, 9080 (1988).
- [226] Y. Levin, X.-j. Li and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **73**, 2716 (1994).
- [227] А. А. Мигдал, ЖЭТФ **69**, 457 (1975).
- [228] L. P. Kadanoff, Ann. Phys. **100**, 359 (1976).
- [229] C. R. Askeew *et al.*, Comp. Phys. Comm. **42**, 21 (1986).
- [230] I. Fijita, M. Nakahara, T. Ohmi and T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. **64**, 396 (1980).
- [231] П. Н. Брусков и В. Н. Попов, ЖЭТФ **80**, 1564 (1981).
- [232] P. N. Brusov and V. N. Popov, Phys. Lett. **87A**, 472 (1982).
- [233] С. Е. Коршунов, ЖЭТФ **89**, 531 (1985).
- [234] A. Sachrajda, R. F. Harris-Lowe, J. P. Harrison, R. R. Turkington and J. G. Daunt, Phys. Rev. Lett. **55**, 1602 (1985).
- [235] J. G. Daunt, R. F. Harris-Lowe, J. P. Harrison, A. Sachrajda, S. Steel, R. R. Turkington and P. Zawadski, J. Low Temp. Phys. **70**, 547 (1988).
- [236] J. C. Davis, A. Amar, J. P. Pekola and R. E. Packard, Phys. Rev. Lett. **60**, 302 (1988).
- [237] M. R. Freeman, R. S. Germain, E. V. Thuneberg and R. C. Richardson, Phys. Rev. Lett. **60**, 596 (1988).
- [238] M. R. Freeman and R. C. Richardson, Phys. Rev. B **41**, 11 011 (1990).
- [239] J. Xu and B. C. Crooker, Phys. Rev. Lett. **65**, 3005 (1990).
- [240] X. W. Wang and F. M. Gasparini, Phys. Rev. B **34**, 4916 (1986).
- [241] D. L. Stein and M. C. Cross, Phys. Rev. Lett. **42**, 504 (1979).
- [242] Г. Е. Воловик и В. П. Минеев, ЖЭТФ **72**, 2256 (1977).
- [243] А. М. Polyakov, Phys. Lett. **59B**, 79 (1975).
- [244] С. Б. Хохлачёв, ЖЭТФ **70**, 265 (1976).
- [245] Z. Tešanović, Phys. Lett. **100A**, 158 (1984).
- [246] H. Kawamura, Phys. Rev. Lett. **82**, 964 (1999).
- [247] A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).
- [248] В. П. Минеев, УФН **139**, 303 (1983).
- [249] A. J. Leggett, Ann. Phys. **85**, 11 (1974).
- [250] P. Azaria, B. Delamotte and D. Mouhanna, Phys. Rev. Lett. **68**, 1762 (1992).

- [251] P. Azaria, B. Delamotte, T. Jolicoeur and D. Mouhanna, Phys. Rev. B **45**, 12 612 (1992).
- [252] T. Nattermann, S. Scheidl, S. E. Korshunov and M. S. Li, J. Physique I **5**, 565 (1995).
- [253] M. G. Forrester, H. J. Lee, M. Tinkham and C. J. Lobb, Phys. Rev. B **37**, R5966 (1988).
- [254] M. G. Forrester, S. P. Benz and C. J. Lobb, Phys. Rev. B **41**, 8749 (1990).
- [255] A. Chakrabarty and C. Dasgupta, Phys. Rev. B **37**, 7557 (1988).
- [256] M. P. A. Fisher, T. A. Tokuyasu and A. P. Young, Phys. Rev. Lett. **66**, 2931 (1991).
- [257] D. R. Nelson, Phys. Rev. B **27**, 2902 (1983).
- [258] S. E. Korshunov, Phys. Rev. B **46**, 6615 (1992).
- [259] M. S. Li and M. Cieplak, Phys. Lett. A **184**, 223 (1994).
- [260] S. E. Korshunov and T. Nattermann, Phys. Rev. B **53**, 2746 (1996).
- [261] S. E. Korshunov, Phys. Rev. B **48**, 1124 (1993).
- [262] S. E. Korshunov and T. Nattermann, Physica B **222**, 280 (1996).
- [263] B. Derrida, Phys. Rev. Lett. **45**, 79 (1980); Phys. Rev. B **24**, 2613 (1982).
- [264] L.-H. Tang, Phys. Rev. B **54**, 3350 (1996).
- [265] M.-C. Cha and H. A. Fertig, Phys. Rev. Lett. **74**, 4867 (1995).
- [266] D. Sherington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **35**, 1762 (1975).
- [267] S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys. F **5**, 965 (1975).
- [268] M. Mézard, G. Parisi and M. A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [269] Y. Ozeki and H. Nishimori, J. Phys. A **26**, 3399 (1993).
- [270] S. E. Korshunov, Helv. Phys. Acta **65**, 492 (1992).
- [271] C. Mudry and X.-G. Wen, Nucl. Phys. B **549**, 613 (1997).
- [272] S. Scheidl, Phys. Rev. B **55**, 457 (1997).
- [273] D. Carpentier and P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. **81**, 2558 (1998).
- [274] D. Carpentier and P. Le Doussal, Nucl. Phys. B **588**, 565 (2000).
- [275] J. Mancourt and D. R. Grempel, Phys. Rev. B **56**, 2572 (1997).
- [276] P. Gupta and S. Teitel, Phys. Rev. Lett. **82**, 5313 (1999).
- [277] Y. Imry and S.-K. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
- [278] K. Binder, Z. Phys. **50**, 343 (1983).
- [279] M. Aizenman and J. Wehr, Phys. Rev. Lett. **62**, 2503 (1989).
- [280] K. Hui and N. Berker, Phys. Rev. Lett. **62**, 2507 (1989).
- [281] R. Savit, Phys. Rev. B **17**, 1340 (1978).
- [282] P. R. Thomas and M. Stone, Nucl. Phys. B **144**, 513 (1978).
- [283] C. Dasgupta and B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **47**, 1556 (1981).
- [284] G. Williams, Phys. Rev. Lett. **59**, 1926 (1987).
- [285] S. R. Shenoy, Phys. Rev. B **40**, 5056 (1989).
- [286] F. Lund, Phys. Rev. B **41**, 155 (1990).
- [287] C. S. O'Hern, T. C. Lubensky and J. Toner, Phys. Rev. Lett. **83**, 2475 (1999).
- [288] C. Deutsch and S. Doniach, Phys. Rev. B **29**, 2724 (1984).
- [289] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).

- [290] J. M. Triscone, Ø. Fischer, O. Brunner, L. Antognazza, A. D. Kent and M. G. Karkut, Phys. Rev. Lett. **64**, 804 (1990).
- [291] Q. Li, X. X. Xi, X. D. Wu, A. Inam, S. Vadlamannati, W. L. Mclean, T. Venkatesan, R. Ramesh, D.M. Hwang, J. A. Martinez and L. Nazar, Phys. Rev. Lett. **64**, 3086 (1990).
- [292] D. H. Lowndes, D. P. Norton and J. D. Budai, Phys. Rev. Lett. **65**, 1160 (1990).
- [293] S. E. Korshunov, Europhys. Lett., **11** 757 (1990).
- [294] G. Carneiro, Phys. Rev. B **45**, 2391 (1992).
- [295] S. N. Artemenko and A. N. Kruglov, Phys. Lett. A **43**, 485 (1990).
- [296] M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein and A. I. Larkin, Physica C **167**, 177 (1990).
- [297] A. Buzdin and D. Feinberg, J. Phys. (Paris) **51**, 1971 (1990).
- [298] J. R. Clem, Phys. Rev. B **43**, 7837 (1991).
- [299] B. Horovitz, Phys. Rev. Lett. **67**, 378 (1991).
- [300] B. Horovitz, Phys. Rev. B **45**, 12 632 (1992).
- [301] B. Horovitz, Phys. Rev. B **47**, 5947 (1993).
- [302] M. Dzierzawa, M. Zamora, D. Baeriswyl and X. Banoud, Phys. Rev. Lett. **77**, 3897 (1996).
- [303] B. I. Ivlev, N. B. Kopnin and V. L. Pokrovsky, J. Low Temp.Phys. **80**, 187 (1990).
- [304] S. Chakravarty, B. I. Ivlev and Yu. N. Ovchinnikov, Phys. Rev. Lett. **64** 3178 (1990).
- [305] S. E. Korshunov, Europhys. Lett. **15**, 771 (1991).
- [306] L. V. Mikheev and E. B. Kolomeisky, Phys. Rev. B **43**, 10 431 (1991).
- [307] В. Л. Покровский и А. Л. Талапов, ЖЭТФ **78**, 269 (1978).
- [308] E. H. Brandt, J. Low. Temp. Phys. **26**, 735 (1977).
- [309] G. Blatter, B. I. Ivlev and J. Rhyner, Phys. Rev. Lett. **66**, 2392 (1991).
- [310] B. Horovitz, Phys. Rev. B **47**, 5964 (1993).
- [311] S. Hikami and T. Tsuneta, Prog. Theor. Phys. **63**, 387 (1980).
- [312] W. E. Lawrence and S. Doniach, in *Proceedings of the Twelfth International Conference on Low Temperature Physics, Kyoto, 1970*, edited by E. Kanda (Keigaka, Tokyo, 1971), p. 361.
- [313] Л. Н. Булаевский, УФН **116**, 449 (1975).
- [314] S. E. Korshunov and A. I. Larkin, Phys. Rev. B **46**, 6395 (1992).
- [315] L. Bulaevsky and J. R. Clem, Phys. Rev. B **44**, 10 234 (1991).
- [316] L. I. Glazman and A. E. Koshelev, Phys. Rev. B **43**, 2835 (1991).
- [317] J. P. Rodriguez, Phys. Rev. B **62**, 9117 (2000).
- [318] D. Carpentier, P. Le Doussal and T. Giamarchi, Europhys. Lett. **35**, 379 (1996).
- [319] A. Golub and B. Horowitz, Europhys. Lett. **39**, 79 (1997).