

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. Н. Вергелес

ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области фундаментальной математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Фундаментальная математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 621.37.01(075)
ББК 32.965я73
И83

Работа над пособием поддержана РФФ грант № 16-12-10151

Рецензенты:

Кафедра высшей геометрии и топологии Мехмата
Московского государственного университета
(зав. кафедрой академик, профессор *С.П. Новиков*).

Доктор физико-математических наук, профессор РАН *А.Я. Мальцев*

Вергелес, С. Н.

И83 Лекции по общей теории относительности: учебное пособие /
С. Н. Вергелес. – М.: МФТИ, 2016. – *** с.
ISBN ***_*_****_****_*

Систематически излагаются основы Общей теории относительности. Учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит краткий курс дифференциальной геометрии, которая формулируется на языке дифференциальных форм. Вторая часть посвящена собственно геометродинамике. Такой подход позволяет достичь большей общности, ясности и компактности в процессе изложения предмета.

Рекомендуется всем, интересующимся проблемами теоретической физики, особенно студентам и специалистам по теории поля.

УДК 621.37.01(075)
ББК 32.965я73

ISBN ***_*_****_****_*

© Вергелес С.Н., 2016
© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2016

Оглавление

Предисловие	6
I Введение в дифференциальную геометрию	8
1. Тензорный анализ	9
1.1. Многообразия	9
1.2. Векторы на многообразии	13
1.3. Тензоры и тензорные поля	19
1.3.1. Определение тензоров	19
1.3.2. Операции над тензорами	20
1.3.3. Тензорное произведение линейных пространств	24
1.4. Дифференциальные формы	24
1.5. Дифференцирование и интегрирование форм	30
1.5.1. Внешнее дифференцирование форм	30
1.5.2. Интегрирование форм. Теорема Стокса.	34
2. Элементы дифференциальной геометрии	42
2.1. Ковариантное дифференцирование и метрика на многообразии	42
2.1.1. Ковариантное дифференцирование и связность	42
2.1.2. Метризованные пространства	48
2.1.3. Ортонормированные базисы	50
2.1.4. Связность, согласованная с метрикой	51
2.2. Тензоры кривизны и кручения	53
2.2.1. Определение параллельного переноса векторов	53
2.2.2. Геодезические линии	54
2.2.3. Тензор кривизны	55
2.2.4. Тензор кручения	59

2.2.5.	Структурные уравнения Картана и тождества Бианки	61
2.3.	Явные выражения для коэффициентов связности. Нормальные координаты Римана	65
2.3.1.	Явные выражения для коэффициентов связности	65
2.3.2.	Ковариантная дивергенция. Оператор д'Аламбера.	67
2.3.3.	Нормальные координаты Римана	70
 II Геометродинамика		 75
3.	Основные уравнения общей теории относительности	76
3.1.	Введение. Движение свободной частицы	76
3.1.1.	Ключевые идеи общей теории относительности . .	76
3.1.2.	Движение частицы в гравитационном поле	81
3.1.3.	Ньютоновский предел	85
3.1.4.	Изменение частоты света, связанное с гравитационным полем	86
3.2.	Тензор энергии-импульса материи	89
3.2.1.	Определение тензора энергии-импульса	89
3.2.2.	Уравнения движения материи в случае электромагнитного взаимодействия	91
3.2.3.	Закон "сохранения" для тензора энергии-импульса	93
3.2.4.	Уравнение движения релятивистской жидкости .	96
3.3.	Уравнение Эйнштейна	99
3.3.1.	Физический вывод Эйнштейна	99
3.3.2.	Вывод Гильберта	103
3.3.3.	Возможны ли другие варианты теории?	109
3.3.4.	Теория гравитации с Λ -членом	109
3.4.	Задача Коши. Псевдотензор энергии-импульса. Гармонические координаты.	110
3.4.1.	Задача Коши	110
3.4.2.	Закон сохранения энергии-импульса	113
3.4.3.	Гармонические координаты	117
4.	Следствия из общей теории относительности	121
4.1.	Гравитационное излучение	121
4.1.1.	Слабое гравитационное поле	121
4.1.2.	Случай плоской волны	124
4.1.3.	Излучение гравитационных волн	127
4.1.4.	О методике регистрации гравитационных волн . .	131

4.2.	Центрально-симметричное гравитационное поле	135
4.2.1.	Решение Шварцшильда	135
4.2.2.	Координаты Крускала	143
4.2.3.	О возможности возникновения черных дыр в результате эволюции	148
4.2.4.	Движение в центрально-симметричном поле	150
4.3.	Применение общей теории относительности к космологии	155
4.3.1.	Геометрия однородных и изотропных пространств	155
4.3.2.	Включение времени и решение Фридмана	161
4.3.3.	Космологические следствия	167
4.3.4.	Оценки средней плотности материи во Вселенной	172
4.3.5.	Режим экспоненциального расширения Вселенной	174
4.3.6.	Противоречия классических моделей Фридмана	179

Предисловие

В начале XX века в естествознании утвердилась великая идея о том, что эффекты гравитации полностью обусловлены эффектами кривизны пространства-времени. Наоборот, кривизна пространства-времени создаётся движущейся в нём материей. Так возникла Общая теория относительности, другое название которой непосредственно отражает лежащие в её основе идеи — геометродинамика. Можно сказать, что геометродинамика является наиболее общей из всех теорий поля, поскольку любая теория поля должна быть в конце концов сформулирована в искривлённом пространстве -времени, т.е. включена в общую теорию относительности. Геометродинамика позволяет поставить и даёт физически интересные, хотя часто и удивительные, решения таких задач, которые в нерелятивистской ньютоновской теории даже не могли быть и поставлены. Например, это задача о распространении и об излучении гравитационных волн или проблема эволюции Вселенной.

Настоящий учебник является подробным изложением курса лекций, читаемых автором в Московском физико-техническом институте. Материал, содержащийся в учебнике, включает в себя математические основы геометродинамики, формулировку основных уравнений теории и их применение к классическим задачам этой теории.

Первая часть книги представляет собою сжатый курс дифференциальной геометрии. Изложение ведётся на языке дифференциальных форм. Это позволяет сформулировать и использовать структурные уравнения Картана. Такой подход ведёт к значительной экономии в конкретных вычислениях. Кроме того, формулировка дифференциальной геометрии при помощи аппарата дифференциальных форм соответствует общепринятой в настоящее время практике в математической и физической литературе. Первая часть книги представляет собою также самостоятельный интерес для студентов, аспирантов и научных работников, желающих быстро ознакомиться с дифференциальной геометрией.

Во второй части курса лекций формулируется и обосновывается основное уравнение теории — уравнение Эйнштейна. Затем при помощи уравнения Эйнштейна решаются классические задачи общей теории относительности: ньютоновское приближение, приближение слабых гравитационных полей и излучение гравитационных волн, решение Шварцшильда для центрально-симметричного распределения материи (чёрная дыра), решение Фридмана уравнений Эйнштейна для однородной и изотропной Вселенной. Все эти задачи были поставлены и в основном решены самими создателями общей теории относительности.

сти. Поэтому обсуждение упомянутых задач содержится практически во всех учебниках по релятивистской теории гравитации (см. список литературы). Главное отличие настоящего учебного пособия от имеющихся учебников состоит в использовании математического аппарата дифференциальной геометрии, сформулированной на языке дифференциальных форм, и во включении появившихся за последние годы экспериментальных данных.

Нам представляется, что предлагаемый курс лекций может быть полезным для широкого круга читателей: студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников физических специальностей.

Я благодарен академику А.А. Старобинскому за полезные консультации, касающиеся последних экспериментальных данных, а также за указание на модель метрики (см (4.215)), которая наиболее адекватно описывает макроскопическую динамику Вселенной в её текущую эпоху развития.

Часть I

Введение в
дифференциальную
геометрию

Глава 1. Тензорный анализ

1.1. Многообразия

Пусть X — некоторое множество и \mathbb{R}^n - n -мерное Евклидово пространство.

Определение 1. *Картой* в X называется пара (U, h) , где $U \subset X$ — подмножество, а $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение множества U в \mathbb{R}^n , биективно (взаимно однозначно) отображающее U на некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n . \square

Подмножество $U \subset X$ называют *носителем карты* (U, h) .

Пусть точка $p \in U$. Тогда, согласно определению, имеем взаимно однозначное соответствие

$$p \begin{array}{c} \xleftarrow{h} \\ \xrightarrow{h^{-1}} \end{array} (x^1(p), \dots, x^n(p)) = h(p) \in \mathbb{R}^n, \quad x^i(p) \in \mathbb{R}.$$

Числовые функции $x^i(p), i = 1, \dots, n$ на U называются *локальными координатами карты* (U, h) . При этом вместо (U, h) часто пишут $(U, x^1, \dots, x^n) = (U, x^i)$.

Определение 2. Две карты $(U, h) = (U, x^i)$ и $(V, k) = (V, y^i)$ в X C^r -согласованы, если

либо $W = U \cap V = \emptyset$,

либо

а) оба множества $h(W)$ и $k(W)$ открыты в \mathbb{R}^n и

б) отображение $(k|_W) \circ (h|_W)^{-1} : h(W) \rightarrow k(W)$ является диффеоморфизмом класса C^r . \square

По определению карт имеем взаимно однозначные соответствия для $p \in W$:

$$p \longleftrightarrow x^1(p), \dots, x^n(p), \quad p \longleftrightarrow y^1(p), \dots, y^n(p)$$

и в случае согласованных карт имеем диффеоморфизм

$$y = \phi(x) \quad (y = ((k \circ h^{-1})x))$$

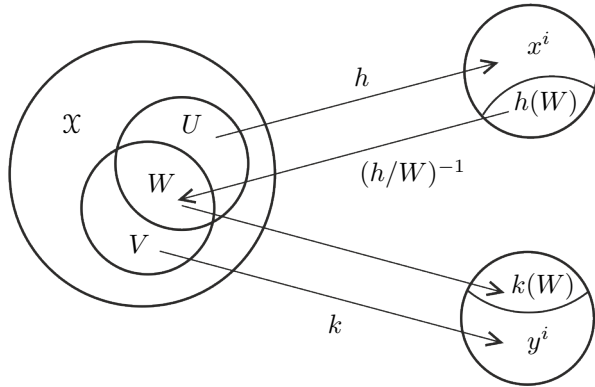


Рис. 1.1. Пересчет координат пересекающихся карт

(или $y = \phi(x)$) класса C^r (см. рис. 1.1).

Определение 3. Множество карт $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ называется C^r -атласом на X , если

- а) любые две карты этого множества C^r -согласованы;
- б) имеет место равенство

$$\cup_\alpha U_\alpha = X$$

□

Два атласа A и A^* на X называются C^r -эквивалентными, если их объединение $A \cup A^*$ является C^r -атласом (т.е. каждая карта любого из этих атласов C^r -согласована с каждой картой другого атласа).

Определение 4. Гладким многообразием класса C^r называется пара (X, A) , где X множество, A - произвольный C^r -атлас на X . При этом многообразия (X, A) и (Y, A^*) являются одинаковыми тогда и только тогда, когда $X = Y$ и их атласы

C^r -эквивалентны¹. \square

В дальнейшем мы рассматриваем многообразия класса C^∞ , которые будем называть гладкими многообразиями или просто многообразиями.

Число n , равное размерности пространства \mathbb{R}^n , называется размерностью многообразия и обозначается $\dim X$.

Приведем пример простого, но важного в дальнейшем многообразия S^n . Рассмотрим в \mathbb{R}^{n+1} гиперповерхность, определяемую уравнением

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = (D/2)^2$$

Обозначим через \mathfrak{X}^n и \mathfrak{Y}^n n -мерные гиперплоскости $x^{n+1} = \pm(D/2)$, соответственно. Координаты в этих гиперплоскостях остаются теми же, что и в \mathbb{R}^{n+1} : $x^i, i = 1, \dots, n$, но в гиперплоскости \mathfrak{Y}^n они переобозначаются $x^i \rightarrow y^i$. Точки с координатами $\mathcal{N} = (x^i = 0, x^{n+1} = (D/2))$ и $\mathcal{S} = (y^i = 0, x^{n+1} = -(D/2))$ называются северным и южным полюсами, соответственно. Выберем точку $p \in S^n$ и проведем через эту точку и ось x^{n+1} двумерную плоскость P^2 . Проведем в плоскости P^2 два отрезка, проходящих через точку p : первый отрезок начинается в точке \mathcal{S} и заканчивается на гиперплоскости \mathfrak{X}^n в точке с координатами x^i , а второй отрезок начинается в точке \mathcal{N} и заканчивается на гиперплоскости \mathfrak{Y}^n в точке с координатами y^i (см. рис. 1.2).

Из рис. 1.2 очевидно, что если точка $p \neq \mathcal{S}$, то её локальными координатами могут быть координаты $\{x^i\}$, если же точка $p \neq \mathcal{N}$, то её локальными координатами могут быть координаты $\{y^i\}$. В случае $\mathcal{N} \neq p \neq \mathcal{S}$ координатами точки p могут быть и те и другие координаты. Выразим явно координаты $\{y^i\}$ через координаты $\{x^i\}$. Из построения очевидно, что

$$y^i = f(x)x^i. \quad (1.1)$$

¹Здесь молчаливо предполагается, что у всякого многообразия (X, A) множество X является Хаусдорфовым, то есть топологическим пространством, в котором любые две разные точки имеют непересекающиеся окрестности, причём топологии пространств X и \mathbb{R}^n согласованы (открытые подмножества отображаются в открытые).

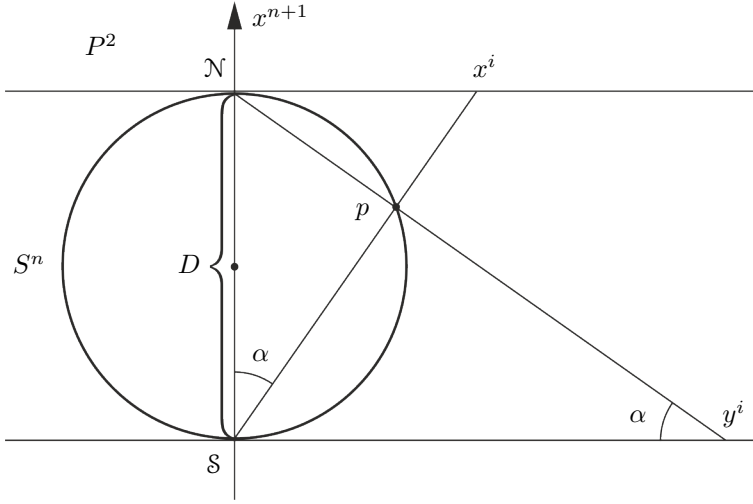


Рис. 1.2. Связь координат двух карт на сфере S^n , построенных при помощи стереографических проекций

Здесь $x = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$, $y = \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}$. При помощи рис. 1.2 находим: $x/D = \operatorname{tg} \alpha$, $y/D = \operatorname{ctg} \alpha$. Поэтому $xy = D^2$. Умножим скалярно равенство (1.1) на x^i : слева в этом равенстве получим $xy = D^2$, а справа получим $f(x)x^2$. Таким образом

$$y^i = \frac{D^2}{x^2} x^i \longleftrightarrow x^i = \frac{D^2}{y^2} y^i. \quad (1.2)$$

Из равенств (1.2) видно, что координаты $\{x^i\}$ непригодны для точек p вблизи южного полюса, а координаты $\{y^i\}$ непригодны вблизи северного полюса. Вместе с тем построен атлас сферы S^n , состоящий из двух карт с локальными координатами $\{x^i\}$ и $\{y^i\}$. Можно доказать, что ни один атлас многообразия S^n не может содержать менее двух карт.

Дадим определение многообразия с краем. Обозначим через $\mathbb{R}_{(-)}^n$ полупространство пространства \mathbb{R}^n , состоящее из точек (x^1, \dots, x^n) , для которых $x^1 \leq 0$.

Определение 5. n -мерное гладкое многообразие с краем — это множество \mathcal{X} с подмножеством \mathcal{Y} и атласом $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$, который

удовлетворяет следующим условиям:

1) Если подмножество U_α данного атласа содержится в $X \setminus Y$, то соответствующее отображение $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ биективно отображает подмножество U_α на некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n ; в противном случае отображение h_α биективно отображает подмножество U_α на некоторое открытое подмножество V_α пространства $\mathbb{R}^n_{(-)}$, причем множество $U_\alpha \cap Y$ отображается на подмножество V_α , состоящее из всех точек, для которых $x^1 = 0$.

2) Если $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ и $\{(U_\beta, h_\beta)\}$ — две карты в X и $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то $h_\alpha \circ h_\beta^{-1} \equiv h_{\alpha\beta}$ есть гладкое биективное отображение множества $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ на $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. \square

Поскольку гомоморфизмы $h_{\alpha\beta}$ переводят внутренние точки во внутренние, а граничные в граничные, то очевидно, что если ограничить на подмножество Y те U_α , которые его пересекают, то они (т.е. множества $U_\alpha \cap Y$) вместе с ограничениями отображений $h_\alpha|_{U_\alpha \cap Y}$ образуют атлас на множестве Y . Многообразие Y называют *краем многообразия* X и обозначают ∂X . Очевидно, что многообразие ∂X имеет размерность $(n - 1)$.

Введем обозначение $\text{int}X = X \setminus \partial X$. Согласно данным определениям, $\text{int}X$ является многообразием (без края). Кроме того, $\partial \partial X = \emptyset$.

Карты, для которых $U_\alpha \cap \partial X = \emptyset$, называются внутренними, а в противном случае — краевыми.

1.2. Векторы на многообразии

Для введения понятия вектора, касательного к произвольному гладкому многообразию, вначале рассмотрим многообразие \mathbb{R}^n .

Пусть $x^i, i = 1, \dots, n$ — некоторые координаты в \mathbb{R}^n , возможно, криволинейные, и $x^i(t), i = 1, \dots, n$ — гладкая кривая. Обозначим через $v^i = \dot{x}^i(t_0)$ вектор, касательный к кривой в точке $x^i(t_0)$. В новых координатах

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$$

имеем ту же кривую

$$x^{i'}(t) = x^{i'}(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

и тот же вектор $v^{i'} = \dot{x}^{i'}(t_0)$, причем

$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dot{x}^i,$$

так что

$$v^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_0 v^i. \quad (1.3)$$

Пусть теперь $A(p)$ — множество карт многообразия \mathcal{X} , содержащих точку p .

Определение 1. *Касательным вектором к многообразию \mathcal{X} (или просто вектором многообразия \mathcal{X}) в точке p называется такое отображение*

$$V : A(p) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

что для произвольных карт

$$(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n) \text{ и } (U', h') = (U', x^1, \dots, x^n) \text{ из } A(p)$$

векторы $V(U, h) = (v^1, \dots, v^n)$ и $V'(U', h') = (v^1, \dots, v^n)$ пространства \mathbb{R}^n связаны формулой (1.3):

$$v^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_p v^i. \quad (1.4)$$

Компоненты v^i вектора V называются *координатами вектора* в локальных координатах карты (U, h) . Обычно записывают: $V = (v^1, \dots, v^n)$. \square

Определение 2. Множество всех векторов многообразия \mathcal{X} в точке p обозначается символом $T_p\mathcal{X}$ и называется *касательным пространством многообразия \mathcal{X} в точке p* . Касательное пространство многообразия \mathcal{X} является линейным пространством

над полем \mathbb{R} относительно линейных операций, определенных формулами:

$$(V + W)(U, h) = V(U, h) + W(U, h),$$

$$(\lambda V)(U, h) = \lambda V(U, h)$$

для любых $V, W \in T_p\mathcal{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Таким образом, если

$$V = (v^1, \dots, v^n), \quad W = (w^1, \dots, w^n),$$

то

$$V + W = (v^1 + w^1, \dots, v^n + w^n),$$

и

$$\lambda V = (\lambda v^1, \dots, \lambda v^n).$$

Имеется очевидный изоморфизм пространства $T_p\mathcal{X}$ и \mathbb{R}^n , который устанавливается следующим образом. В фиксированной карте (U, h) вектор $V = (v^1, \dots, v^n)$ можно воспринимать как вектор в \mathbb{R}^n , имеющий координаты (v^1, \dots, v^n) . Следовательно, изоморфизм

$$T_p\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

задается на карте (U, h) соответствием

$$V(U, h) \mapsto (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n,$$

где v^i , $i = 1 \dots, n$ — координаты вектора V в локальных координатах карты (U, h) . Наоборот, координаты любого вектора из \mathbb{R}^n можно считать координатами некоторого вектора $V(U, h)$ в карте (U, h) . Координаты этого же вектора в любой другой карте из $(U', h') \in A(p)$ получатся при помощи формул пересчета (1.4). Подчеркнем, что изоморфизм (1.5) зависит от карты.

Векторы, переходящие при изоморфизме (1.5) в стандартный базис e_1, e_2, \dots, e_n пространства \mathbb{R}^n , обозначаются символами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p. \tag{1.6}$$

Они составляют базис пространства $T_p\mathcal{X}$, причем координаты произвольного вектора $V \in T_p\mathcal{X}$ относительно этого базиса — это в точности его координаты в карте (U, h) , т.е., если $V = (v^1, \dots, v^n)$ в (U, h) , то

$$V = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad (1.7)$$

и наоборот. Так как запись (1.7) имеет место в любой карте и вследствие закона преобразования компонент вектора (1.4), имеем закон преобразования базисных векторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (1.8)$$

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — два гладких многообразия размерностей n и m , соответственно. Отображение $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *гладким*, если для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и $q = f(p) \in \mathcal{Y}$ и любых карт $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ и $(V, k) = (V, y^1, \dots, y^m)$ многообразий \mathcal{X} и \mathcal{Y} , соответственно, таких, что $p \in U$ и $f(U) \subset V$, имеем

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, m,$$

где f^j — некоторые гладкие функции. Матрица $(\partial f^j / \partial x^i)_p \equiv (\partial y^j / \partial x^i)_p$ линейно отображает вектора $V(U, h)$ в вектора $W(V, k)$ согласно правилу

$$w^j = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p v^i. \quad (1.9)$$

Проверим корректность формулы (1.9). Пусть $(U', h') = (U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$ и $(V', k') = (V', y^{1'}, \dots, y^{m'})$ — другие карты многообразий \mathcal{X} и \mathcal{Y} , причем $p \in U'$ и $q \in V'$. Имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} w^{j'} &= \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j} \right)_q w^j = \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j} \right)_q \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p v^i = \\ &= \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j} \right)_q \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p v^{i'} = \left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial x^{i'}} \right)_p v^{i'}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом, определение (1.9) корректно. Это означает, что отображение (1.9) определяет линейное отображение касательных пространств

$$T_p\mathcal{X} \longrightarrow T_q\mathcal{Y}.$$

Определение 3. Построенное отображение $T_p\mathcal{X} \longrightarrow T_q\mathcal{Y}$ называется *дифференциалом гладкого отображения f* в точке p . Мы будем обозначать его символом $(df)_p$ или df_p . \square

Пусть $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ и $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ гладкие отображения и (U, x^1, \dots, x^n) , (V, y^1, \dots, y^m) , (W, z^1, \dots, z^s) — такие карты многообразий \mathcal{X}, \mathcal{Y} и \mathcal{Z} , что $f(U) \subset V$, $g(V) \subset W$ и $y = f(x)$, $z = g(y)$ — функции, задающие в этих картах отображения f и g . Кроме того, $g \circ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}$ задается в указанных картах согласно $z = g(f(x))$. Тогда имеет место цепное правило

$$d(g \circ f)_p = d g_q \circ d f_p.$$

Здесь справа стоит композиция линейных отображений.

Рассмотрим частный случай, когда $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. В этом случае отображение $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ является гладкой функцией на \mathcal{X} и *дифференциал df_p называется дифференциалом или градиентом функции f в точке p* . Так как $T_q\mathbb{R} = \mathbb{R}$, то градиент является линейным отображением $T_p\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, т.е. ковектором пространства $T_p\mathcal{X}$ или вектором сопряженного пространства $T_p^*\mathcal{X}$, которое также называется кокасательным пространством многообразия \mathcal{X} в точке p . По определению ковектор df_p на любом векторе $V \in T_p\mathcal{X}$ принимает значение (см. (1.9))

$$df_p(V) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p v^i. \quad (1.11)$$

Это значение называют *производной функции f по вектору V* и обозначают символом $Vf = df_p(V)$.

Из данных определений и обозначений получаем $(\partial/\partial x^i)_p f = (\partial f/\partial x^i)_p$ для $i = 1, \dots, n$, что и объясняет выбор обозначений (1.6). Отсюда видно, что базис пространства $T_p^*\mathcal{X}$, сопряженный к базису (1.6) пространства $T_p\mathcal{X}$, состоит из ковекторов

$$dx_p^1, \dots, dx_p^n. \quad (1.12)$$

Действительно, согласно (1.11)

$$dx_p^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right)_p = \delta_i^j \quad \text{и} \quad dx_p^j(V) = v^j.$$

Таким образом, мы имеем разложение дифференциала любой функции по базису (1.12):

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p dx_p^i. \quad (1.13)$$

Замечание. Обратим внимание на то, что градиент является не вектором, а ковектором. \square

Очевидно,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_p \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}.$$

Отсюда следует закон преобразования компонент ковектора при переходе от одних локальных координат к другим:

$$v_i = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_p v_{i'}, \quad v_{i'} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p v_i. \quad (1.14)$$

Если w^i — компоненты вектора в базисе $(\partial/\partial x^i)_p$, то величина $v_i w^i$ не зависит от карты, т.е. является инвариантом. Это вытекает из (1.4) и (1.14).

Аналогично инвариантной записи вектора (1.7), любой ковектор $V \in T_p^* \mathcal{X}$ может быть записан инвариантным образом:

$$V = v_i dx_p^i \quad (1.15)$$

Разработанный аппарат дает возможность определить подмногообразие многообразия \mathcal{X} .

Определение 4. Гладкое отображение $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ m -мерного многообразия \mathcal{Y} в n -мерное многообразие \mathcal{X} называется *погружением в точке* $p \in \mathcal{Y}$, если его ранг в этой точке равен m (что,

конечно, возможно только при $m \leq n$), т.е. если отображение

$$df_p : T_p\mathcal{Y} \longrightarrow T_q\mathcal{X}, \quad \text{где } q = f(p)$$

является мономорфизмом (образ любого ненулевого вектора **не** равен нулю). \square

Определение 5. Гладкое многообразие \mathcal{Y} называется *подмногообразием* многообразия \mathcal{X} , если оно содержится в \mathcal{X} , и соответствующее отображение вложения

$$i : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad i(p) = p$$

является погружением в любой точке $p \in \mathcal{Y}$. \square

Примем без доказательства, что для любой точки p подмногообразия \mathcal{Y} существует такая карта (U, x^1, \dots, x^n) , $p \in U$ многообразия \mathcal{X} , что, во-первых, на некотором открытом в \mathcal{Y} множестве $V \subset U \cap \mathcal{Y}$ ограничения $y^1 = x^1|_V, \dots, y^m = x^m|_V$ первых m координат x^1, \dots, x^m являются локальными координатами на V и, во-вторых, точка $q \in U$ тогда и только тогда принадлежит V , когда $x^{m+1}(q) = 0, \dots, x^n(q) = 0$.

Такие координаты x^1, \dots, x^n мы будем называть *согласованными с подмногообразием \mathcal{Y}* . Очевидно, что для согласованных координат набор векторов $(\partial/\partial x^1)_p, \dots, (\partial/\partial x^m)_p$ является базисом в подпространстве $T_p\mathcal{Y}$ пространства $T_p\mathcal{X}$.

Из данных определений следует, что *край любого многообразия размерности n может рассматриваться как его подмногообразие размерности $(n-1)$* . При этом локальные координаты на \mathcal{X} , согласованные с подмногообразием $\partial\mathcal{X}$, указываются в самом определении края многообразия (см. Определение 5).

1.3. Тензоры и тензорные поля

1.3.1. Определение тензоров

Пусть $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ — произвольная карта многообразия \mathcal{X} , содержащая точку p . Эта карта определяет взаимно-

сопряженные базисы пространств $T_p\mathcal{X}$ и $T_p^*\mathcal{X}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p, \quad \text{и} \quad dx_p^1, \dots, dx_p^n. \quad (1.16)$$

Определение 1. Тензором S_p типа (a, b) на пространстве $T_p\mathcal{X}$ называется отображение, сопоставляющее произвольному базису (1.16) набор n^{a+b} чисел $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$, называемых компонентами тензора S_p в этом базисе. Компоненты тензора S_p в картах (U, h) и (U', h') связаны соотношениями (сравни с (1.4) и (1.14))

$$S_{i'_1 \dots i'_a}^{j'_1 \dots j'_b} = \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial x^{i_a}}{\partial x^{i'_a}}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial x^{j'_b}}{\partial x^{j_b}}\right)_p S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}. \quad (1.17)$$

□

1.3.2. Операции над тензорами

Для тензоров типа (a, b) определена операция сложения

$$(S + T)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} + T_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \quad (1.18)$$

и умножения на число:

$$(\lambda S)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = \lambda \cdot S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \quad (1.19)$$

По отношению к операциям сложения и умножения на числа все тензоры типа (a, b) в точке p образуют линейное пространство.

Кроме этих операций на множестве тензоров определена операция тензорного умножения, обозначаемая символом \otimes .

Приведем простейший пример тензорного умножения. Пусть X и Y — два вектора. Рассмотрим в карте (U, h) набор n^2 чисел

$$S^{ij} = X^i Y^j. \quad (1.20)$$

Если в карте (U', h') n^2 чисел $S^{i'j'}$ построены по тому же правилу (1.20), то очевидно, что эти наборы чисел связаны формулой (1.17). Таким образом, S является тензором типа $(0, 2)$, который получен путем тензорного умножения векторов X и Y . При этом используется обозначение $S = X \otimes Y$.

Дадим общее определение. Пусть имеется тензор S_p типа (a, b) и T_p типа (c, d) . Тогда, по определению, тензор $S_p \otimes T_p = (S \otimes T)_p$ является тензором типа $(a + c, b + d)$ с компонентами

$$(S \otimes T)_{i_1 \dots i_{a+c}}^{j_1 \dots j_{b+d}} = S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \cdot T_{i_{a+1} \dots i_{a+c}}^{j_{b+1} \dots j_{b+d}}. \quad (1.21)$$

Обобщение тензорного произведения на несколько сомножителей очевидно. Имеем следующие свойства тензорного произведения:

$$(\lambda S \otimes T)_p = (S \otimes \lambda T)_p = \lambda(S \otimes T)_p, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.22)$$

$$((R + S) \otimes T)_p = (R \otimes T)_p + (S \otimes T)_p, \quad (1.23)$$

$$((R \otimes S) \otimes T)_p = (R \otimes (S \otimes T))_p. \quad (1.24)$$

Последнее свойство позволяет писать тензорное произведение не расставляя скобок: $(R \otimes S \otimes T)_p$.

Заметим, что, вообще говоря

$$S \otimes T \neq T \otimes S. \quad (1.25)$$

Исходя из изложенного, легко представить базис в пространстве тензоров типа (a, b) в точке p . Это множество всех элементов вида

$$(dx^{i_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{i_a})_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right)_p \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_b}} \right)_p. \quad (1.26)$$

В базисе (1.26) тензор S_p имеет координаты $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$.

У тензора S_p типа (a, b) выберем любой верхний индекс j_s и любой нижний индекс i_r , положим их равными друг другу и просуммируем соответствующие компоненты тензора:

$$\sum_{i=1}^n S_{i_1 \dots i_{r-1} i i_{r+1} \dots i_{a-1}}^{j_1 \dots j_{s-1} i j_{s+1} \dots j_{b-1}} = \tilde{S}_{i_1 \dots i_{a-1}}^{j_1 \dots j_{b-1}}. \quad (1.27)$$

В результате получается тензор типа $(a - 1, b - 1)$ (проверить, что это - действительно тензор). Эта операция над тензором S_p называется *сверткой*.

Определение 2. Если тензор S_p задан для любой точки $p \in \mathcal{X}$, то в карте (U, h) компоненты $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ будут функциями от p или от x^1, \dots, x^n . Если эти функции гладкие, то соответствие $p \rightarrow S_p$ называется *гладким тензорным полем* (или, короче, *тензором*) *типа* (a, b) *на многообразии* \mathcal{X} . \square

Теперь соотношение (1.17) имеет место в каждой точке p многообразия \mathcal{X} , откуда следует, что условие гладкости тензорного поля не зависит от выбора карты.

Замечание. Тензорное поле на многообразии можно рассматривать как соответствие, сопоставляющее каждой карте (U, h) многообразия \mathcal{X} набор гладких функций $S_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}(x)$ на U и обладающих тем свойством, что для любых двух карт (U, h) и (U', h') на пересечении $U \cap U'$ имеет место соотношение (1.17). Это можно принять за **определение** тензорного поля. \square

Все алгебраические операции над тензорами автоматически переносятся на тензорные поля. Например

$$(S \otimes R)_p = S_p \otimes R_p, \quad (S + R)_p = S_p + R_p.$$

Ясно, что из гладких полей при этом всегда получаются гладкие поля.

Совокупность $T_a^b \mathcal{X}$ всех тензорных полей типа (a, b) на многообразии \mathcal{X} является линейным пространством. Это пространство бесконечномерно (при $n > 0$).

При $(a, b) = (0, 0)$ тензорные поля являются гладкими функциями на \mathcal{X} , а линейное пространство $T_0^0 \mathcal{X}$ — линейным пространством $F\mathcal{X}$ гладких функций на \mathcal{X} . Пространство $F\mathcal{X}$ представляет собой по отношению к умножению функций алгебру, причем *умножение $(fS)_p$ превращает линейное пространство $T_a^b \mathcal{X}$ в модуль над алгеброй $F\mathcal{X}$.*

При $(a, b) = (0, 1)$ тензорные поля называются *векторными полями*. Примерами векторных полей на координатной окрестности U являются поля

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : p \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.28)$$

Они называются *i*-ми координатными базисными векторными полями на U . Каждое векторное поле X на U имеет вид

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.29)$$

При $(a, b) = (1, 0)$ тензорные поля называются *ковекторными полями*. Примером ковекторного поля является *i*-е координатное ковекторное поле

$$dx^i : p \longrightarrow (dx^i)_p \quad (1.30)$$

на координатной окрестности U . Каждое ковекторное поле α имеет на U вид

$$\alpha = \alpha_i dx^i \quad (1.31)$$

В (1.29) и (1.31) X^i и α_i , $i = 1, \dots, n$ — некоторые гладкие функции на U .

Для обозначения ковекторных полей по традиции употребляются строчные греческие буквы, а для обозначения векторных полей — прописные латинские буквы из конца алфавита.

Выше было показано (см. (1.11)), что каждый вектор $V \in T_p\mathcal{X}$ позволяет произвольной гладкой функции f сопоставить некоторое число Vf — производную этой функции по вектору V . Отсюда следует, что для любого векторного поля X на многообразии \mathcal{X} и произвольной функции $f \in F\mathcal{X}$ формула

$$(Xf)_p = X_p f, \quad p \in \mathcal{X}$$

определяет на \mathcal{X} некоторую функцию Xf . Из приведенных формул вытекает, что в некоей карте $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ многообразия \mathcal{X} ограничение функции Xf на U определяется на U формулой

$$Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (1.32)$$

где X^i — компоненты векторного поля X в карте (U, h) . Поэтому функция Xf гладка на \mathcal{X} .

1.3.3. Тензорное произведение линейных пространств

Пусть V и W — два линейных пространства. Их тензорное произведение обозначается $V \otimes W$. Пространство $V \otimes W$ является линейным пространством, натянутым на элементы вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \in V$ и $\mathbf{b} \in W$. При этом выполнены следующие свойства: если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a} \in V$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b} \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_2,$$

$$\lambda \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \lambda \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$$

Отсюда видно, что если векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства V , а $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ — базис пространства W , то элементы

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

образуют базис пространства $V \otimes W$.

Тензорное произведение двух линейных пространств очевидным образом обобщается на тензорное произведение любого числа векторных пространств.

Мы видим, что определенные в этом параграфе тензоры типа (a, b) в точке p являются элементами тензорных произведений пространств $T_p \mathcal{X}$, которых имеется b сомножителей, и пространств $T_p^* \mathcal{X}$, которых имеется a сомножителей в этих произведениях. Базис в таком тензорном произведении может быть взят в виде (1.26).

1.4. Дифференциальные формы

Пусть σ — перестановка r чисел $(i_1, \dots, i_r) \xrightarrow{\sigma} (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r))$ и $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки, X_1, \dots, X_r — векторные поля на многообразии \mathcal{X} . Обозначим через $X_{[1} X_2 \dots X_r]}$ антисимметричное тензорное поле типа $(0, r)$, определяемое формулой

$$X_{[1} X_2 \dots X_r]} = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} X_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r)}. \quad (1.33)$$

Если (U, x^1, \dots, x^n) — карта, то очевидно, что компоненты тензора (1.33) в этой карте представляются в виде

$$(X_{[1}X_2 \dots X_{r]})^{i_1 i_2 \dots i_r} \equiv X_{[1}^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_{r]}^{i_r} = \begin{vmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_1^{i_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_r^{i_1} & \dots & X_r^{i_r} \end{vmatrix}. \quad (1.34)$$

Определение 1. Кососимметричное тензорное поле типа $(r, 0)$ на многообразии X называется *дифференциальной формой степени r* на этом многообразии. По определению, r -форма ω принимает следующее значение на наборе векторных полей X_1, X_2, \dots, X_r (в карте (U, x^1, \dots, x^n)):

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_r) = \omega_{i_1 \dots i_r} X_{[1}^{i_1} \dots X_{r]}^{i_r}. \quad (1.35)$$

Конечно, значение (1.35) не зависит от карты. \square

Очевидно, что

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \epsilon_\sigma \omega(X_1, \dots, X_r).$$

По традиции дифференциальные формы обозначаются строчными греческими буквами: $\omega, \theta, \phi, \dots$

Определим *внешнее умножение дифференциальных форм*, для обозначения которого используется символ \wedge . Начнем с базисных 1-форм $dx^i, i = 1, \dots, n$ в карте (U, x^1, \dots, x^n) . Выбирая произвольный набор r индексов (i_1, \dots, i_r) , определим базисную r -форму через внешнее умножение 1-форм $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}$:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma} \epsilon_\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(i_r)}. \quad (1.36)$$

Напомним, что если $X = X^i \partial / \partial x^i$ есть векторное поле, то $dx^i(X) = X^i$. Естественно принять, что

$$(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r})(X_1 \otimes \dots \otimes X_r) = X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}. \quad (1.37)$$

Здесь важен взаимный порядок расположения форм и векторов в тензорных произведениях в скобках.

Сопоставление формул (1.36), (1.37) и (1.34) дает:

$$(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_r})(X_1 \otimes \dots \otimes X_r) = X_{[1}^{i_1} \dots X_r^{i_r]}.$$

Отсюда видно, что естественно определить значение базисной r -формы на векторных полях X_1, \dots, X_r согласно

$$(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_r})(X_1, \dots, X_r) = X_{[1}^{i_1} \dots X_r^{i_r]}. \quad (1.38)$$

Сравнение (1.35) и (1.38) показывает, что любая r -форма может быть представлена в виде

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}. \quad (1.39)$$

По определению внешнее произведение базисных r - и s -форм задается правилом

$$(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}) \wedge (\mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+s}}) = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+s}}. \quad (1.40)$$

Если потребовать, чтобы внешнее умножение было линейно по каждому сомножителю, то формулы (1.39) и (1.40) определяют внешнее произведение любых r - и s -форм. Пусть θ — s -форма, такая что в карте (U, x^1, \dots, x^n) $\theta = \theta_{i_1 \dots i_s} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_s}$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= \omega_{i_1 \dots i_r} \theta_{i_{r+1} \dots i_{r+s}} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+s}} = \\ &= (\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+s}}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь

$$(\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} \theta_{\sigma(i_{r+1}) \dots \sigma(i_{r+s})}.$$

Конечно, в последней формуле антисимметризация внутри первых r и последних s индексов излишня. Удобно исключать лишние операции. Две перестановки σ_1 и σ_2 ($r+s$) чисел

$$\sigma_1(i_1), \dots, \sigma_1(i_r), \sigma_1(i_{r+1}), \dots, \sigma_1(i_{r+s})$$

и

$$\sigma_2(i_1), \dots, \sigma_2(i_r), \sigma_2(i_{r+1}), \dots, \sigma_2(i_{r+s})$$

эквивалентны, если эти перестановки переводятся друг в друга путем отдельных перестановок первых r чисел и последних s чисел; при этом никакие перетасовки между первыми r числами и последними s числами не допускаются. Обозначим через σ' какой-либо представитель класса эквивалентных перестановок. Тогда последняя формула переписывается в виде

$$(\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} = \frac{r!s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} \omega_{\sigma'(i_1) \dots \sigma'(i_r)} \theta_{\sigma'(i_{r+1}) \dots \sigma'(i_{r+s})}. \quad (1.42)$$

Нетрудно проверить, что из данных определений следует формула

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{r+s}) = \\ & = \sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} \omega(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(r)}) \theta(X_{\sigma'(r+1)}, \dots, X_{\sigma'(r+s)}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Отсюда вытекает независимость внешнего произведения дифференциальных форм от выбора карты. Формула (1.43) может быть взята в качестве определения внешнего умножения дифференциальных форм.

Проверим формулу (1.43) в простейшем случае $r = 2$, $s = 1$, когда число классов эквивалентности перестановок равно $3!/2!1! = 3$. Пусть

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \theta = \theta_k dx^k. \quad (1.44)$$

Согласно (1.41)

$$\omega \wedge \theta = \omega_{ij} \theta_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k,$$

и

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge \theta)(X, Y, Z) = \omega_{ij} \theta_k X^i Y^j Z^k = \\ & = \omega_{ij} \theta_k \{ (X^i Y^j - Y^i X^j) Z^k + (Y^i Z^j - Z^i Y^j) X^k + \\ & \quad + (Z^i X^j - X^i Z^j) Y^k \} = \\ & = \omega(X, Y) \theta(Z) + \omega(Y, Z) \theta(X) + \omega(Z, X) \theta(Y), \end{aligned}$$

что совпадает с (1.43)

Приведем свойства внешнего умножения:

1) Для r -формы ω и s -формы θ имеет место свойство кососимметричности:

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega. \quad (1.45)$$

2) Свойство билинейности (формы θ и ϕ одного порядка):

$$\omega \wedge (\theta + \phi) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \phi. \quad (1.46)$$

3) Свойство ассоциативности:

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \phi = \omega \wedge (\theta \wedge \phi) = \omega \wedge \theta \wedge \phi. \quad (1.47)$$

Все дифференциальные формы степени $r \geq 0$ образуют линейное пространство, обозначаемое $\Omega^r \mathcal{X}$. Таким образом, $\Omega^0 \mathcal{X} = F\mathcal{X}$ и $\Omega^1 \mathcal{X} = T_1 \mathcal{X}$. Заметим, что $\Omega^r \mathcal{X} = 0$ для любых $r > n$.

Из (1.38) и (1.39) следует, что

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right) = r! \omega_{i_1 \dots i_r}. \quad (1.48)$$

Пусть $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — произвольное гладкое отображение, а ω — произвольная дифференциальная форма степени $r \geq 0$ на многообразии \mathcal{Y} . Каждой точке $p \in \mathcal{X}$ мы отнесем кососимметрический тензор $(f^* \omega)_p$ типа $(r, 0)$, принимающий на векторах $X_1, \dots, X_r \in T_p \mathcal{X}$ значение

$$(f^* \omega)_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_q((df)_p X_1, \dots, (df)_p X_r), \quad (1.49)$$

где $q = f(p)$ и $(df)_p : T_p \mathcal{X} \rightarrow T_q \mathcal{Y}$ — дифференциал отображения f в точке p . Пусть (U, x^1, \dots, x^n) и (V, y^1, \dots, y^m) — такие карты многообразий \mathcal{X} и \mathcal{Y} , что $fU \subset V$, и пусть

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, m$$

— функции, выражающие в этих картах отображение f . Тогда правая часть определения (1.49) при помощи формул (1.9), (1.35)

и (1.38) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_r) &= \omega_{j_1, \dots, j_r}(y(x)) \frac{\partial y^{j_1}(x)}{\partial x^{i_1}} X_{[1}^{i_1} \dots \frac{\partial y^{j_r}(x)}{\partial x^{i_r}} X_r^{i_r]} = \\
 &= \omega_{j_1, \dots, j_r}(y(x)) \left(\frac{\partial y^{j_1}(x)}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \dots \\
 &\dots \wedge \left(\frac{\partial y^{j_r}(x)}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \right) (X_1, \dots, X_r). \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

Формула (1.50) в свёрнутом виде принимает вид

$$f^*\omega = \omega_{j_1 \dots j_r}(y(x)) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r}, \tag{1.51}$$

если воспринимать dy^j в (4.19) как 1-формы пространства $T_p^*\mathcal{X}$ (см. (1.13)):

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i. \tag{1.52}$$

Таким образом формулы (1.51)-(1.52) *автоматически* определяют форму $f^*\omega$ при отображении $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Определение 2. О форме $f^*\omega$ говорят, что она получена из формы ω *переносом* посредством гладкого отображения f . \square

Ясно, что отображение

$$f^* : \Omega^r \mathcal{Y} \rightarrow \Omega^r \mathcal{X}, \quad \omega \mapsto f^*\omega$$

линейно и перестановочно с внешним умножением:

$$f^*(\theta \wedge \omega) = f^*\theta \wedge f^*\omega$$

для любых форм θ и ω на \mathcal{Y} . Последнее свойство проще всего проверить при помощи формул (1.41), (1.51) и (1.52).

Кроме того, если $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, а если $f = id : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — тождественное отображение, то $f^* : \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{X}$ — также тождественное отображение.

При $r = 0$, когда форма ω является гладкой функцией $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, мы имеем

$$f^*g = g \circ f$$

Это правило переноса функций показывает, что гладкие функции должны быть отнесены к формам степени ноль.

Для произвольного подмногообразия \mathcal{Y} многообразия \mathcal{X} и отображающего его вложения $i : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ отображение

$$i^* : \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{Y}$$

является ничем иным, как *отображением ограничения*, переводящим форму ω на \mathcal{X} в форму $\omega|_{\mathcal{Y}}$ на \mathcal{Y} , для которой

$$(\omega|_{\mathcal{Y}})_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_p(X_1, \dots, X_r)$$

в любой точке $p \in \mathcal{Y}$ и для любых векторов $X_1, \dots, X_r \in T_p \mathcal{Y}$ (где, естественно пространство $T_p \mathcal{Y}$ рассматривается как подпространство пространства $T_p \mathcal{X}$).

1.5. Дифференцирование и интегрирование форм

1.5.1. Внешнее дифференцирование форм

Каждая гладкая функция f на многообразии \mathcal{X} определяет ковекторное поле df , которое в карте (U, x^1, \dots, x^n) представляется согласно (1.13) в виде $df = \partial f / \partial x^i dx^i$. Таким образом, df есть дифференциальная форма степени 1. Мы имеем отображение

$$d : \Omega^0 \mathcal{X} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{X}, \quad f \mapsto df,$$

которое линейно и

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$$

для любых двух функций f и g .

Оказывается, что отображение d естественным образом распространяется на дифференциальные формы любой степени.

Предложение 1. *Для любого гладкого многообразия \mathcal{X} и любого $r \geq 0$ существует единственное отображение*

$$d : \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^{r+1} \mathcal{X},$$

обладающее следующими свойствами:

1°. *Отображение d линейно.*

2°. *Отображение d является антидифференцированием, т.е. для форм θ и ω имеет место равенство*

$$d(\theta \wedge \omega) = d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega,$$

где r — степень формы θ .

3°. *Для любого гладкого отображения $f : X \rightarrow Y$ и любой формы ω на Y имеет место равенство*

$$d f^* \omega = f^* d \omega.$$

4°. *Для каждой функции $f \in \Omega^0 X$ форма df является ее дифференциалом: $df = \partial f / \partial x^i dx^i$*

5°. *Если $\omega = df$, где $f \in \Omega^0 X$, то $d\omega = 0$.*

Доказательство. Докажем сначала единственность.

Пусть (U, x^1, \dots, x^n) — произвольная карта многообразия X , и пусть

$$\omega|_U = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

В силу свойств 1° — 5° немедленно получаем, что

$$\begin{aligned} d(\omega|_U) &= d\omega_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Следовательно, форма $d(\omega|_U)$, а значит, — в силу произвольности координатной окрестности U — и форма $d\omega$ однозначно определяется формой ω . Это означает, что отображение d единственно.

Чтобы доказать его существование, мы на каждой координатной окрестности U определим форму $d(\omega|_U) \equiv d\omega_U$ посредством формулы (1.53). Если (U, x^1, \dots, x^n) и (U', x'^1, \dots, x'^n) — две карты многообразия X и если

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} && \text{на } U \text{ и} \\ \omega &= \omega'_{i'_1 \dots i'_r} dx'^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx'^{i'_r} && \text{на } U', \text{ то} \end{aligned}$$

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \dots i'_r} \quad \text{на } U \cap U',$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \cdot \omega_{i'_1 \dots i'_r} + \\ &+ \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

С другой стороны, для любой функции f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

ибо $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^r \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \cdot \omega_{i'_1 \dots i'_r} \times \\ &\times dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, на $U \cap U'$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \right) = \\ &= d\omega_{i'_1 \dots i'_r} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_r} = \frac{\partial \omega_{i'_1 \dots i'_r}}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_r}, \end{aligned}$$

т.е.

$$d\omega_U = d\omega_{U'}$$

Таким образом, формы $d\omega_U$ согласованы на пересечениях и, значит, составляют дифференциальную форму $d\omega$ степени $r+1$ на многообразии \mathcal{X} , обладающую тем свойством, что

$$d\omega|_U = d\omega_U$$

для любой координатной окрестности U . Тем самым отображение

$$d : \Omega^r \mathcal{X} \longrightarrow \Omega^{r+1} \mathcal{X}$$

построено. Ясно, что оно обладает свойствами 1⁰ и 4⁰. Кроме того, для любой функции $f \in F\mathcal{X}$ в каждой карте (U, x^1, \dots, x^n) имеет место равенство

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

что доказывает свойство 5⁰.

Проверку свойства 2⁰ достаточно произвести в произвольной карте (U, x^1, \dots, x^n) . Кроме того, в силу линейности оператора это свойство достаточно проверить лишь для "одночленных" форм вида

$$\theta = f dx^\alpha, \quad \omega = g dx^\beta,$$

где положено

$$dx^\alpha = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad \text{и} \quad dx^\beta = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}.$$

Но для таких форм

$$\begin{aligned} d(\theta \wedge \omega) &= d(fg dx^\alpha \wedge dx^\beta) = \\ &= d(fg) \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \\ &= df \wedge dx^\alpha \wedge g dx^\beta + (-1)^r (f dx^\alpha) \wedge (dg \wedge dx^\beta) = \\ &= d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega, \end{aligned}$$

что и доказывает свойство 2⁰.

Аналогично, свойство 3⁰ достаточно проверить на координатных окрестностях (U, x^1, \dots, x^n) и (V, y^1, \dots, y^m) , удовлетворяющих соотношению $fU \subset V$. Пусть $y^j = f^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, m$, и $dy^j = \partial y^j / \partial x^i dx^i$ — 1-формы пространства $T_p^* \mathcal{X}$. Тогда, согласно (1.51) и (1.52) и свойству 5⁰

$$\begin{aligned} d(f^* \omega) &= d\left(\omega_{j_1 \dots j_r}(y(x)) dy^{j_1}(x) \wedge \dots \wedge dy^{j_r}(x)\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r}(y(x))}{\partial y^j}\right) dy^j(x) \wedge dy^{j_1}(x) \wedge \dots \wedge dy^{j_r}(x). \end{aligned} \quad (1.55)$$

С другой стороны

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r}}{\partial y^j} dy^j \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r},$$

где 1-формы dy^k являются базисными 1-формами в карте (V, y^1, \dots, y^m) . Поэтому, вследствие (1.51) и (1.52)

$$f^*(d\omega) = \left(\frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r}(y(x))}{\partial y^j} \right) dy^j(x) \wedge dy^{j_1}(x) \wedge \dots \wedge dy^{j_r}(x),$$

что совпадает с (1.55). Следовательно,

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

□

Определение 1. Форма $d\omega$ называется *внешним дифференциалом формы ω* . □

Пример. Для 1-формы $A = A_j dx^j$ имеем

$$dA = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \equiv \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Предложение 2. Для любой дифференциальной формы ω имеет место равенство

$$dd\omega = 0$$

1.5.2. Интегрирование форм. Теорема Стокса.

Определение 1. Карты (U, x^1, \dots, x^n) и $(U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$ n -мерного многообразия \mathcal{X} называются *положительно согласованными*, если либо $U \cap U' = \emptyset$, либо $U \cap U' \neq \emptyset$ и $\det(\partial x^{i'}/\partial x^i) > 0$ на $U \cap U'$ т.е. если в каждой точке $p \in U \cap U'$ базисы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^{1'}} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n'}} \right)_p$$

касательного пространства $T_p\mathcal{X}$ одноименны. Атлас, состоящий из положительно согласованных карт, называется *ориентирующим*. Многообразие \mathcal{X} , на котором существует хотя бы один

ориентирующий атлас, называется *ориентируемым*. \square

Ориентируемое многообразие, в котором выбран ориентирующий атлас, называется *ориентированным*, а выбранный атлас называется *ориентацией*. Карты, принадлежащие ориентации ориентированного многообразия, называются *положительно ориентированными* (или просто *положительными*).

Нетрудно установить, что на связном ориентируемом многообразии существуют две и только две ориентации. Эти ориентации называются *противоположными*. Если \mathcal{X} — многообразие с заданной ориентацией, то снабженное противоположной ориентацией оно обозначается $-\mathcal{X}$.

Замечание. До сих пор предполагалось, что $n > 0$. В вырожденном случае $n = 0$ многообразие \mathcal{X} представляет собой множество изолированных точек. Будем говорить, что нульмерное многообразие \mathcal{X} *ориентировано*, если каждой его точке p сопоставлен знак $\varepsilon(p) = \pm 1$. \square

Определение 2. Многообразие с краем \mathcal{X} называется *ориентируемым* (*ориентированным*), если ориентируемо (ориентировано) многообразие $\text{int}\mathcal{X}$. На ориентированном многообразии краевая карта (U, h) называется *положительной*, если положительна внутренняя карта $(U \cap \text{int}\mathcal{X}, h|_{U \cap \text{int}\mathcal{X}})$. \square

Если (U_α, h_α) — атлас на многообразии \mathcal{X} , то $(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})$, где $V_\alpha = U_\alpha \cap \partial\mathcal{X}$, образует атлас на многообразии $\partial\mathcal{X}$ (см. конец Лекции 1). Карта $(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})$ называется *высеченной* на $\partial\mathcal{X}$ картой (U_α, h_α) .

Покажем, что если краевые карты (U_α, h_α) и (U_β, h_β) положительно согласованы, то соответствующие им высеченные карты $(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})$ и $(V_\beta, h_\beta|_{V_\beta})$ также положительно согласованы.

Действительно, пусть $(U_\alpha, h_\alpha) = (U_\alpha, x^1, \dots, x^n)$ и $(U_\beta, h_\beta) = (U_\beta, y^1, \dots, y^n)$ — две краевые карты на \mathcal{X} . Условия $x^1 = 0$, $y^1 = 0$ задают соответствующие карты на $\partial\mathcal{X}$. Поэтому на $V_\alpha \cap V_\beta$ имеют место равенства

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^k} = 0, \quad k = 2, \dots, n,$$

и

$$\det \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \det \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \quad V_\alpha \cap V_\beta$$

Здесь $i, j = 1, \dots, n$, а $k, l = 2, \dots, n$. С другой стороны, так как $y^1 < 0$ тогда и только тогда, когда $x^1 < 0$, то $\partial y^1 / \partial x^1 > 0$ на $V_\alpha \cap V_\beta$. Отсюда следует, что если две краевые карты на X положительно согласованы, то соответствующие им высеченные на границе ∂X карты также положительно согласованы.

Если краевая карта положительна, то будем говорить, что высеченная ею на границе карта также положительна.

Предположим теперь, что n -мерное многообразие X ориентируемо и ориентировано. Так как при $n > 0$ для любой точки $p \in \partial X$, очевидно, существует положительная карта, содержащая точку p , то все положительные карты на ∂X образуют атлас положительно согласованных карт на ∂X . Об ориентации на ∂X , задаваемой этим атласом, мы будем говорить, что она *индуцирована* ориентацией многообразия X .

При $n = 1$ многообразие X является множеством отрезков, а ∂X состоит из их концов. Ориентация многообразия X задает на каждом из отрезков направление, и мы введем на ∂X ориентацию, считая, что правый конец каждого отрезка имеет знак $+$, а левый — знак $-$.

Таким образом, *край ориентируемого (ориентированного) многообразия является ориентируемым (ориентированным) многообразием.*

Простейшие примеры ориентируемых многообразий без края — это пространство \mathbb{R}^n , сфера S^n , n -мерный тор.

Простейший пример неориентируемого многообразия с краем — лист Мебиуса. Обозначим через L прямоугольник

$$L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \leq x \leq +10, -1 \leq y \leq 1 \}$$

Теперь в пространстве L отождествим точки $(10, y)$ и $(-10, -y)$ для $-1 \leq y \leq +1$. Полученное таким образом пространство X называется листом Мебиуса. Нетрудно понять, что лист Мебиуса — неориентируемое многообразие.

Пусть X — n -мерное ориентированное многообразие (возможно с краем) и ω — n -форма на X . Обозначим через $\int_X \omega$ *интеграл от формы ω по многообразию X* , который определяется следующим образом:

1) Пусть для многообразия \mathcal{X} существует всего одна карта $(\text{int}\mathcal{X}, x^1, \dots, x^n)$, покрывающая все многообразие $\text{int}\mathcal{X}$, эта карта положительна и координаты (x^1, \dots, x^n) заполняют измеримое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Очевидно, форма ω в этой карте имеет вид

$$\omega = \omega(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Тогда, по определению

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \int_G \omega(x) dx^1 \dots dx^n \quad (1.56)$$

Пусть $(\text{int}\mathcal{X}, x^{1'}, \dots, x^{n'})$ — другая такая же положительная карта, покрывающая все многообразие, причем координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ заполняют измеримое множество $G' \subset \mathbb{R}^n$. В этой карте

$$\omega = \omega(x(x')) \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'},$$

и, согласно определению,

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \int_{G'} \rho(x(x')) \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) dx^{1'} dx^{2'} \dots dx^{n'}. \quad (1.57)$$

Так как $\det(\partial x / \partial x') > 0$, то правые части соотношений (1.56) и (1.57) равны. Это доказывает корректность определения интеграла от n -формы по n -мерному многообразию в случае 1).

2) Если многообразие \mathcal{X} таково, что его любая ориентация содержит более одной карты, то многообразие \mathcal{X} следует разбить на такие подмногообразия \mathcal{X}_α (возможно, с краем), что

$$\mathcal{X} = \cup \mathcal{X}_\alpha, \quad \text{int}\mathcal{X}_\alpha \cap \text{int}\mathcal{X}_\beta = \emptyset, \quad \alpha \neq \beta, \quad (1.58)$$

и на каждом подмногообразии $\text{int}\mathcal{X}_\alpha$ существует атлас, состоящий из одной положительной карты. Знак карты на $\text{int}\mathcal{X}_\alpha$ задается ориентацией на \mathcal{X} .

По определению

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{X}_\alpha} i_{\alpha}^* \omega, \quad (1.59)$$

где $i : \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathcal{X}$ — вложение. Легко понять, что правая часть (1.59) не зависит от разбиения многообразия \mathcal{X} согласно (1.58).

Заметим, что *интеграл от дифференциальной формы по многообразию изменяет знак при изменении знака ориентации многообразия.*

Пусть \mathcal{X} — n -мерное многообразие с краем $\partial\mathcal{X}$, ориентация на котором задается ориентацией \mathcal{X} , $i : \partial\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — вложение и ω — $(n - 1)$ -форма на многообразии \mathcal{X} . Поэтому определен интеграл

$$\int_{\partial\mathcal{X}} i^* \omega$$

который для сокращения всегда обозначается символом

$$\int_{\partial\mathcal{X}} \omega$$

Теорема 1. (Теорема Стокса) *Имеет место равенство*

$$\int_{\mathcal{X}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{X}} \omega. \quad (1.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим сначала частный случай многообразия с краем, когда положительная ориентация многообразия $\text{Int}\mathcal{X}$ состоит из одной карты $(\mathcal{X}, x^1, \dots, x^n)$ и ее координаты заполняют n -мерную сферу без границы

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < a^2.$$

Ориентацию многообразия \mathcal{X} возьмем состоящей из двух карт, задаваемых координатами

$$\begin{aligned} (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \dots, \tilde{x}^n) &= (x^1 - \varphi(\rho), x^2, x^3, \dots, x^n), & x^1 > 0, \\ (\tilde{x}^{1'}, \tilde{x}^{2'}, \tilde{x}^{3'}, \dots, \tilde{x}^{n'}) &= (-x^1 - \varphi(\rho), -x^2, x^3, \dots, x^n), & x^1 < 0, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $\rho^2 = (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2$, $\varphi(\rho) = \sqrt{a^2 - \rho^2}$. Граница $\partial\mathcal{X}$ задается условиями

$$\tilde{x}^1 = (x^1 - \varphi(\rho)) = 0, \quad \tilde{x}^{1'} = (-x^1 - \varphi(\rho)) = 0. \quad (1.62)$$

При удалении от границы вглубь многообразия \mathcal{X} обе координаты \tilde{x}^1 и $\tilde{x}^{1'}$ убывают, т.е. становятся отрицательными. Таким образом, атлас (1.61) многообразия \mathcal{X} с краем удовлетворяет тем требованиям, которые были даны в Определении 5 Раздела 1 для атласа многообразия с краем. Более того, обе карты этого атласа положительно согласованы.

Обозначим i и i' вложения частей границы (1.62) в многообразии \mathcal{X} .

Общий вид $(n - 1)$ -формы на n -мерном многообразии таков:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \rho_i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (1.63)$$

Здесь шляпка над 1-формой dx^i означает, что эта форма отсутствует во внешнем произведении в соответствующем слагаемом в правой части равенства (1.63). Формула (1.60) верна для каждого слагаемого в правой части равенства (1.63) в отдельности. Рассмотрим, например, форму

$$\omega = \omega(x) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (1.64)$$

Имеем

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} d\omega &= \int_{0 \leq \rho \leq a} dx^2 \dots dx^n \int_{-\varphi(\rho)}^{\varphi(\rho)} dx^1 \frac{\partial \omega}{\partial x^1} = \\ &= \int_{0 \leq \rho \leq a} dx^2 \dots dx^n \left\{ \omega(\varphi(\rho), x^2, \dots, x^n) - \omega(-\varphi(\rho), x^2, \dots, x^n) \right\}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

С другой стороны, согласно (1.51), (1.52) и (1.61)

$$\begin{aligned} i^* \omega &= \omega(\varphi(\rho), x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ i'^* \omega &= -\omega(-\varphi(\rho), -\tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n) d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n, \end{aligned} \quad (1.66)$$

где оба порядка координат (x^2, x^3, \dots, x^n) и $(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \dots, \tilde{x}^n)$ задают положительную ориентацию. Поэтому

$$\int_{\partial X} (i^* \omega + i'^* \omega) = \int_{\rho < a} \left\{ \omega(\varphi(\rho), x^2, \dots, x^n) - \omega(-\varphi(\rho), x^2, \dots, x^n) \right\} dx^2 \dots dx^n, \quad (1.67)$$

что совпадает с (1.65).

Аналогично доказывается справедливость формулы (1.60) для всех остальных слагаемых в правой части (1.63).

2). Для более сложного случая существо доказательства теоремы Стокса сводится к разбиению многообразия X на отдельные подмногообразия X_α аналогично (1.58). При этом для внутреннейности каждого подмногообразия должен существовать атлас, состоящий из одной карты, координаты которой заполняют простую область в \mathbb{R}^n , для которой формула Стокса уже доказана. В таком случае равенство (1.59) позволяет доказать теорему Стокса в произвольном случае. При этом нужно иметь ввиду, что если границы ∂X_{α_1} и ∂X_{α_2} двух подмногообразий частично пересекаются, то ориентации на этих пересечениях, индуцированные согласованно ориентированными многообразиями, противоположны. Поэтому интегралы по всем внутренним границам, разделяющим разные подмножества разбиения исходного многообразия, взаимно сокращаются, и в (1.60) остаётся лишь интеграл по ∂X .

Мы предоставляем читателю проведение строгого доказательства случая 2).

3). Рассмотрим вырожденный случай $n = 1$. Определим интеграл от 0-формы (т.е. функции) по 0-мерному ориентированному многообразию X формулой

$$\int_X f = \sum_p \varepsilon(p) f(p) \quad (1.68)$$

Для $n = 1$ формула (1.60) принимает вид

$$\int_X df = f(b) - f(a), \quad (6.10)$$

где X — отрезок, направленный от точки a к точке b . Таким образом, для $n = 1$ формула Стокса переходит в *формулу*

Ньютона-Лейбница. \square

Пусть теперь X — n -мерное подмногообразие с краем m -мерного многообразия Y и $i : X \rightarrow Y$ — вложение. Пусть, далее, ω есть $(n - 1)$ -форма в Y . Тогда справедлива

Теорема 1'. (Теорема Стокса для подмногообразий с краем). *Имеет место формула (1.60)*

(Мы заменяем обозначение $i^*\omega$ обозначением ω для сокращения записи).

Теорема 1' непосредственно вытекает из Теоремы 1.

В заключение этого параграфа заметим, что теорема Стокса содержит в себе хорошо известные из курса математического анализа формулы Грина, Гаусса-Остроградского и формулу Стокса в пространстве \mathbb{R}^3 .

Глава 2. Элементы дифференциальной геометрии

2.1. Ковариантное дифференцирование и метрика на многообразии

2.1.1. Ковариантное дифференцирование и связность

Определение 1. Линейное отображение

$$\nabla : T_0^1\mathcal{X} \longrightarrow T_1^1\mathcal{X}$$

называется *ковариантным дифференцированием или связностью*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница, т.е. если для любой функции $f \in T_0^0\mathcal{X}$ и любого векторного поля $X \in T_0^1\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X. \quad (2.1)$$

Напомним, что $df \in T_1^0\mathcal{X}$ является дифференциальной формой, и потому $df \otimes X \in T_1^1\mathcal{X}$. Тензорное поле ∇X типа $(1, 1)$ называется *ковариантным дифференциалом* векторного поля X . \square

Из формулы (2.1) следует, что *отображение ∇ обладает свойством локальности*, т.е. если векторные поля X_1 и X_2 равны вблизи точки $p \in \mathcal{X}$, то тензорные поля ∇X_1 и ∇X_2 также равны вблизи p . Действительно, если $X_1 = X_2$ на окрестности U точки p и если ϕ — гладкая функция на \mathcal{X} , равная единице на некоторой окрестности $W \subset U$ точки p и равная нулю вне U , то векторное поле $\phi(X_2 - X_1)$ тождественно равно нулю на \mathcal{X} и, значит,

$$\nabla[\phi(X_2 - X_1)] = d\phi \otimes (X_2 - X_1) + \phi\nabla(X_2 - X_1) = 0$$

на \mathcal{X} . Здесь первое слагаемое в правой части равно нулю, так как по крайней мере один из сомножителей обращается в нуль. Поэтому

$$\phi\nabla(X_2 - X_1) = 0 \longrightarrow \nabla(X_2 - X_1)|_W = 0 \longrightarrow \nabla(X_2 - X_1)|_U = 0.$$

Так как оператор ковариантного дифференцирования локален, то имеет смысл говорить об его ограничении на открытое подмножество многообразия \mathcal{X} . Если совокупность открытых подмножеств U_α покрывает многообразие \mathcal{X} , то глобальная связность однозначно определена своими ограничениями на U_α .

Пусть U — тривиализующая координатная окрестность в многообразии \mathcal{X} размерности n , т.е. такая окрестность, на которой существует базис векторных полей

$$e_A = e_A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad A = 1, \dots, n, \quad \det e_A^i(x) \neq 0. \quad (2.2)$$

Это значит, что любой вектор $X \in T_0^1 \mathcal{X}$ может быть разложен на U по базису e_A :

$$X|_U = X^A e_A|_U = X^A e_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.3)$$

Из последнего равенства вытекают следующие формулы пересчёта:

$$X^i = e_A^i X^A, \quad X^A = e_i^A X^i, \quad e_i^A e_B^i = \delta_B^A. \quad (2.4)$$

Если $\{X^i\}$ — компоненты вектора X в координатном базисе $\{\partial/\partial x^i\}$, то набор чисел $\{X^A\}$ интерпретируется как совокупность компонент этого вектора в базисе $\{e_A\}$.

Заметим, что из соотношения $dx^{i'} = (\partial x^{i'}/\partial x^i) dx^i$ следует (см. (1.4)), что совокупность чисел dx^i является множеством компонент некоего бесконечно малого вектора. Этот вектор интерпретируется как вектор, начинающийся в точке $p \in \mathcal{X}$ с координатами x^i и заканчивающийся в бесконечно близкой точке $q \in \mathcal{X}$ с координатами $(x^i + dx^i)$. В произвольном базисе координаты этого вектора обозначаются ω^A и согласно (2.4)

$$\omega^A = e_i^A dx^i. \quad (2.5)$$

Формы (2.5) называются *формами смещения*. Следует выписать значение этой формы на произвольном векторе:

$$\omega^A(X) = e_i^A dx^i(X) = e_i^A X^i = X^A. \quad (2.6)$$

Мы воспользовались формулами (1.38) и (2.4).

Очевидно, что совокупность n^2 элементов $\{dx^i \otimes e_B; 1 \leq A, i \leq n\}$ является базисом в $T_1^1 X$, и потому и для каждого $A = 1, \dots, n$ имеет место равенство вида

$$\nabla e_A = \omega_{Ai}^B dx^i \otimes e_B, \quad (2.7)$$

где $\omega_{Ai}^B(x)$ — гладкие функции на U , которые определяются однозначно в силу того что $\{dx^i \otimes e_B\}$ есть базис. Равенство (2.7) записывается также в виде

$$\nabla e_A = \omega_A^B \otimes e_B, \quad \omega_A^B = \omega_{Ai}^B dx^i \in \Omega^1 U \quad (2.8)$$

Для сокращения формул мы вместо $\nabla|_U$ пишем ∇ . При этом *формы связности ω_A^B однозначно определяют дифференцирование.*

Действительно, если $X = X^A e_A$, то используя (2.1) и (2.8), получаем:

$$\nabla X = (dX^A + \omega_A^B X^B) \otimes e_A \equiv \nabla X^A \otimes e_A. \quad (2.9)$$

Пусть U' — другая тривиализующая координатная окрестность с базисом сечений $\{e_{A'}\}$, так что

$$\nabla e_{A'} = \omega_{A'B'}^{B'} \otimes e_{B'} \quad \text{на } U', \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} e_{A'} &= \phi_{A'}^A e_A, & e_A &= \phi_A^{A'} e_{A'}, & e^{A'} &= \phi_A^{A'} e^A, & \phi_{A'}^A \phi_B^{A'} &= \delta_B^A, \\ X &= X^A e_A = X^{A'} e_{A'} \longrightarrow X^{A'} = \phi_A^{A'} X^A \quad \text{на } U \cap U'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Используя (2.1), (2.8) и (2.11), получаем:

$$\begin{aligned} \nabla e_{A'} &= d\phi_{A'}^A \otimes e_A + \phi_{A'}^A \nabla e_A = d\phi_{A'}^A \otimes e_A + \phi_{A'}^B \omega_B^A \otimes e_A = \\ &= (d\phi_{A'}^A + \phi_{A'}^B \omega_B^A) \phi_A^{B'} \otimes e_{B'}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Сопоставляя (2.10) и (2.12), находим закон преобразования 1-формы связности:

$$\omega_{A'}^{B'} = \phi_A^{B'} \phi_{A'}^B \omega_B^A + \phi_A^{B'} d\phi_{A'}^A. \quad (2.13)$$

Обратно, если на окрестностях U и U' заданы ковариантные дифференцирования, действующие соответственно по формулам (2.8) и (2.10), и если на пересечении $U \cap U'$

имеют место соотношения (2.13), то на $U \cap U'$ эти дифференцирования совпадают. Это означает, что справедливо следующее

Предложение 1. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие многообразия X , состоящее из тривиализующих координатных окрестностей. Тогда каждое ковариантное дифференцирование ∇ определяет для любого α 1-формы $\omega^{(\alpha)A}_B$ на U_α , причем для любых α и α' эти формы на окрестности $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ связаны соотношениями (2.13).

Обратно, задание для любого α форм $\omega^{(\alpha)A}_B$, связанных соотношениями (2.13), однозначно определяет ковариантное дифференцирование ∇ , действующее на каждой окрестности U_α по формуле (2.9).

Далее знак тензорного умножения \otimes как правило опускается, так как это не может привести к недоразумению.

При помощи формул (2.9), (2.11) и (2.13) проверяется следующая формула пересчёта:

$$\begin{aligned} \nabla X^{A'} &= dX^{A'} + \omega^{A'}_{B'} X^{B'} = \\ &= d\left(\phi^{A'}_A X^A\right) + \left(\phi^{A'}_A \phi^C_{B'} \omega^A_C + \phi^{A'}_C d\phi^C_{B'}\right) \phi^{B'}_B X^B = \\ &= \left(d\phi^{A'}_A\right) X^A + \phi^{A'}_A dX^A + \phi^{A'}_A \omega^A_B X^B - \left(d\phi^{A'}_A\right) X^A = \phi^{A'}_A \nabla X^A. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При переходе в (2.14) от верхней строки к нижней было использовано тождество (см. (2.11))

$$\phi^C_{B'} \phi^{B'}_B = \delta^C_B \longrightarrow \left(d\phi^C_{B'}\right) \phi^{B'}_B = -\phi^C_{B'} d\phi^{B'}_B, \quad (2.15)$$

которое и далее будет неоднократно использоваться. Из вычислений в (2.14) становится очевидной необходимость введения второго (неоднородного относительно связности) слагаемого в закон преобразования формы связности (2.13). Таким образом, 1-форма связности не является тензорным полем.

Закон преобразования компонент тензоров типа (a, b) в базисе $\{\epsilon_A\}$ вытекает из формул (2.11):

$$T^{B'_1 \dots B'_b}_{A'_1 \dots A'_a} = \phi^{B'_1}_{B_1} \dots \phi^{B'_b}_{B_b} \phi^{A_1}_{A'_1} \dots \phi^{A_a}_{A'_a} T^{B_1 \dots B_b}_{A_1 \dots A_a}. \quad (2.16)$$

В частном случае, когда роль базиса $e_{A'}$ играет координатный базис $\partial/\partial x^i$, в (2.16) делаются замены (сравни с (2.4))

$$\phi_B^{B'} \rightarrow e_B^i, \quad \phi_{A'}^A \rightarrow e_i^A,$$

так что формула (2.16) принимает вид (сравни с (2.4))

$$T_{j_1 \dots j_a}^{i_1 \dots i_b} = e_{B_1}^{i_1} \dots e_{B_b}^{i_b} e_{j_1}^{A_1} \dots e_{j_a}^{A_a} T_{A_1 \dots A_a}^{B_1 \dots B_b}. \quad (2.17)$$

Естественно, все операции над тензорами, описанные выше, остаются справедливыми в общем базисе $\{e_A\}$.

Пусть X и Y — векторные поля на многообразии \mathcal{X} . Обозначим значение формы ∇Y на векторном поле X через $\nabla_X Y$. С учетом (2.8), (2.9) и (1.11) находим:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y^A &= X^i \left(\frac{\partial Y^A}{\partial x^i} + \omega_{B_i}^A Y^B \right) \equiv X^i \nabla_i Y^A \longrightarrow \\ &\longrightarrow \nabla_i Y^A = \left(\frac{\partial Y^A}{\partial x^i} + \omega_{B_i}^A Y^B \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Определение 2. Векторное поле $\nabla_X Y$ называется *ковариантной производной векторного поля Y по векторному полю X* . При $X = \partial/\partial x^i$ оператор ∇_X обозначается символом ∇_i и этот оператор называется *частной ковариантной производной по x^i векторного поля $Y \in T_0^1 \mathcal{X}$* . \square

Ковариантная производная векторного поля естественно обобщается на тензорные поля любой природы. Действительно, естественно определить оператор ∇_i на скалярном поле как частную производную:

$$\nabla_i f(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \equiv \partial_i f(x), \quad f \in F\mathcal{X}. \quad (2.19)$$

Пусть X векторное и Y — ковекторное поле, так что их компоненты в локальном базисе $\{e_A\}$ имеют вид $\{X^A\}$ и $\{Y_A\}$, соответственно. Тогда поле $f = X^A Y_A$ является скалярным. Из естественного требования выполнения правила Лейбница для ковариантной производной

$$\partial_i (X^A Y_A) = (\nabla_i X^A) Y_A + X^A \nabla_i Y_A \quad (2.20)$$

следует явное выражение для ковариантной производной ковекторного поля:

$$\nabla_i Y_A = \partial_i Y_A - \omega_{Ai}^B Y_B. \quad (2.21)$$

Действительно, равенство (2.20) выполняется для любого вектора X лишь в случае выполнения равенства (2.21). Таким образом, ковариантные производные векторного и ковекторного полей согласованы таким образом, что операции тензорной свёртки и ковариантного дифференцирования перестановочны. Это есть определяющее свойство ковариантной производной, однозначно задающее её действие на тензорах любого ранга. Обобщение правила дифференцирования компонент тензора любого ранга $T_{A\dots}^{B\dots}$ очевидно: каждому верхнему индексу в величине $(\nabla_i T)_{A\dots}^{B\dots}$ отвечает слагаемое, пропорциональное $\omega_{\cdot i}^{\cdot}$ со знаком плюс, а каждому нижнему индексу — такое слагаемое со знаком минус, плюс частная производная по $\partial/\partial x^i$ компонент тензора:

$$\nabla_i T_{A\dots}^{B\dots} = \partial_i T_{A\dots}^{B\dots} + (\omega_{C_i}^B T_{A\dots}^{C\dots} + \dots) - (\omega_{A_i}^C T_{C\dots}^{B\dots} + \dots). \quad (2.22)$$

Очевидно обобщение операции ковариантного дифференцирования ∇ на случай тензорного произведения тензоров произвольного ранга. Здесь, так же как и в случае тензорного произведения вектора и ковектора, определяющим является правило Лейбница (см. правую часть равенства (2.20)):

$$\begin{aligned} \nabla_i (T \otimes T' \otimes T'') = \\ = \nabla_i T \otimes T' \otimes T'' + T \otimes \nabla_i T' \otimes T'' + T \otimes T' \otimes \nabla_i T''. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Введём следующие общеупотребимые обозначения, которые далее широко используются:

$$\nabla_i T_{A\dots}^{B\dots} \equiv (T_{A\dots}^{B\dots})_{;i}, \quad \partial_i T_{A\dots}^{B\dots} \equiv (T_{A\dots}^{B\dots})_{,i}. \quad (2.24)$$

Обозначение для частной производной $(\dots)_{,i}$ будет применяться не только по отношению к тензорным полям, но и по отношению к любым полям.

В заключение этого Раздела выпишем аналоги некоторых формул в случае использования координатного базиса. Для (2.4)

и (2.22) имеем:

$$e_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad e_i^A dx^i \rightarrow dx^i, \quad \omega_{Bk}^A dx^k \rightarrow \Gamma_{jk}^i dx^k, \\ (T_{j\dots}^{i\dots})_{;k} = (T_{j\dots}^{i\dots})_{,k} + (\Gamma_{lk}^i T_{j\dots}^{l\dots} + \dots) - (\Gamma_{jk}^l T_{l\dots}^{i\dots} + \dots). \quad (2.25)$$

Аналоги формул (2.11) и (2.13) в локальных координатах принимают вид

$$\phi_{A'}^A \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \\ \Gamma_{j'k'}^{i'} dx^{k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{jk}^i dx^k + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} d\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right). \quad (2.26)$$

Учитывая, что $dx^k = (\partial x^k / \partial x^{k'}) dx^{k'}$ и факт независимости базисных форм $dx^{k'}$, переписываем формулу пересчета компонент связности в удобном виде:

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{jk}^i + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \quad (2.27)$$

2.1.2. Метризованные пространства

Далее мы рассматриваем только метризованные многообразия.

Определение 3. Пусть \mathcal{X} — гладкое многообразие. Гладкая невырожденная квадратичная форма на векторных полях $g(X, X) \in \mathbb{R}$, $X \in T_0^1 \mathcal{X}$ называется *метрикой на многообразии*. \square

Пусть U — тривиализующая координатная окрестность в \mathcal{X} , $\{e_A\}$ — некий локальный базис и $X = X^A e_A$ — какое-либо векторное поле. Согласно Определению 3 метрика задает функцию

$$g(X, X) = g_{AB}(x) X^A(x) X^B(x), \quad g_{AB} = g_{BA}, \quad (2.28)$$

где коэффициенты $g_{AB}(x)$ являются гладкими функциями локальных координат x^i . Более того, симметричная матрица g_{AB}

является невырожденной, и совокупность функций $\{g_{AB}(x)\}$ образует тензорное поле типа $(2, 0)$, называемое *метрическим тензором*, которое при переходе к другому локальному базису преобразуется согласно (2.16). Последнее утверждение является следствием того, что $g(X, X)$ есть скалярное поле.

Напомним тот факт, что всякая квадратичная форма порождает симметричную билинейную форму. Пусть $X = X^A e_A$ и $Y = Y^A e_A$ — векторные поля. Тогда билинейная форма на векторах, которая также называется *скалярным произведением векторов*, определяется согласно правилу

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \{g(X + Y, X + Y) - g(X, X) - g(Y, Y)\} \quad (2.29)$$

С учетом (2.28) скалярное произведение (2.29) записывается в виде

$$g(X, Y)(x) = g_{AB}(x)X^A(x)Y^B(x) = g_{ij}(x)X^i(x)Y^j(x). \quad (2.30)$$

Последнее выражение в правой части (2.30) есть запись скалярного произведения векторов в локальных координатах. Скалярное произведение векторных полей X и Y обозначается также $X \cdot Y$, или (в локальных координатах) $X^i Y_i$, где $Y_i = g_{ij} Y^j$, или $X_i Y^i$. Из введенных обозначений имеем также

$$g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = g_{ji}. \quad (2.31)$$

В метризованном пространстве теряется принципиальное различие между векторами и ковекторами. Действительно, пусть X — векторное поле с компонентами $\{X^A\}$. Тогда совокупность функций $\{X_A\}$, связанных с компонентами вектора согласно

$$X_A = g_{AB} X^B, \quad X^A = g^{AB} X_B, \quad g_{AC} g^{CB} = \delta_A^B \quad (2.32)$$

при переходе к другому локальному базису преобразуется в соответствии с правилом преобразования компонент ковектора. Вообще, любой верхний (нижний) тензорный индекс тензора типа (a, b) может быть опущен (поднят) при помощи метрического тензора (обратного метрического тензора) в соответствии с правилом (2.32). При этом тензор типа (a, b) превращается в тензор типа $(a + 1, b - 1)$ ($(a - 1, b + 1)$).

Так как ω^A является вектором, соединяющим бесконечно близкие точки многообразия, то квадратичная форма относительно этого вектора (см. (2.5), (2.17), (2.28))

$$ds^2 = g_{AB}\omega^A\omega^B = g_{AB}e_i^A e_j^B dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.33)$$

называется *интервалом* между этими точками.

2.1.3. Ортонормированные базисы

Из линейной алгебры известно, что для всякой симметричной невырожденной вещественной матрицы g_{ij} существует такая невырожденная матрица e_a^i , $i, a = 1, \dots, n$, что имеет место равенство

$$e_a^i g_{ij} e_b^j = \eta_{ab}, \quad (2.34)$$

причем матрица η является диагональной и ее диагональные элементы равны ± 1 .

Далее для нас представляют интерес лишь два случая:

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1), \quad (2.35)$$

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1). \quad (2.36)$$

Метрику (2.35) мы будем называть *локально псевдоевклидовой*, а метрика (2.36) называется здесь *локально евклидовой*.

Матричные элементы e_a^i в (2.34) могут быть выбраны гладкими функциями в каждой тривиализующей координатной окрестности. Тогда векторные поля

$$e_a = e_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.37)$$

являются гладкими. Комбинируя (2.31), (2.34) и (2.37), находим:

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab}. \quad (2.38)$$

Очевидно, набор из n векторных полей (2.37) образует базис, который называется *ортонормированным базисом* (ОНБ). Мы видим, что в любой тривиализующей координатной окрестности может быть выбран ОНБ, состоящий из гладких сечений.

2.1.4. Связность, согласованная с метрикой

Определение 4. Связность ∇ на метризованном многообразии \mathcal{X} называется *согласованной с метрикой* (или *метрической*), если для любых векторных полей $X, Y, Z \in T_0^1\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$X(Y \cdot Z) \equiv X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y \cdot Z) = (\nabla_X Y) \cdot Z + Y \cdot (\nabla_X Z). \quad (2.39)$$

□

Предложение 2. Связность ∇ на многообразии \mathcal{X} тогда и только тогда согласована с метрикой, когда ковариантная производная метрического тензора равна нулю, то есть в любой тривиализующей окрестности U

$$g_{AB;i} \equiv g_{AB,i} - \omega_{Ai}^C g_{CB} - \omega_{Bi}^C g_{AC} = 0. \quad (2.40)$$

□

Доказательство. Предположим, что равенство (2.39) имеет место. Распишем подробно левую и правую части этого равенства:

$$\begin{aligned} X^i [g_{AB,i} Y^A Z^B + g_{AB} (Y_{,i}^A Z^B + Y^A Z_{,i}^B)] = \\ = g_{AB} X^i [(Y_{,i}^A + \omega_{Ci}^A Y^C) Z^B + Y^A (Z_{,i}^B + \omega_{Ci}^B Z^C)]. \end{aligned}$$

Переносим все слагаемые в этом равенстве в левую часть, опуская компоненты произвольного вектора X , производя очевидные сокращения слагаемых и переименовывая некоторые индексы, приходим к следующему равенству:

$$[g_{AB,i} - \omega_{Ai}^C g_{CB} - \omega_{Bi}^C g_{AC}] Y^A Z^B = 0. \quad (2.41)$$

Так как векторы Y и Z произвольны, то из равенства (2.41) следует равенство (2.40).

Идя обратным путем, мы получаем из равенства (2.40) равенство (2.39). □

Начиная с этого места метрика пространства-времени считается локально псевдоевклидовой и локальные координаты обозначаются $x^\mu = (x^0, x^i)$, $i = 1, \dots, (n-1)$. Хотя обозначения

соответствуют локально псевдоевклидовой сигнатуре, все нижеприводимые уравнения (с очевидными исключениями) остаются в силе для любой сигнатуры метрики.

В локальных координатах равенство (2.40) принимает вид (см. (2.25))

$$g_{\mu\nu};\lambda = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}g_{\mu\rho} = 0. \quad (2.42)$$

Равенство (2.40) может служить определением связности согласованной с метрикой.

В частном случае ортонормированного базиса, поскольку $\eta_{ab,i} = 0$, равенство (2.40) принимает вид

$$\omega_{ab} + \omega_{ba} = 0, \quad \omega_{ab} = \eta_{ac}\omega_b^c, \quad \omega^{ab} = \omega_c^a\eta^{cb}. \quad (2.43)$$

Везде далее мы рассматриваем лишь связности, согласованные с метрикой.

Ввиду частого использования в дальнейшем, выпишем некоторые из вышеприведенных формул в случае (псевдо)евклидовой метрики. Совокупность величин e_{μ}^a , называемая *тетрадой* в четырехмерном пространстве, является обратной матрицей к матрице e_a^{μ} :

$$e_a^{\mu}e_{\mu}^b = \delta_a^b \longleftrightarrow e_a^{\mu}e_{\nu}^a = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e_{\mu}^ae_{\nu}^b \longleftrightarrow g_{\mu\nu}e_a^{\mu}e_b^{\nu} = \eta_{ab}. \quad (2.44)$$

Имеем аналоги формул (2.5), (2.33):

$$\omega^a = e_{\mu}^a dx^{\mu}, \quad ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b. \quad (2.45)$$

Распишем подробно формулу (2.8) в ОНБ:

$$\nabla_{\mu}e_a = \omega_{a\mu}^b e_b \rightarrow \partial_{\mu}e_a^{\lambda} + \Gamma_{\tau\mu}^{\lambda}e_a^{\tau} = \omega_{a\mu}^b e_b^{\lambda} \quad (2.46)$$

Так как $e_a^{\mu}e_{\mu}^b = \delta_a^b$, то отсюда следует соответствующее уравнение для тетрады, и наоборот:

$$\partial_{\mu}e_a^{\lambda} - \omega_{a\mu}^b e_b^{\lambda} + \Gamma_{\tau\mu}^{\lambda}e_a^{\tau} = 0 \longleftrightarrow \partial_{\mu}e_{\nu}^a + \omega_{b\mu}^a e_{\nu}^b - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}e_{\lambda}^a = 0. \quad (2.47)$$

В физической литературе уравнение (2.47) для тетрады называется "*тетрадным постулатом*".

Выше было показано, что совокупность 1-форм $\omega^a = e^a_\mu dx^\mu$ есть совокупность компонент в ортонормированном базисе бесконечно малого вектора, начинающегося в точке с координатами x^μ и заканчивающегося в точке с координатами $(x^\mu + dx^\mu)$. Напомним общеизвестный факт: в метризованном линейном пространстве ориентированный объём параллелепипеда, построенного на векторах X_1, \dots, X_n , равен $\Omega = X^1_1 X^2_2 \dots X^n_n$ (см. формулу (1.34)) при условии, что компоненты этих векторов $\{X^a_s\}$ взяты в ортонормированном базисе. Поэтому очевидно, что n -форма

$$\Omega = \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} \quad (2.48)$$

задает *ориентированный элемент объема метризованного многообразия* \mathcal{X} . Независимость элемента объема (2.48) от локальных координат очевидна, а его независимость от выбора ОНБ следует из того, что если $\omega^{a'} = \Lambda^{a'}_a \omega^a$, то $\det \Lambda^{a'}_a = \pm 1$. Поэтому изменение ОНБ может привести лишь к изменению знака n -формы (2.48).

Подставим в (2.48) выражения (2.45):

$$\begin{aligned} \Omega &= e^0_{\mu_1} e^1_{\mu_2} \dots e^{n-1}_{\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = \\ &= (\det e^a_\mu) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Согласно (2.44) $|\det e^a_\mu| = \sqrt{|g|}$. Везде далее мы пользуемся стандартным обозначением $g = \det g_{\mu\nu}$.

Из сказанного следует, что *в локальных координатах x^μ положительный элемент объема многообразия имеет вид*

$$dV = \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1} \equiv \sqrt{|g|} d^{(n)}x \quad (2.50)$$

2.2. Тензоры кривизны и кручения

2.2.1. Определение параллельного переноса векторов

Обозначим векторный базис в некоей тривиализующей координатной окрестности U через $\{e_A\}$, x^μ — локальные координаты и пусть $x^\mu(s)$ — гладкая или кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в окрестности U , которую обозначим l . Здесь и далее s

обозначает некий вещественный параметр. Пусть во всех точках кривой l определены векторы $X(s)$, гладко зависящие от параметра s . Будем говорить, что вектор X параллельно переносится вдоль кривой l , если ограничение 1-формы ∇X на l равно нулю:

$$\nabla X|_l = \left(\frac{d x^\mu}{d s} \right) (\nabla_\mu X)^A = \left(\frac{d x^\mu}{d s} \right) (\partial_\mu X^A + \omega_{B\mu}^A X^B) = 0. \quad (2.51)$$

Уравнение (2.51) удобно переписать в следующем виде:

$$d X^A = -\omega_{B\mu}^A(x(s)) d x^\mu(s) X^B = -\omega_B^A|_l X^B. \quad (2.52)$$

Формула (2.52) задает изменение компонент вектора в фиксированном базисе при его параллельном переносе вдоль кривой.

Мы видим, что *следующая задача является корректной и имеющей единственное решение:*

В начальной точке кривой l задан вектор $X(0)$. Найти в каждой точке кривой l вектор $X(s)$, который получается путем параллельного переноса вдоль кривой вектора $X(0)$ из начальной точки (при $s = 0$) в текущую точку кривой, имеющей значение параметра s .

Действительно, согласно (2.52) решение этой задачи сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных линейных уравнений с заданными начальными условиями $X^A(0)$. Если параметр s является скаляром (что всегда имеет место), то совокупность величин $d x^\mu(s)/ds = \dot{x}^\mu(s)$ образует компоненты контравариантного вектора в точке $x^\mu(s)$. Этот вектор называется *касательным к кривой l* .

2.2.2. Геодезические линии

Пусть касательный вектор к кривой l в точке s_0 переносится параллельно вдоль этой кривой в точку s . Если перенесенный таким образом из точки s_0 в произвольную точку s касательный вектор оказывается равным касательному вектору к кривой l в точке s , то такая кривая называется *геодезической линией*.

Таким образом, уравнение геодезической имеет вид

$$\nabla_{X(s)} X(s) = 0, \quad (2.53)$$

где $X(s)$ — касательный вектор к кривой l в точке s .

Заметим, что Ур. (2.53) фиксирует параметр кривой s с точностью до аффинного преобразования $s = \alpha s' + \beta$, где $\alpha \neq 0$ и β — константы.

Действительно, результат параллельного переноса вдоль кривой l в точку s не зависит от параметризации этой кривой. В то же время замена параметра кривой $s \rightarrow s'$ приводит к изменению длины касательного вектора в точке $s'(s)$ согласно $X(s) \rightarrow X(s') = ds/ds' X(s)$. Поэтому лишь при указанной замене параметра кривой Ур. (2.53) остается справедливым.

Параметры геодезической, для которых справедливо Ур. (2.53), называются *аффинными параметрами*.

Рассмотрим Ур. (2.53) в локальных координатах. Для этого в формуле (2.52) следует сделать замену $X^A \rightarrow dx^\mu/ds$:

$$\frac{d^2 x^\mu(s)}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(s)) \frac{dx^\nu(s)}{ds} \frac{dx^\lambda(s)}{ds} = 0. \quad (2.54)$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что Ур. (2.54) имеет единственное решение при заданных $x^\mu(s_0)$ и $\dot{x}^\mu(s_0) \equiv (dx^\mu/ds)(s_0)$. Иными словами, *задание точки, через которую проходит геодезическая, и ее направления в этой точке однозначно определяет геодезическую*.

Геодезическая линия является аналогом прямой линии в евклидовом пространстве.

2.2.3. Тензор кривизны

Пусть l является замкнутой кривой. Это означает, что ее начало и конец совпадают. Замкнутая кривая называется *петлей*. Для петли имеем в локальных координатах

$$x^\mu(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad x^\mu(0) = x^\mu(1). \quad (2.55)$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в точке $x^\mu(0)$ задан вектор $X = X^A e_A$. Перенесем этот вектор параллельно вдоль

петли из точки $x^\mu(0)$ в точку $x^\mu(1)$. В результате получается вектор X' в точке $x^\mu(1) = x^\mu(0)$. Таким образом, есть два вектора в точке $x^\mu(0)$: X и X' . Очевидно, разность векторов $\Delta X = X' - X$ также является вектором в этой же точке. При помощи Ур. (2.52) компоненты вектора $\Delta X = \Delta X^A e_A$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta X^A &= \oint_l d X^A(s) = - \oint_l \omega_B^A(s) X^B(s), \\ \omega_B^A(s) &= \omega_{B\mu}^A(x(s)) dx^\mu(s).\end{aligned}\quad (2.56)$$

Здесь $X^B(s)$ — компоненты вектора, получающегося при помощи параллельного переноса вектора X из точки $x^\mu(0)$ в точку $x^\mu(s)$ вдоль петли l .

Прежде чем продвинуться дальше в вычислениях, сделаем следующее построение.

Без ограничения общности можно считать, что для рассматриваемых локальных координат справедливо равенство $x^\mu(0) = 0$, т.е. начало и конец петли имеют координаты, равные нулю. Рассмотрим семейство координатных лучей, выходящих из точки $x^\mu = 0$. Каждый луч имеет непрерывный индекс $\tau = (\tau^0, \dots, \tau^{n-1})$, причем

$$(\tau^0)^2 + \dots + (\tau^{n-1})^2 = \varepsilon^2. \quad (2.57)$$

При движении вдоль луча изменяется параметр s . Локальные координаты точек, лежащих на луче с индексом τ , таковы:

$$x_\tau^\mu(s) = \tau^\mu s, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (2.58)$$

Очевидно, множество точек, лежащих на лучах (2.57), (2.58), заполняют некую координатную ε -окрестность точки $x^\mu = 0$. Будем считать, что петля находится в этой окрестности. Кроме того, все рассмотренные лучи пересекаются в единственной точке $x^\mu = 0$.

Теперь базис векторов $\{e_A\}$ в точке $x^\mu = 0$ параллельно перенесем вдоль луча $x_\tau^\mu(s)$ в точку s и результат этого переноса обозначим $\{\bar{e}_A\}_{\tau,s}$. Таким образом получается новый базис сечений некой ε -окрестности, обозначаемый $\{\bar{e}_A\}$. Из построения видно, что

$$\nabla \bar{e}_A|_{x^\mu=0} = 0. \quad (2.59)$$

Действительно, согласно определению параллельного переноса (2.51), ковариантная производная переносимого вектора вдоль направления переноса равна нулю. В данном же случае все векторы базиса переносятся параллельно из точки $x^\mu = 0$ по всем направлениям, что фиксируется уравнениями (2.59). Поэтому связность $\bar{\omega}_B^A$ в базисе $\{\bar{e}_A\}$ обращается в нуль при $x^\mu = 0$. В силу гладкости это означает, что существует такая константа C_1 , для которой справедливо неравенство

$$|\bar{\omega}_{B\mu}^A(x)| < C_1 \varepsilon \quad (2.60)$$

если точка x содержится в указанной ε -окрестности.

Так как петля l находится в ε -окрестности, то ее "длина" в метрике $(x^0)^2 + \dots + (x^{n-1})^2$ меньше чем $C_2\varepsilon$. Используя последнее замечание и оценку (2.60), находим при помощи формулы (2.56) оценку:

$$|\Delta X^A| < C\varepsilon^2 \|X\|_0. \quad (2.61)$$

Здесь C — некая константа, а $\|X\|_0$ — норма вектора X в точке $x^\mu = 0$ (например, $\|X\|_0 = |X_{(0)}^0| + \dots + |X_{(0)}^{n-1}|$).

Заметим, что значение ΔX^A в (2.56) зависит лишь от базиса в точке $x^\mu = 0$. Поэтому полученная оценка (2.61) справедлива не только в базисе $\{\bar{e}_A\}_{\tau,s}$, но и любом другом базисе.

Рассмотрим теперь в ε -окрестности векторное поле \bar{X} , которое строится из вектора X , заданного в точке $x^\mu(0) = 0$, путем параллельного переноса вдоль лучей $x_\tau^\mu(s)$. (Очевидно, в базисе $\{\bar{e}_A\}$ координаты векторного поля \bar{X} не зависят от точки, оставаясь равными $X^A(0)$.) Обозначим координаты поля \bar{X} через \bar{X}^A .

Оценим интеграл (2.56) с точностью до $O(\varepsilon^2)$. В этом приближении

$$\Delta X^A = - \oint_l \omega_B^A(s) \bar{X}^B(s). \quad (2.62)$$

Здесь $\bar{X}^B(s)$ означает значение компонент вектора \bar{X} в точке петли l с параметром s .

Действительно, согласно определению поля \bar{X} разность величин $(\bar{X}^B(s) - X^B(s))$ в каждой точке петли l есть разность компонент вектора, возникающая в результате его параллельного

переноса по замкнутой петле. В данном случае замкнутая петля состоит из отрезка луча x_τ^μ , соединяющего точку с координатами $x^\mu(s)$ с точкой $x^\mu = 0$, и куска петли l со значениями параметра s' от нуля до s . Поэтому согласно (2.61) $(\bar{X}^B(s) - X^B(s)) \sim \varepsilon^2$. Отсюда в свою очередь следует, что разность правых частей Ур.(2.56) и (2.62) имеют порядок ε^3 , что нами не учитывается.

Далее, в точке $x^\mu(0)$ имеем равенство $\nabla \bar{X} = 0$ по определению поля \bar{X} . Запишем последнее равенство в виде

$$d\bar{X}^A = -\omega_B^A \bar{X}^B + \zeta^A \quad (2.63)$$

Здесь 1-форма ζ^A имеет порядок ε в ε -окрестности и обращается в нуль в точке $x^\mu(0)$.

Пусть σ — двумерная поверхность с границей $l : \partial\sigma = l$. Воспользуемся теоремой Стокса для вычисления интеграла (2.62):

$$-\oint_{\partial\sigma} \omega_B^A \bar{X}^B = -\int_{\sigma} d(\omega_B^A \bar{X}^B) = -\int_{\sigma} (d\omega_B^A \cdot \bar{X}^B - \omega_B^A \wedge d\bar{X}^B).$$

Используем равенство (2.63) и учтем, что в нашем приближении формой ζ^A можно пренебречь. В результате получим следующий ответ:

$$\Delta X^A = -\frac{1}{2} \left(\int_{\sigma} R_B^A \right) X^B. \quad (2.64)$$

В нашем приближении величины X^B можно считать постоянными, равными компонентам вектора X в точке $x^\mu(0)$. 2-форма

$$R_B^A = 2(d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C) \quad (2.65)$$

называется *тензором кривизны*.

Пусть $\{e_{A'}\}$ — другой базис и $e_{A'} = \phi_{A'}^A e_A$. Тогда 1-форма связности преобразуется согласно (2.13). Легко убедиться при помощи прямого вычисления, что при этом 2-форма (2.65) преобразуется согласно

$$R_{B'}^{A'} = \phi_A^{A'} \phi_{B'}^B R_B^A. \quad (2.66)$$

Закон преобразования (2.66) вытекает также из соотношения (2.64), так как ΔX^A и X^B в (2.64) являются векторами в одной

точке. Поэтому 2-форма R_B^A , переводящая вектор X^B в вектор ΔX^A есть тензор типа $(1, 1)$.

Запишем 2-форму (2.65) в локальном базисе $(\partial/\partial x^\mu)$:

$$\begin{aligned} \omega_{B\lambda}^A dx^\lambda &\rightarrow \Gamma_{\nu\lambda}^\mu dx^\lambda, \quad R_B^A \rightarrow R_\nu^\mu = \\ &= 2 \left[d(\Gamma_{\nu\rho}^\mu dx^\rho) + (\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu dx^\lambda) \wedge (\Gamma_{\nu\rho}^\sigma dx^\rho) \right] = R_{\nu\lambda\rho}^\mu dx^\lambda \wedge dx^\rho, \\ R_{\nu\lambda\rho}^\mu &= \partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \partial_\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Очевидно, совокупность величин (2.67) представляет собой тензор типа $(3, 1)$, антисимметричный по последним двум индексам. Этот тензор называется *тензором Римана или тензором кривизны*.

Полученный нами результат можно сформулировать более наглядным образом. Пусть в координатном пространстве $\{x^\mu\}$ заданы два вектора $V = \{v^\mu\}$ и $W = \{w^\mu\}$. Построим в координатном пространстве параллелограмм со сторонами $(\varepsilon V, \varepsilon W, -\varepsilon V, -\varepsilon W)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот параллелограмм задает петлю l на многообразии. Параллельный перенос вектора X^μ вдоль этой петли приводит к его изменению с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\Delta X^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 (R_{\nu\lambda\rho}^\mu v^{[\lambda} w^{\rho]}) X^\nu. \quad (2.68)$$

Действительно, параметрически поверхность σ , краем которой является петля l , можно задать согласно

$$x^\mu(s, t) = \varepsilon(s v^\mu + t w^\mu), \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

Поэтому на поверхности σ

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \varepsilon(v^\mu ds + w^\mu dt), \\ dx^\lambda \wedge dx^\rho &= \varepsilon^2(v^\lambda w^\rho - v^\rho w^\lambda) ds \wedge dt = \varepsilon^2 v^{[\lambda} w^{\rho]} ds \wedge dt. \end{aligned}$$

Подставляя это в (2.64), получаем соотношение (2.68).

2.2.4. Тензор кручения

Теперь изучим следующую задачу. Пусть в координатном пространстве дана петля $x^\mu(s)$. Так как $x^\mu(0) = x^\mu(1)$, то очевидно, что

$$\oint_l \frac{dx^\mu}{ds} ds = 0. \quad (2.69)$$

В интеграле (2.69) величину dx^μ можно трактовать как бесконечно малый вектор, соединяющий точки s и $(s + ds)$ на петле. Равенство (2.69) выражает лишь тот факт, что петля является замкнутой.

Однако, в кривом пространстве аналогичная задача оказывается принципиально сложнее. Это происходит вследствие того, что бесконечно малые векторы, соединяющие близкие точки на петле, сначала необходимо перенести в одну точку, а затем сложить. В противном случае невозможно получить осмысленный результат.

Для решения поставленной задачи необходимы некоторые построения.

Пусть в ε -окрестности точки $x^\mu = 0$ задан репер $\{e_A(x)\}$. Перенесем вдоль координатного луча (2.58) репер $\{e_A(x)\}$ из точки x^μ в точку $x^\mu = 0$ и обозначим результат $\{\tilde{e}_A(x)\}$. Пусть $\tilde{e}_A(x) = \tilde{\xi}_{(A)}^B(x) e_B(0)$. Формула (2.52) дает изменение координат вектора, переносимого параллельно вдоль кривой. Поскольку в нашем случае $|x^\mu| \sim O(\varepsilon)$ и $dx^\mu = -x^\mu$, мы находим:

$$\tilde{\xi}_{(A)}^B(x) = \delta_A^B + \omega_{A\mu}^B x^\mu + O(|x^\mu|^2). \quad (2.70)$$

Поэтому $\tilde{e}_A(x) - e_A(0) = \omega_{A\mu}^B x^\mu e_B(0) + O(|x^\mu|^2)$. Ещё раз подчеркнём, что все векторы в этом равенстве берутся в одной точке $x^\mu = 0$. Так как $\varepsilon \rightarrow 0$ и x^μ — малы, то последнее равенство переписывается в виде

$$d\tilde{e}_A = \omega_{A\mu}^B dx^\mu \otimes e_B(0) + \delta\tilde{e}_A. \quad (2.71)$$

Векторнозначная 1-форма $\delta\tilde{e}_A$ обращается в ноль в точке $x^\mu = 0$.

Теперь рассмотрим векторнозначную 1-форму θ , которая определяется свойством $\theta(X) = X$. Такая 1-форма имеет вид

$$\theta = e_A \otimes \omega^A. \quad (2.72)$$

Действительно, при помощи (2.6) находим:

$$\theta(X) = e_A \otimes \omega^A(X) = e_A X^A = X.$$

Пусть l — петля в ε -окрестности точки $x^\mu = 0$. Рассмотрим величину $\oint_l \tilde{e}_A \otimes \omega^A$, которая в кривом пространстве является

аналогом интеграла (2.69). Эта величина есть вектор в точке $x^\mu = 0$. Пусть σ — поверхность с краем, так что $\partial\sigma = l$. Тогда согласно теореме Стокса

$$\oint_{\partial\sigma} \tilde{e}_A \otimes \omega^A = \int_{\sigma} d(\tilde{e}_A \omega^A) = \int_{\sigma} (d\tilde{e}_A \wedge \omega^A + \tilde{e}_A d\omega^A).$$

Теперь воспользуемся формулой (2.71). Заметим, что слагаемым $\delta\tilde{e}_A$ в (2.71) можно пренебречь, если нас интересует результат с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Имеем:

$$\oint_l \tilde{e}_A \omega^A = \int_{\sigma} (d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B) e_A = \frac{1}{2} \int_{\sigma} T^A e_A. \quad (2.73)$$

Здесь совокупность 2-форм

$$T^A = 2(d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B) \quad (2.74)$$

при преобразованиях репера преобразуется как компоненты контравариантного вектора. T^A называется *тензором кручения* пространства.

В локальных координатах $\omega^\lambda = dx^\lambda$ и $\omega_\nu^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu dx^\lambda$. Поэтому $T^\mu = 2\Gamma_{\nu\lambda}^\mu dx^\lambda \wedge dx^\nu$, или

$$T_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu. \quad (2.75)$$

Таким образом тензор кручения является тензором типа (2,1). Тензорный характер величины (2.74) следует также непосредственно из формул преобразования (2.11) и (2.13).

Если тензор кручения равен нулю, то из (2.75) следует, что коэффициенты связности симметричны относительно перестановки нижних индексов:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu. \quad (2.76)$$

2.2.5. Структурные уравнения Картана и тождества Бианки

Выпишем выражение для метрики (см. (2.33))

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{AB} \omega^A \omega^B, \quad (2.77)$$

и перепишем уравнения (2.65) и (2.74) в виде:

$$d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B = \frac{1}{2} T_{BC}^A \omega^B \wedge \omega^C, \quad (2.78)$$

$$d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C = \frac{1}{2} R_{BC}^A \omega^C \wedge \omega^D. \quad (2.79)$$

Совокупность уравнений (2.78) и (2.79) называется *структурными уравнениями Картана*.

Обратим внимание на то, что в (2.77) справа нет знака внешнего умножения. В случае ОНБ вместо g_{AB} имеем η_{ab} . *Пространства, в которых тензор кручения равен нулю, называются Римановыми пространствами или пространствами без кручения.*

Вычислим внешний дифференциал от Ур. (2.78) и (2.79). При этом учтем, что $d \circ d = 0$, а также повторно воспользуемся уравнениями (2.78) и (2.79) для исключения 2-форм $d\omega^a$ и $d\omega_b^a$. В результате простых, но длительных вычислений мы получим:

$$R_{[B}^A \]CD] = T_{[BC; D]}^A + T_{F[B}^A T_{CD]}^F, \quad (2.80)$$

$$R_B^A \]CD; F] = -R_B^A \ E[F T_{CD]}^E. \quad (2.81)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\nabla_A \equiv e_A^\mu \nabla_\mu$, для любых величин ζ_{ABC} с тремя нижними (верхними) индексами, антисимметричных относительно перестановки любых двух индексов, величина $\zeta_{[ABC]}$ есть циклическая сумма

$$\zeta_{[ABC]} = \zeta_{ABC} + \zeta_{BCA} + \zeta_{CAB},$$

и она оказывается полностью антисимметричной, что проверяется непосредственно; оператор частного ковариантного дифференцирования определен согласно (2.22), а индекс после точки с запятой означает соответствующее частное ковариантное дифференцирование.

Соотношения (2.80) и (2.81) называются *тождествами Бианки*.

В Римановом пространстве тождества Бианки упрощаются. Запишем их в локальных координатах:

$$R_{\mu[\nu} \]\lambda\rho] = 0, \quad R_{\mu\nu} \]\lambda\rho; \sigma] = 0, \quad R_{\mu\nu} \ \lambda\rho = g_{\mu\sigma} R_{\nu}^{\sigma} \ \lambda\rho. \quad (2.82)$$

Укажем на *основные свойства тензора Римана*, вытекающие из его определения. Хотя эти свойства мы формулируем в ортонормированном базисе, они, очевидно, имеют место в любом базисе. Для $R_{ab\ cd} = \eta_{ae} R_b^e\ cd$ имеем:

1⁰.

$$R_{ab\ cd} = -R_{ab\ dc} \quad (2.83)$$

$$R_{ab\ cd} = -R_{ba\ cd} \quad (2.84)$$

Равенства (2.83) вытекают из того, что $\omega^c \wedge \omega^d = -\omega^d \wedge \omega^c$ (см. (2.79)), а равенства (2.84) являются следствием соотношения (2.43). Подчеркнем, что свойства (2.83) и (2.84) имеют место также и в пространстве с кручением.

2⁰. Следующее свойство справедливо лишь в Римановом пространстве:

$$R_{ab\ cd} = R_{cd\ ab}. \quad (2.85)$$

Для доказательства воспользуемся первым из тождеств Бианки (2.80):

$$(i) = R_{ab\ cd} + R_{ac\ db} + R_{ad\ bc} = 0.$$

Отсюда получаем, переставляя циклически индексы (a, b, c, d) , еще три тождества:

$$(k) = R_{bc\ da} + R_{bd\ ac} + R_{ba\ cd} = 0,$$

$$(h) = R_{cd\ ab} + R_{ca\ bd} + R_{cb\ da} = 0,$$

$$(l) = R_{da\ bc} + R_{db\ ca} + R_{dc\ ab} = 0.$$

С учетом свойств (2.83) и (2.84) имеем:

$$\frac{1}{2} \{(i) + (k) - (h) - (l)\} = R_{ad\ bc} - R_{bc\ ad} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, на одномерном многообразии отсутствует само понятие тензоров кривизны и кручения.

Подсчитаем число независимых компонент тензора кривизны в каждой точке Риманова пространства размерности $n = 2, 3, 4$.

В случае $n = 2$ имеется всего одна компонента тензора Римана $R_{12\ 12}$, причем соотношения (2.83), (2.84) и (2.85) уже никаких ограничений на число компонент не накладывают.

В случае $n = 3$ мы имеем три компонента тензора кривизны вида $R_{ab\ ab}$ и три компонента вида $R_{ab\ ac}$, где индекс c не равен ни a ни b , так как повторяющийся дважды индекс a принимает всего три значения и при каждом фиксированном a любые возможные значения индексов b и c уже не добавляют новых компонент в силу соотношений (2.83), (2.84) и (2.85). Таким образом, при $n = 3$ в каждой точке имеется шесть компонент тензора Римана. Столько же компонент имеет симметричный тензор Риччи

$$R_{ab} = R_a^c{}_{cb}. \quad (2.86)$$

Поэтому из этих линейных соотношений все компоненты тензора Римана могут быть выражены через компоненты тензора Риччи. Далее, путём подбора ОНБ $\{e_a\}$ симметричная матрица R_{ab} может быть приведена к диагональному виду, то есть тензор Риччи полностью определяется всего тремя величинами. Тем самым и тензор Римана в каждой точке также определяется тремя величинами.

В случае $n = 4$ имеется: шесть компонент тензора кривизны вида $R_{ab\ ab}$; двенадцать компонент вида $R_{ab\ ac}$, где индекс c не равен ни a ни b (повторяющийся дважды индекс a принимает всего четыре значения и при каждом фиксированном a любые возможные значения индексов b и c с учетом соотношений (2.83), (2.84) и (2.85) дают дополнительный фактор три); две компоненты вида $R_{ab\ cd}$, где все индексы попарно различны (вследствие соотношений (2.85) имеет смысл учитывать лишь три компонента вида $R_{01\ 23}$, $R_{02\ 31}$, $R_{03\ 12}$, сумма которых в силу тождества Бианки (2.80) равна нулю). Всего имеется в каждой точке двадцать компонент тензора Римана. Путём преобразования ОНБ $\{e_a\}$ можно обратить в нуль 6 компонент тензора Римана, поскольку группа преобразований ОНБ зависит от шести параметров. Таким образом, тензор Римана в четырехмерном пространстве задаётся в каждой точке четырнадцатью независимыми параметрами.

2.3. Явные выражения для коэффициентов связности. Нормальные координаты Римана

2.3.1. Явные выражения для коэффициентов связности

В Римановом пространстве связность легко выражается через метрический тензор. Обозначим $g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu\lambda}$. Тогда (2.42) принимает вид

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\nu\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu\lambda}.$$

Делая здесь две циклические перестановки индексов (μ, ν, λ) , получаем еще два равенства:

$$g_{\nu\lambda,\mu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu},$$

$$g_{\lambda\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}.$$

Сложим первые два равенства и вычтем третье. Учитывая (2.76), находим:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \right) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \nu \ \lambda \\ \mu \end{array} \right\}. \quad (2.87)$$

Если кручение не равно нулю, то, учитывая Ур. (2.75) и определение $T_{\lambda\mu\nu} \equiv g_{\lambda\rho}T_{\mu\nu}^{\rho}$, аналогичным образом получается формула

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \nu \ \lambda \\ \mu \end{array} \right\} - \frac{1}{2}T_{\nu\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} (T_{\lambda\nu\sigma} + T_{\nu\lambda\sigma}). \quad (2.88)$$

Выражение (2.87) называется *символом Кристоффеля*.

Далее будет использоваться выражение для связности в Римановом пространстве в ОНБ, которое легко находится. Для этого предварительно необходимо установить явный вид форм ω^a . Практически это делается путем диагонализации (приведения к сумме квадратов) метрики (см. равенства (2.45)). Пусть $d\omega^a = C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c$, где $C_{bc}^a = -C_{cb}^a$ — известные коэффициенты постольку, поскольку формы ω^a известны. Пусть $\omega_b^a = \gamma_{bc}^a \omega^c$. Из уравнений структуры (Ур. (2.78) в ОНБ с нулевой правой частью) имеем

$$C_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{abc} - \gamma_{acb}).$$

Как обычно $C_{abc} = \eta_{ad} C_{bc}^d$, и $\gamma_{abc} = \eta_{ad} \gamma_{bc}^d$, $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$. Последнее равенство является следствием согласованности связности и метрики. Циклически переставляя индексы (a, b, c) два раза, получаем еще два аналогичных уравнения. Складывая первые два из них и вычитая третье, находим однозначное решение:

$$\omega_{ab} = (C_{abc} - C_{bac} - C_{cab}) \omega^c. \quad (2.89)$$

В случае наличия кручения к правой части следует добавить выражение $(T_{bac} - T_{abc} + T_{cab}) \omega^c / 2$, где $T_{bac} = \eta_{bd} T_{ac}^d$.

Для иллюстрации изложенной теории в качестве простейшего примера рассмотрим Риманову геометрию на поверхности сферы радиуса a в пространстве \mathbb{R}^3 . Метрика на поверхности в сферических координатах имеет вид

$$d s^2 = a^2 (d \theta^2 + \sin^2 \theta d \phi^2) = \omega_\theta^2 + \omega_\phi^2. \quad (2.90)$$

Отсюда видно, что в ОНБ (e_θ, e_ϕ)

$$\omega_\theta = a d \theta, \quad \omega_\phi = a \sin \theta d \phi. \quad (2.91)$$

Теперь легко найти связность при помощи Ур.(2.78) с нулевой правой частью. Имеем $d \omega_\phi = a \cos \theta d \theta \wedge d \phi$ или $d \omega_\phi - a^{-1} \text{ctg} \theta \omega_\theta \wedge \omega_\phi = 0$. Сравнивая это уравнение с уравнением структуры $d \omega_\phi + \omega_{\phi\theta} \wedge \omega_\theta = 0$, получаем, что

$$\omega_{\theta\phi} = -\omega_{\phi\theta} = -a^{-1} \text{ctg} \theta \omega_\phi + \gamma \omega_\theta.$$

Так как $d \omega_\theta = 0$, то второе структурное уравнение упрощается: $\omega_{\theta\phi} \wedge \omega_\phi = 0 \rightarrow \gamma = 0$. Отсюда окончательно получаем:

$$\omega_{\theta\phi} = -a^{-1} \text{ctg} \theta \omega_\phi.$$

Вычисляя внешний дифференциал от формы связности, находим

$$d \omega_{\theta\phi} = a^{-2} \omega_\theta \wedge \omega_\phi.$$

Следовательно, единственная отличная от нуля компонента тензора Римана в выбранном нами ОНБ имеет вид

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = a^{-2}.$$

2.3.2. Ковариантная дивергенция. Оператор д'Аламбера.

Выпишем в Римановом пространстве величину $\nabla_\mu J^\mu$ для векторного поля, которая является *аналогом дивергенции*. Согласно (2.25) имеем:

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\mu J^\nu, \quad (2.92)$$

где, согласно (2.87)

$$\Gamma_{\nu\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}.$$

Напомним обозначение: $g = \det g_{\mu\nu}$. Тогда $dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$. Действительно, $gg^{\mu\nu}$ есть минор элемента $g_{\mu\nu}$ в соответствующем определителе. При вычислении величины dg следует взять сумму всех дифференциалов $dg_{\mu\nu}$, умноженных на свои миноры. Поэтому

$$g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^\nu}, \quad \Gamma_{\nu\mu}^\mu = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\nu}.$$

Отсюда

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} J^\mu \right). \quad (2.93)$$

Выпишем также в Римановом пространстве выражение для *оператора д'Аламбера*. Пусть ϕ — скалярное поле. В качестве компонент вектора возьмем величины $g^{\mu\nu} \partial\phi/\partial x^\nu$. Согласно (2.93) имеем:

$$-\square\phi \equiv \phi_{;\mu}^{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.94)$$

Нам понадобится также формула для $\nabla_\nu T_\mu^\nu$, где $T^{\mu\nu}$ — симметричный тензор. Имеем по определению

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T_\mu^\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T_\mu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\nu = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^\nu + T_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln \sqrt{|g|} - \Gamma_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\nu}, \end{aligned}$$

но, так как $T^{\lambda\nu} = T^{\nu\lambda}$, то

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}T^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\lambda})T^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}T^{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}.$$

Поэтому

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{|g|} T^\nu_\mu) - \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}. \quad (2.95)$$

Формула (2.93) имеет и другое лицо. Рассмотрим $(n - 1)$ -форму

$$\omega_J = \frac{1}{(n - 1)!} E_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} J^{\mu_1} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (2.96)$$

Здесь $J^\mu(x)$ — компоненты векторного поля, а $E_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(x)$ — абсолютно антисимметричный псевдотензор в кривом пространстве:

$$E_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(x) = \sqrt{|g(x)|} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}, \quad (2.97)$$

где $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ — символ Леви-Чивита, то есть совокупность числовых величин, принимающих одно из трёх значений $0, \pm 1$, причём $\varepsilon_{012\dots(n-1)} = 1$ и любая перестановка индексов сохраняет либо изменяет знак в зависимости от чётности перестановки. Легко найти результат преобразования совокупности величин (2.97) при переходе к другим локальным координатам, если эту совокупность величин подвергнуть тем же преобразованиям, что и тензор типа $(n, 0)$:

$$\begin{aligned} E_{\mu'_1\dots\mu'_n}(x(x')) &= \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \sqrt{|g(x)|} \varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n} \\ &= \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \sqrt{|g(x)|} \varepsilon_{\mu'_1\dots\mu'_n}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Учтём, что

$$g_{\mu'\nu'}(x'(x)) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'(x'(x)) = \left[\det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right]^2 g(x). \quad (2.99)$$

Сопоставляя (2.98) и (2.99), находим:

$$E_{\mu'_1 \dots \mu'_n}(x(x')) = \pm \sqrt{|g'(x')|} \varepsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_n}. \quad (2.100)$$

В (2.100) справа знак определяется знаком величины $\det(\partial x / \partial x')$. Тем самым установлено, что совокупность числовых величин (2.97) и величина (2.96) являются псевдотензором и глобальной $(n-1)$ -формой, соответственно.

Вычислим внешний дифференциал формы ω_J :

$$\begin{aligned} d\omega_J &= \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} J^{\mu_1} \right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{(n-1)!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^\mu \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \right]. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Здесь оба индекса μ и μ_1 не равны ни одному из попарно различных индексов μ_2, \dots, μ_n , и потому $\mu = \mu_1$. Следовательно, правая часть (2.101) переписывается как

$$\begin{aligned} d\omega_J &= \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} J^\mu \right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{n!} E_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Пусть \mathcal{Y} — подмногообразие размерности n с краем или просто некая область в \mathcal{X} с регулярной границей. В частности, подмногообразие \mathcal{Y} может совпадать с \mathcal{X} . Согласно теореме Стокса

$$\int_{\mathcal{Y}} d\omega_J = \int_{\partial \mathcal{Y}} \omega_J.$$

Зафиксируем ориентацию локальных систем координат так, чтобы вторая квадратная скобка в (2.102) была положительна, а значит, совпадала с элементом объема (2.50). Тогда последнее равенство переписывается в более привычной форме:

$$\int_{\mathcal{Y}} (\nabla_\mu J^\mu) dV = \int_{\partial \mathcal{Y}} J^\mu dS_\mu. \quad (2.103)$$

Элемент площади $(n - 1)$ -мерной гиперповерхности задается формой

$$dS_\mu = \frac{1}{(n - 1)!} E_{\mu\mu_1 \dots \mu_{n-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{n-1}}. \quad (2.104)$$

Из (2.103) вытекает, что *обращение в нуль ковариантной дивергенции (2.93) влечет за собой сохранение некоего заряда*. Действительно, пусть подмногообразие \mathcal{Y} представляет собою в локальных координатах слой, ограниченный условием $0 \leq x^0 \leq t$. Имеем $dx^0|_{\partial\mathcal{Y}} = 0$. Поэтому в данном случае согласно (2.104) отличной от нуля будет лишь dS_0 , которая в локальных координатах x^μ на гиперплоскости $x^0 = t$ равна

$$dS_0 = \sqrt{|g|}\Big|_t dx^1 \dots dx^{n-1} = dS_{(t)}.$$

Вследствие равенства нулю обеих частей Ур.(2.103) имеем

$$Q = \int \left(J^0 \sqrt{|g|} \right)_t dx^1 \dots dx^{(n-1)} = \text{Const}. \quad (2.105)$$

Величина Q оказывается сохраняющейся и называется *зарядом тока* J^μ .

В более общем случае предположим, что граница подмногообразия \mathcal{Y} состоит из двух несвязных частей $\partial_+\mathcal{Y}$ и $\partial_-\mathcal{Y}$. Тогда при непрерывном изменении конфигурации части границы $\partial_+\mathcal{Y}$ заряд

$$Q = \int_{\partial_+\mathcal{Y}} J^\mu dS_\mu \quad (2.106)$$

сохраняется, если $\nabla_\mu J^\mu = 0$.

2.3.3. Нормальные координаты Римана

Выберем произвольную точку $p \in \mathcal{X}$ и построим вблизи неё такую локальную систему координат x^a , в которых метрика максимально близка к псевдоевклидовой и связность в точке p обращается в нуль. Опишем процесс построения таких координат.

Проведем из точки p геодезические по всем направлениям (см. Рис. 2.1). Назовем множество таких геодезических связкой геодезических в точке p . Пусть $\{e_a\}$ — некий ОНБ в точке p . Зададим

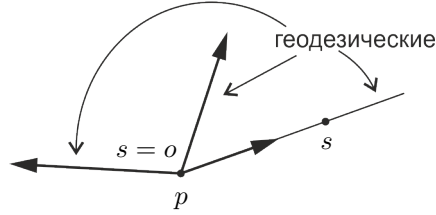


Рис. 2.1. Пучок геодезических, пересекающихся в точке p

аффинный параметр s (см.(2.53)-(2.54)) на каждой геодезической. Точка p принадлежит всем геодезическим и по предположению на каждой геодезической в точке p $s = 0$. Пусть

$$v^a = e^a_{\mu} \left. \frac{dx^{\mu}(s)}{ds} \right|_p. \quad (2.107)$$

Здесь $dx^{\mu}(s)/ds|_p$ — вектор, касательный к некоей геодезической в точке p . Очевидно, набор величин $\{v^a\}$ однозначно задает геодезическую. Введем координаты

$$x^a(s) = v^a s, \quad (2.108)$$

которые по определению являются координатами точки на геодезической, выходящей из точки p с касательным вектором v^a , и отстоящей от точки p на расстояние s . Это и есть нормальные координаты Римана. Таким образом, в точке p нормальные координаты Римана равны нулю. Вместе с тем Ур. (2.108) является уравнением соответствующей геодезической. Дальнейшие построения направлены на вычисление метрического тензора в нормальных координатах Римана.

Далее в этом разделе мы используем только нормальные координаты Римана x^a , но обозначаем их до особой оговорки x^{μ} . Заметим, что аффинный параметр геодезической остаётся таковым в любых локальных координатах, что очевидно из бескоординатной записи уравнения геодезической (2.53). В рассматриваемом случае из уравнения геодезической $x^{\mu}(s) = v^{\mu} s$ следует, что касательный вектор к этой геодезической

$$\frac{dx^{\mu}(s)}{ds} = v^{\mu} = \text{const}, \quad (2.109)$$

и для символов Кристоффеля находим:

$$\frac{d^2 x^\mu(s)}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(s)) \frac{dx^\nu(s)}{ds} \frac{dx^\lambda(s)}{ds} = 0 \rightarrow \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(vs) v^\nu v^\lambda = 0. \quad (2.110)$$

Перенесем базис $\{e_a\}$ из точки $x^\mu = 0$ параллельно в точку $x^\mu(s)$ вдоль геодезической, соединяющей эти две точки. Сделаем это для каждой геодезической. В полученном таким образом базисе ограничение формы связности на каждую геодезическую из рассматриваемой связки геодезических обращается в нуль:

$$\omega_\mu^{ab}(vs) d(v^\mu s) = 0 \rightarrow \omega_\mu^{ab}(vs) v^\mu s = 0. \quad (2.111)$$

Воспользуемся тетрадным постулатом (2.47):

$$(\partial_\mu e_\nu^a)(vs) + \omega_{b\mu}^a(vs) e_\nu^b(vs) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(vs) e_\lambda^a(vs) = 0. \quad (2.112)$$

Спроектируем ковекторные индексы μ и ν в (2.112) на тензор $v^\mu \otimes v^\nu$, где вектор v^μ является касательным к соответствующей геодезической (см. (2.109)):

$$v^\nu v^\mu (\partial_\mu e_\nu^a)(vs) = 0. \quad (2.113)$$

Мы воспользовались равенствами (2.110) и (2.111). Заметим, что дифференциальный оператор $v^\mu \partial_\mu$ действует вдоль геодезической, и потому $v^\nu v^\mu \partial_\mu = v^\mu \partial_\mu v^\nu$, так как вдоль геодезической касательный вектор постоянен. Поэтому равенство (2.113) переписывается как

$$v^\mu \partial_\mu (e_\nu^a v^\nu)(vs) = 0.$$

Из последнего равенства вытекает необходимый результат:

$$e_\nu^a v^\nu(vs) = e_\nu^a v^\nu(s=0) = v^a. \quad (2.114)$$

Рассмотрим многообразие $\mathcal{X} \times I$, где I — единичный отрезок с координатой $0 \leq t \leq 1$. Таким образом, на многообразии $\mathcal{X} \times I$ вблизи точки p локальными координатами является пара $\{x^\mu, t\}$, где x^μ — нормальные координаты Римана. Определим (локально) гладкое отображение пространств

$$\mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{X}, \quad (2.115)$$

согласно правилу

$$\bar{x}^\mu = tx^\mu. \quad (2.116)$$

Здесь \bar{x}^μ — нормальные координаты Римана вблизи точки $p \in \mathcal{X}$. Отображение многообразий (2.115) влечёт отображение

$$\Omega^*\mathcal{X} \rightarrow \Omega^*(\mathcal{X} \times I), \quad (2.117)$$

которое реализуется путём подстановки во все формы в $\Omega^*\mathcal{X}$ полных дифференциалов

$$d\bar{x}^\mu = x^\mu dt + t dx^\mu. \quad (2.118)$$

Поскольку отображение (2.117) линейное, то оно сохраняет все соотношения между формами. В частности, в формах связности ω^{ab} и смещения ω^a (см. (2.45)) делаем замену $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$, $dx^\mu \rightarrow d\bar{x}^\mu$. Вследствие (2.111)

$$\omega_\mu^{ab}(\bar{x})(x^\mu dt + t dx^\mu) = t\omega_\mu^{ab}(\bar{x}) dx^\mu = \bar{\omega}^{ab}, \quad \bar{\omega}^{ab}|_{t=0} = 0. \quad (2.119)$$

Имеем также

$$\begin{aligned} \omega^a &= e_\mu^a(\bar{x})(x^\mu dt + t dx^\mu) = e_\mu^a(vst)(v^\mu s dt + t dx^\mu) = \\ &= x^a dt + \bar{\omega}^a, \quad \bar{\omega}^a|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

С этого места мы возвращаемся к начальному обозначению нормальных координат Римана x^a . Здесь формы $\bar{\omega}^{ab}$ и $\bar{\omega}^a$ разлагаются лишь по формам dx^a , но они не содержат форму dt .

Вычислим внешние дифференциалы форм (2.119) и (2.120):

$$d\omega^{ab} = dt \wedge \frac{\partial \bar{\omega}^{ab}}{\partial t} + \delta \bar{\omega}^{ab}, \quad d\omega^a = dt \wedge \left(-dx^a + \frac{\partial \bar{\omega}^a}{\partial t} \right) + \delta \bar{\omega}^a. \quad (2.121)$$

Здесь символ δ означает внешнее дифференцирование относительно переменных x^a . Теперь подставим правые части Ур. (2.121) в структурные уравнения (2.78) и (2.79) с нулевым тензором кручения и выделим члены, пропорциональные dt . В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \bar{\omega}^a}{\partial t} = dx^a + \bar{\omega}_b^a x^b, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_b^a}{\partial t} = R_{b\ cd}^a x^c \bar{\omega}^d, \quad \bar{\omega}^{ab}|_{t=0} = \bar{\omega}^a|_{t=0} = 0. \quad (2.122)$$

Уравнения (2.122) легко решаются методом итераций относительно параметра t . Находим с точностью $O(t^3)$:

$$\bar{\omega}^a = t dx^a + \frac{1}{6}t^3 R_{b\ cd}^a x^b x^c dx^d, \quad \bar{\omega}_b^a = \frac{1}{2}t^2 R_{b\ cd}^a x^c dx^d. \quad (2.123)$$

Очевидно, при $t = 1$ $\bar{\omega}^a = \omega^a$, $\bar{\omega}_b^a = \omega_b^a$. Поэтому имеем:

$$ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b = g_{ab} dx^a dx^b, \quad g_{ab} = \eta_{ab} + \frac{1}{3}R_{ac\ db}x^c x^d, \\ \omega_b^a = \frac{1}{2}R_{b\ cd}^a x^c dx^d. \quad (2.124)$$

В (2.123) и (2.124) тензор кривизны берется в точке p .

Таким образом, *можно так выбрать координаты, что связность обращается в нуль в любой заданной точке.*¹ Построенные координаты называются *Нормальными координатами Римана*, эта система координат здесь обозначаются K_0 .

Следует заметить, что однородные преобразования Лоренца трансформируют нормальные координаты Римана в нормальные координаты Римана в той же точке многообразия.

Если $R_{ab\ cd} = 0$ в точке p , то вблизи точки p отклонение метрики от псевдоевклидовой еще меньше. Если же $R_{ab\ cd} = 0$ везде, то из Ур. (2.122) следует, что во всем пространстве координаты можно выбрать так, что метрика будет везде псевдоевклидовой, т.е. в этом случае пространство-время псевдоевклидово (если не учитывать его глобальных топологических свойств).

¹Можно показать, что надлежащим выбором системы координат можно обратить в нуль все $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ вдоль заданной мировой линии.

Часть II

Геометродинамика

Глава 3. Основные уравнения общей теории относительности

3.1. Введение. Движение свободной частицы

3.1.1. Ключевые идеи общей теории относительности

Теперь мы готовы приступить к изложению общей теории относительности.

Важным шагом на пути построения общей теории относительности было утверждение А. Пуанкаре о том, что специальная теория относительности недостаточна, корректная теория должна включать, кроме электромагнитного, также и гравитационное взаимодействие, скорость распространения которого совпадает со скоростью распространения электромагнитного взаимодействия.

Ключевая идея теории об органической связи геометрии (метрики) пространства-времени и гравитации принадлежит А. Эйнштейну. Окончательная формулировка уравнений общей теории относительности была предложена А. Эйнштейном. Одновременно Д. Гильберт сформулировал лагранжев метод вывода уравнений.

Главные идеи общей теории относительности (ОТО) сводятся к следующим.

1) Динамическая идея.

Согласно ОТО, *инертная масса совпадает с гравитационной массой. Этот закон называется принципом эквивалентности.*

Из принципа эквивалентности следует, что все тела, независимо от их массы, движутся в гравитационном поле (при условии отсутствия всяких прочих сил) в точности одинаково (разумеется, если можно пренебречь размером этих тел по сравнению с неоднородностями гравитационного поля, в котором они движутся). Это означает также, что в малой области мира, где гравитационное поле достаточно однородно, любое поле тяготения может быть уничтожено с помощью преобразования координат.

Такая система координат K_0 может быть мысленно реализована в виде свободно парящего, достаточно малого ящика, на который не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяготения, под действием которой он свободно падает. И наоборот, гравитация может быть искусственно создана в неинерциальной системе отсчёта. Например, пусть координаты (t', x', y', z') неинерциальной системе отсчёта, которая вращается вокруг оси z инерциальной системы с угловой скоростью ω , связаны с нештрихованными координатами инерциальной системы согласно

$$\begin{aligned} t &= t', & z &= z' \\ x &= x' \cos \omega t' + y' \sin \omega t', & y &= -x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В штрихованных координатах обычная метрика Минковского принимает вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \\ &= [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)] dt'^2 - \\ &- 2\omega(y' dx' - x' dy') dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Хотя в метрике (3.2) тензор кривизны отсутствует, легко убедиться на опыте, что во вращающейся штрихованной системе отсчёта искусственная сила тяжести прижимает все предметы к внешней стенке карусели.

Отсюда возникает

2) Геометрическая идея.

Пространство-время не является плоским псевдоевклидовым, а является Римановым пространством с локально-псевдоевклидовой метрикой. Кривизна пространства-времени обусловлена гравитационным полем.

Таким образом, все физические явления происходят в искривлённом Римановом пространстве-времени. Локальные координаты этого пространства обозначаются x^μ , $\mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3$. Метрический тензор заключает в себе всю информацию о гравитационном поле. Координата x^0 считается временной. Координаты x^i , $i = 1, 2, 3$ — пространственные.

3) Идея общей ковариантности.

Согласно этой идее, *математическая формулировка теории осуществляется в общековариантной форме, т.е. все уравнения теории являются тензорными* (в частности, скалярными, векторными и т.д.).

Отсюда следует, что *все уравнения теории имеют одинаковую форму в любых локальных координатах.*

Далее мы занимаемся развитием теории на основе сформулированных идей.

Математически рассмотрение физических явлений в системе локальных координат свободно парящего лифта K_0 означает выбор таких локальных координат x^a , для которых метрика максимально близка к псевдоевклидовой и связность локально (внутри описанного ящика) обращается в нуль. Очевидно, что именно такими координатами являются нормальные координаты Римана с центром внутри лифта (см. Раздел 8.3). Поскольку метрика локально псевдоевклидова, то есть в (2.124) $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, то имеет смысл разделить обозначением координаты на временную и пространственные: $x^a = (x^0, x^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$. По определению, в центре лифта $x^a = 0$.

Согласно (2.124)

$$\Gamma_{bc}^a |_{x=0} = 0, \quad (3.3)$$

и потому уравнение геодезической в нормальных координатах Римана в точке $x = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} = 0. \quad (3.4)$$

Этому же уравнению в нормальных координатах Римана удовлетворяет мировая траектория свободной точечной частицы, на которую не действуют никакие силы, кроме гравитационной. Отсюда и из идеи общей ковариантности следует однозначный вывод: в произвольных координатах точечная частица (то есть частица, размеры которой много меньше характерного масштаба изменения метрического тензора) при условии отсутствия любых сил

кроме гравитационной движется по геодезической линии (2.54) независимо от того является ли она массивной или безмассовой.

Установим связь истинного или собственного времени, которое обозначается буквой τ , с интервалом вдоль мировой линии частицы. Введём такие нормальные координаты Римана $x^\alpha = (x^0, x^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, в которых в определённый момент x^0 частица находится в центре координат и покоится, то есть $x^\alpha(x^0) = 0$, $dx^\alpha = 0$. Тогда имеем цепочку равенств (c — скорость света в пустоте):

$$ds^2 = (dx^0)^2 = c^2 d\tau^2. \quad (3.5)$$

Здесь последнее равенство является определением собственного времени точечной частицы. Так как интервал является инвариантом, не зависящим от локальных координат, то согласно (3.5) в произвольных координатах имеется связь между возрастанием собственного времени и изменением интервала вдоль мировой линии частицы:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) видно также, что при распространении реальных частиц $ds^2 \geq 0$. Такие интервалы называются времениподобными.

Рассмотрим частный случай формулы (3.6), когда вдоль мировой линии частицы изменяется лишь x^0 , а пространственные координаты $x^i = \text{const}$. Тогда равенство (3.6) принимает вид

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) определяет изменение собственного времени для данной точки по изменению координаты x^0 . Из (3.7) видно также, что $g_{00} > 0$. Это условие фактически лишь означает, что координата x^0 действительно является временной координатой. Если бы условие $g_{00} > 0$ не выполнялось, а метрический тензор был бы по-прежнему локально-псевдоевклидовым, то надлежащим преобразованием координат условие $g_{00} > 0$ можно было бы восстановить.

Выясним, чему равно пространственное расстояние между точкой p с координатами x^μ и бесконечно близкой к ней точкой q с координатами $x^\mu + dx^\mu$. Для решения этой задачи удобно считать, что точки p и q разделены нулевым интервалом: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$. Решая последнее уравнение относительно величины dx^0 , находим:

$$dx^0_{(1,2)} = -\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \mp \sqrt{\left(-\frac{g_{ij}}{g_{00}} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}^2}\right)} dx^i dx^j. \quad (3.8)$$

Два решения соответствуют тому, что точка q может находиться либо в прошлом, либо в будущем относительно точки p . Ясность в дальнейшие рассуждения можно внести путём следующего мысленного эксперимента. Пусть в точке $q_{(1)}$ с координатами $(x^0 + dx^0_{(1)}, x^i + dx^i)$ испускается фотон, в точке p с координатами (x^0, x^i) отражается и регистрируется в точке $q_{(2)}$ с координатами $(x^0 + dx^0_{(2)}, x^i + dx^i)$. Пространственные координаты точек $q_{(1)}$ и $q_{(2)}$ совпадают, а временные координаты различаются на величину $dx^0 = dx^0_{(2)} - dx^0_{(1)}$. Очевидно, эта величина является координатным временем, за которое световой сигнал пролетает от точки $q_{(1)}$ до точки p и затем до точки $q_{(2)}$. Согласно (3.7) находим соответствующее собственное время, а умножая собственное время на $c/2$, находим пространственный интервал dl , разделяющий точки p и q (при нахождении пространственного интервала не имеет значения, имеется в виду точка $q_{(1)}$ или $q_{(2)}$ или любая другая точка с пространственными координатами $(x^i + dx^i)$ и временной координатой, близкой к x^0):

$$dl = \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j}, \quad \gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}. \quad (3.9)$$

Отсюда видно, что шесть величин γ_{ij} могут рассматриваться как компоненты пространственного метрического тензора. Без труда проверяется, что при чисто пространственной замене координат ($x^{0'} = x^0, x^{i'} = f^i(x^j)$) величина γ_{ij} преобразуется как тензор типа $(2,0)$.

Заметим, что небольшой жесткий стержень может рассматриваться как эталон абсолютной длины в той системе отсчета, в которой он покоится. Действительно, размеры твердого тела (кри-

сталла) определяются законами квантовой механики и значениями мировых констант. Жесткость стержня и его малые размеры нужны для того, чтобы можно было пренебречь гравитационными силами, возникающими вследствие того, что $\partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\rho} \neq 0$. Сказанное означает, что в указанном приближении интеграл от одного конца стержня до другого (см. (3.9))

$$L = \int_1^2 \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j} \quad (3.10)$$

является постоянным во времени.

3.1.2. Движение частицы в гравитационном поле

В предыдущем Разделе было установлено, что небольшая частица под действием одних лишь гравитационных сил движется по геодезической линии (см. (2.54)). Выпишем ещё раз это уравнение:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (3.11)$$

Траектория частицы однозначно определяется значением координат x^μ и скорости dx^μ/ds при $s = 0$.

Рассмотрим отдельно *уравнение распространения безмассовой частицы*

Уравнение для распространения безмассовой частицы (луча света) по форме совпадает с Ур. (3.11). Однако по причине, которая ниже объясняется, параметр вдоль геодезической теперь обозначается буквой λ . Представим поле электромагнитной волны в виде $f = ae^{-i\psi}$. Для плоской волны в псевдоевклидовом пространстве $a = \text{const}$, $\psi = k_\mu x^\mu$, $k_\mu k^\mu = 0$. В ОТО мы по-прежнему имеем:

$$k_\mu = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \quad g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (3.12)$$

Здесь ψ — угловой эйконал, k^μ — волновой вектор. Второе из Ур. (3.12) говорит о том, что фотон — частица безмассовая. Теперь вместо уравнения $dk_\mu = 0$ в псевдоевклидовом пространстве

имеем уравнение $(\nabla_k k)^\mu = 0$, которое в подробной записи имеет вид

$$\frac{d k^\mu}{d \lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu k^\nu k^\lambda = 0, \quad d x^\mu = k^\mu d \lambda. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) решается совместно со вторым уравнением (3.12). Эти уравнения совместны, поскольку параллельный перенос сохраняет скалярное произведение.

Вдоль геодезической (3.12)-(3.13) интервал $d s = \sqrt{d x_\mu d x^\mu} = 0$. Такие геодезические называются нулевыми или изотропными.

Напомним, что символ $d s$ зарезервирован для обозначения интервала. Поэтому в уравнениях (3.13) параметр вдоль геодезической обозначается буквой, отличной от s .

Принцип наименьшего действия для движения массивной частицы.

Уравнение (3.11) для движения массивной частицы может быть получено из принципа наименьшего действия

$$\delta S = -m c \delta \int_1^2 d s = 0, \quad d s = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) d x^\mu d x^\nu}. \quad (3.14)$$

Действительно, вычисление вариации в (3.14) дает

$$\delta S = -m c \int_1^2 \left\{ \frac{2g_{\mu\nu} d x^\nu d \delta x^\mu}{2 d s} + \frac{g_{\lambda\nu,\mu} d x^\lambda d x^\nu \delta x^\mu}{2 d s \cdot d s} d s \right\}. \quad (3.15)$$

Введём 4-скорость частицы

$$u^\mu \equiv \frac{d x^\mu}{d s} \rightarrow g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1. \quad (3.16)$$

Тогда (3.15) переписывается как

$$\delta S = -m c \int_1^2 \left\{ g_{\mu\nu} u^\nu d \delta x^\mu + \frac{1}{2} + g_{\lambda\nu,\mu} u^\lambda u^\nu \delta x^\mu d s \right\}. \quad (3.17)$$

Интегрируя в (3.17) первое слагаемое по частям, преобразуем этот интеграл к виду

$$\delta S = -mc g_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu \Big|_1^2 + mc \int ds \delta x^\mu \left\{ \frac{d}{ds} (g_{\mu\nu} u^\nu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \cdot u^\lambda u^\nu \right\}. \quad (3.18)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (g_{\mu\nu} u^\nu) &= g_{\mu\nu} \frac{d u^\nu}{ds} + g_{\mu\nu,\lambda} \frac{d x^\lambda}{ds} u^\nu = \\ &= g_{\mu\nu} \frac{d u^\nu}{ds} + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu}) u^\lambda u^\nu, \end{aligned}$$

правая часть (3.18) окончательно переписывается как

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc g_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu \Big|_1^2 + \\ &+ mc \int ds \delta x^\mu \left\{ g_{\mu\nu} \frac{d u^\nu}{ds} + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\mu}) u^\lambda u^\nu \right\} = \\ &= -mc g_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu \Big|_1^2 + mc \int ds \delta x^\mu g_{\mu\rho} \left\{ \frac{d u^\rho}{ds} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho u^\lambda u^\nu \right\}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

При нахождении уравнений движения вариации на концах мировой линии частицы полагаются равными нулю, а сам интеграл — экстремальным. Поэтому уравнение движения получается приравниванием нулю выражения в фигурных скобках под интегралом (3.19). С учётом определения (3.16) мы видим, что условие $\delta S = 0$ эквивалентно уравнению (3.11).

Выясним теперь, как изменяется действие при реальном пространстве частицы, то есть при движении частицы в соответствии с уравнениями движения. В этом случае выражение в фигурных скобках под интегралом в (3.19) равно нулю, и всё изменение действия получается за счёт вариации начала и конца траектории. Этот вклад учитывается первым слагаемым в (3.19). Предполагая, что начало траектории фиксировано и всё изменение происходит за счёт вариации конца траектории, находим:

$$P_\mu \equiv -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mc u_\mu. \quad (3.20)$$

Вследствие (3.16) имеется соотношение $g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = m^2 c^2$. Используя первое из равенств (3.20), приходим к уравнению Гамильтона-Якоби:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 c^2. \quad (3.21)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для безмассовой частицы отличается от Ур.(3.21) лишь устремлением массы к нулю (см. Ур. (3.12)).

В заключение этого Подраздела укажем еще одну форму вариационного принципа для нахождения траектории частицы. Рассмотрим вариационную задачу:

$$\delta S = -\frac{1}{2} \delta \int d\tau \left\{ \frac{1}{e(\tau)} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + e(\tau)(mc)^2 \right\}. \quad (3.22)$$

Здесь τ — некий параметр вдоль мировой линии частицы и $e(\tau)$ — дополнительная переменная, играющая роль "лагранжевой переменной". В (3.22) независимо варьируются переменные $e(\tau)$ и $x^\mu(\tau)$. Условие стационарности действия в (3.22) относительно переменной $e(\tau)$ дает уравнение:

$$e(\tau) = \frac{1}{mc} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (3.23)$$

Точка сверху означает производную по τ . Подстановка (3.23) в (3.22) возвращает нас к вариационной задаче (3.14), чем и устанавливается эквивалентность задач (3.14) и (3.22). Заметим, что вариационный принцип для нахождения траектории частицы в форме (3.22) удобнее, поскольку он допускает изучение безмассовых частиц. Для этого достаточно в (3.22) положить $m = 0$.

Если в (3.22) переменную τ рассматривать как временную переменную, то из (3.22) следует *выражение для лагранжиана частицы*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \{ e^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e(mc)^2 \}. \quad (3.24)$$

К лагранжиану (3.24) применим весь формализм аналитической механики. Независимыми переменными в (3.24) являются $e(\tau)$ и $x^\mu(\tau)$.

3.1.3. Ньютоновский предел

Рассмотрим случай малых скоростей и малых гравитационных полей. В этом случае $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$ — малые поправки. Следовательно, компоненты связности имеют порядок $h_{\mu\nu}$. Так как компоненты связности малы, то в первом порядке относительно величин $h_{\mu\nu}$ имеем $\Gamma_{00}^i = -\Gamma_{i00}$. Кроме того $x^0 = ct$, и можно считать, что $ds = c dt$. Поэтому $u^0 = 1$, $|u^i| \ll 1$ и Ур.(3.11) дает

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i = c^2 \Gamma_{i00}. \quad (3.25)$$

Всеми остальными слагаемыми в правой части Ур. (3.25) можно пренебречь, если $\beta = \mathbf{v}/c \rightarrow 0$. Согласно (2.87)

$$\Gamma_{i00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0}.$$

Но в пределе $\beta \rightarrow 0$ вторым слагаемым в правой части последнего равенства можно пренебречь, поэтому Ур. (3.25) принимает форму

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (3.26)$$

Как известно, в нерелятивистской механике мы имели бы в правой части Ур. (3.26) выражение $-\partial\phi/\partial x^i$, где $\phi(x)$ — потенциал гравитационного поля. Следовательно, в рассмотренном приближении

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (3.27)$$

Заметим, что остальные компоненты метрического тензора, вообще говоря, того же порядка, что и g_{00} . Однако информацию о них невозможно получить таким путем, т.к. эти компоненты входят в уравнение движения частицы с дополнительными множителями c^{-1} .

Обратим внимание на то, что в (3.27) потенциал ϕ берется таким, что он стремится к нулю на бесконечности. Очевидно, что

в этом случае и $g_{00} \rightarrow 1$. Это соответствует естественному предположению, что вдали от тел, создающих гравитацию, метрика может быть выбрана псевдоевклидовой. Вблизи поверхности Земли $g_{00} - 1 \approx -2 \cdot 10^{-9}$. Несмотря на такую близость g_{00} к единице, траектории частиц вблизи Земли заметно искривляются, так как в Ур. (3.26) g_{00} умножается на квадрат скорости света.

3.1.4. Изменение частоты света, связанное с гравитационным полем

Рассмотрим теперь слабое стационарное гравитационное поле, обращающееся в нуль на бесконечности. Будем считать также, что на бесконечности метрический тензор стремится к псевдоевклидовому $\eta_{\mu\nu}$ и координаты x^μ выбраны глобально. Стационарность поля означает, что все поля не зависят от координаты x^0 . В описанной ситуации координата x^0 может быть взята в качестве мирового времени. Мировое время выбирается неоднозначно, поскольку к x^0 можно добавить произвольную функцию остальных координат (но не x^0). В противном случае свойство стационарности метрического тензора было бы нарушено.

В ОТО существует возможность синхронизации часов в бесконечно близких точках p и q . События (x^0, x^i) и $(x^0 + dx^0, x^i + dx^i)$, где $dx^0 = (dx^0_{(1)} + dx^0_{(2)})/2$, естественно считать одновременными (см. Ур. (3.8)). Действительно, середину промежутка времени, за который световой сигнал долетает от точки q до точки p и без задержки возвращается в точку q , следует считать одновременной с моментом времени достижения этим сигналом точки p . Таким образом, разность координаты x^0 для двух одновременных событий в близких точках равна

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i. \quad (3.28)$$

Используя (3.28), можно установить одновременность событий вдоль любого незамкнутого контура. В частности, можно установить одновременность событий в любой точке пространства с событиями на бесконечности, где метрика плоская.

Пусть пространственные точки p и q , вообще говоря не бесконечно близкие,¹ соединены неким пространственным контуром l . Это означает, что в пространстве задана кривая $x^i(s)$, $0 \leq s \leq 1$, так что координаты $\{x^i(0)\}$ и $\{x^i(1)\}$ являются пространственными координатами точек p и q , соответственно. В согласии с (3.28) будем считать, что если в точке p произошло событие в момент времени x^0 , то одновременное ему событие в точке q имеет временную координату

$$\left(x^0 - \int_l \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \right). \quad (3.29)$$

Важно, что в нашем случае интеграл в круглых скобках не зависит от координаты x^0 . Теперь рассмотрим в точке p два события, разделенные интервалом времени Δx^0 . Очевидно, что два события в точке q , соответственно одновременные двум событиям в точке p , также разделены интервалом мирового времени Δx^0 . Чтобы это увидеть, достаточно взять соответствующую разность от выражения (3.29). Однако истинное или собственное время, разделяющее эти два события в точках p и q будет, вообще говоря, различаться. При помощи (3.7) и (3.27) находим значение собственного времени, разделяющего два события в одной пространственной точке:

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right) \frac{\Delta x^0}{c}. \quad (3.30)$$

Отсюда видно, что *собственное время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного поля* (поле всегда отрицательно при нашем граничном условии). *Если часы побывали в гравитационном поле, то они отстали от таких же часов, которые там не были.*

Другое следствие (3.27) — изменение частоты света при переходе из одних областей в другие. Согласно (3.12) частота света, измеренная в мировом времени x^0 , равна $\omega_0 = c\partial\psi/\partial x^0$. Поскольку в стационарном случае уравнение (3.12) для эйконала ψ не

¹Под пространственными точками здесь понимаются точки с определёнными значениями пространственных координат x^i и произвольными значениями временной координаты x^0 , то есть мировые линии.

содержит переменной x^0 явно, то "импульс" ω_0 сохраняется при распространении луча света. Частота, измеренная в собственном времени, равна

$$\omega = \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = (g_{00})^{-1/2} \omega_0.$$

Поэтому в слабом поле

$$\omega = \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right) \omega_0 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\phi}{c^2}. \quad (3.31)$$

Отсюда следует, что частота света возрастает при приближении к создающим поле телам, т.е. в областях, в которых поле возрастает по абсолютной величине.

Этим объясняется смещение частот излучающих на Солнце атомов в красную сторону. Действительно, у поверхности Солнца в собственном времени частота излучения ω_1 атома обычная. Но при регистрации на Земле этот же свет, согласно (3.31), будет иметь частоту $\omega_2 = (1 + \phi_0/c^2)\omega_1$, где ϕ_0 — потенциал у поверхности Солнца.

Формула (3.31) дает возможность экспериментальной проверки ОТО. Из (3.31) следует, что при распространении света $\omega(1 + \phi/c^2) = \text{const}$, откуда в свою очередь следует формула

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}.$$

Эффект, описываемый последней формулой, измерялся для Солнца и некоторых других звезд. Например, для Солнца

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{эксп.}} \bigg/ \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{теор.}} = 1,05 \pm 0,05$$

Наблюдения осложнены доплеровским смещением, которое дает сдвиг частоты, в три раза больший.

Для белых карликов эффект возрастает в 10 – 100 раз, так как их радиус во столько же раз меньше радиуса Солнца.

Однако, самые точные измерения проведены на Земле (Паунд и Снайдер). Идея опытов состоит в следующем. Излучатель

квантов был помещен на башне высотой $h \approx 20$ м., приемник γ -квантов — внизу так, что смещение было фиолетовым:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gH}{c^2} = 2 \cdot 10^{-15}.$$

Для измерений использовалось мессбауэровское резонансное поглощение на Fe^{57} . Несмотря на чрезвычайную трудность опытов, была достигнута точность

$$\frac{\Delta\omega_{\text{эксп.}}}{\Delta\omega_{\text{теор.}}} = 1,00 \pm 0,01.$$

С середины 70-х годов наступила новая эра для экспериментов по красному смещению. Это связано с развитием стандартов частоты сверхвысокой стабильности порядка $10^{-15} \div 10^{-16}$ при временах усреднения от 10 до 100 с. и более. Благодаря этому удалось зафиксировать разницу в показаниях часов, совершающих длительный полет на самолете на высоте $\sim 10^4$ м. с аналогичными часами на поверхности Земли, а также уследить за смещением частоты в зависимости от высоты при запуске водородных мазерных часов на ракете на высоту до 10 000 км. Во всех случаях согласие с предсказаниями ОТО было лучше, чем 1%.

3.2. Тензор энергии-импульса материи

3.2.1. Определение тензора энергии-импульса

Рассмотрим действие для системы заряженных частиц и электромагнитного поля в гравитационном поле:

$$S_m = \sum_n \left\{ -m_n c \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x_n)} dx_n^\mu dx_n^\nu - \frac{e_n}{c} \int A_\mu(x_n) dx_n^\mu \right\} - \frac{1}{16\pi c} \int g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \sqrt{-g} d^{(4)}x. \quad (3.32)$$

Здесь индекс n нумерует частицы, $x_n^\mu = x_n^\mu(s_n)$ — мировая линия частицы с номером n и параметром s_n , и m_n , e_n — ее масса и заряд, соответственно. 1-форма $A(x) = A_\mu(x) dx^\mu$ описывает потенциал электромагнитного поля. Величина $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

является тензором напряженности электромагнитного поля. Определим 2-форму $F = dA$. Имеем:

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (3.33)$$

Отсюда видно, что величины $F_{\mu\nu}$ действительно являются компонентами антисимметричного тензорного поля типа $(2, 0)$ (см. доказательство Предложения 1 в Разделе 5). Действие (3.32) инвариантно относительно общих преобразований координат. Поэтому уравнения движения, возникающие из условия $\delta S = 0$, где δS — вариация действия (3.32) относительно вариаций переменных δx_n^μ и $\delta A_\mu(x)$, являются общековариантными.

Мы сначала изучим вариацию действия (3.32) относительно вариации метрики $\delta g_{\mu\nu}(x)$.

По определению,

$$\delta_g S_m = -\frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \sqrt{-g(x)} d^{(4)}x. \quad (3.34)$$

Здесь $T^{\mu\nu}$ называется *тензором энергии-импульса материи*.

Чтобы убедиться, что при помощи Ур. (3.34) действительно определяется тензор энергии-импульса, рассмотрим вариацию действия (3.32). Обозначим

$$u_n^\mu = \frac{dx_n^\mu}{ds_n}, \quad ds_n = \sqrt{g_{\mu\nu}(x_n) dx_n^\mu dx_n^\nu}. \quad (3.35)$$

Без труда находим, что вариация первого слагаемого в (3.32) дает:

$$-\sum_n \frac{m_n c^2}{2c} \int u_n^\mu u_n^\nu ds_n \cdot \delta g_{\mu\nu}(x_n).$$

Сравнивая последнее выражение с определением (3.34), находим, что вклад массивных частиц в тензор энергии-импульса равен

$$T_m^{\mu\nu}(x) = (-g(x))^{-1/2} \sum_n m_n c^2 \int ds_n \delta^{(4)}(x - x_n) \cdot u_n^\mu u_n^\nu. \quad (3.36)$$

Второе слагаемое не зависит от метрического тензора и потому не дает вклада в тензор энергии-импульса. Третье слагаемое в

(3.32) дает следующий вклад в тензор энергии-импульса:

$$T_A^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right). \quad (3.37)$$

При вычислении (3.37) учтено, что $\delta g = g \cdot g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Мы видим, что величина $T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu}$ в пределе псевдоевклидова пространства ($g_{\mu\nu} \rightarrow \text{diag}(1, -1, -1, -1)$) действительно переходит в известный тензор энергии-импульса. Поэтому равенства (3.34) следует рассматривать как определение тензора энергии-импульса материи.

Данное определение тензора энергии-импульса материи в точности повторяет определение электрического тока в электродинамике. Для определения тока действие разбивают на два слагаемых, первое из которых S_{mA} описывает движение заряженной материи в электромагнитном поле, а второе S_A является действием чистого электромагнитного поля. В нашем случае S_{mA} дается первыми двумя слагаемыми в (3.32). Электромагнитный ток $J^\mu(x)$ определяется как вариация действия S_{mA} относительно вариации потенциала A_μ :

$$\delta S_{mA} = -\frac{1}{c} \int J^\mu(x) \delta A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^{(4)}x. \quad (3.38)$$

В нашем случае

$$J^\mu(x) = (-g(x))^{-\frac{1}{2}} \sum_n e_n \int d s_n \delta^{(4)}(x - x_n) \cdot u_n^\mu.$$

3.2.2. Уравнения движения материи в случае электромагнитного взаимодействия

Для полноты картины выпишем уравнения движения для частиц и электромагнитного поля в Римановом пространстве. Они получаются путем приравнивания нулю вариации действия (3.32) относительно вариаций δx_n^μ и $\delta A^\mu(x)$, соответственно:

$$\delta_n S = 0, \quad \delta_A S = 0. \quad (3.39)$$

Вариация первого слагаемого в (3.32) относительно δx_n^μ была вычислена выше (см. (3.19)). Вариация второго слагаемого в (3.32)

относительно δx_n^μ дает вклад в $\delta_n S$, равный

$$-\sum_n \frac{e_n}{c} \int d s_n \delta x_n^\mu F_{\mu\nu}(x_n) u_n^\nu.$$

Поэтому уравнения движения для частиц во внешнем электромагнитном поле имеют вид

$$m c \left(\frac{d u^\mu}{d s} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) u^\lambda u^\nu \right) = \frac{e}{c} F^{\mu\nu}(x) u_\nu. \quad (3.40)$$

Вариация действия (3.32) относительно δA_μ дает уравнение (см. (3.38))

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F^{\nu\mu}) = 4\pi J^\mu. \quad (3.41)$$

В этом уравнении содержится закон сохранения электрического заряда. Действительно, умножим Ур. (3.41) на $\sqrt{-g}$ и затем применим к обеим частям равенства оператор $(\partial/\partial x^\mu)$. В результате левая часть равенства обращается в нуль, так как оператор $(\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu)$ симметричен относительно перестановки индексов ($\mu \leftrightarrow \nu$), в то время как величина $(\sqrt{-g} F^{\nu\mu})$ антисимметрична относительно такой перестановки индексов. Отсюда следует, что и правая часть уравнения обращается в нуль, то есть из Ур (3.41) следует уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} J^\mu) = 0 \longleftrightarrow \nabla_\mu j^\mu = 0. \quad (3.42)$$

Аналогично тому как было установлено, что правые части уравнений (2.92) и (2.93) равны, можно показать, что левая часть Ур. (3.41) равна $\nabla_\nu F^{\nu\mu}$. Поэтому Ур. (3.41) записывается также в виде

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\mu. \quad (3.43)$$

Вследствие тождества $d d = 0$ имеем из (3.33) $d F = 0$, что эквивалентно уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\lambda\mu} = 0. \quad (3.44)$$

Уравнения (3.41)-(3.43) и (3.44) обобщают однородные и неоднородные уравнения Максвелла на Риманово пространство. Следует также заметить, что Ур. (3.44) являются аналогом тождеств Бианки (2.80) в римановом пространстве, когда кручение равно нулю.

3.2.3. Закон "сохранения" для тензора энергии-импульса

Имеется важнейшее следствие, вытекающее из инвариантности действия S , описывающего движение материи в гравитационном поле (например, действие (3.32)), относительно общекординатных преобразований. Чтобы получить это следствие, необходимо проследить за изменением метрики при бесконечно малых преобразованиях координат.

Пусть $y^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$, $\xi^\mu \rightarrow 0$. Согласно общим правилам связь компонент метрического тензора в координатах y^μ и x^μ дается формулой

$$g'_{\mu\nu}(y(x)) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} g_{\sigma\rho}(x). \quad (3.45)$$

Будем проводить все вычисления с точностью до первого порядка относительно ξ^μ . Тогда

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial y^\nu} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \longrightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Поэтому

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(x) + \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \cdot g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \cdot g_{\nu\sigma} \right) (x).$$

С другой стороны

$$g'_{\mu\nu}(y) = g'_{\mu\nu}(x) - \left(\xi^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} \right) (x).$$

Комбинируя последние формулы, находим для величины $\delta g_{\mu\nu}(x) \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$:

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \cdot g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \cdot g_{\nu\sigma} = \\ &= \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \xi_\lambda. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь мы учли, что

$$\xi^\sigma = g^{\sigma\lambda}\xi_\lambda, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}g^{\sigma\lambda}\right)g_{\sigma\mu} = -g^{\sigma\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}g_{\sigma\mu}.$$

Теперь учтем формулу (2.87) и перепишем равенство (3.46) в виде

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda,$$

или, окончательно

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (3.47)$$

Формула (3.47) дает вариацию метрического тензора в зависимости от вариации локальных координат. Подчеркнем, что величина (3.47) есть разность компонент тензора в координатах y^μ и x^μ , взятых соответственно в точках $y^\mu + \xi^\mu$ и x^μ (а, значит, в разных точках многообразия \mathcal{X} , поскольку одна и та же точка пространства \mathcal{X} имеет координаты y^μ или x^μ).

Аналогичным образом можно вычислить вариацию переменных, описывающих поля материи в зависимости от вариации локальных координат. Обозначим совокупность переменных и их вариации, описывающих материальные поля, соответственно символами q и δq . В случае системы (3.32) q означает совокупность переменных x_n^μ и $A_\mu(x)$. Для координат материальных точек имеем

$$\delta x^\mu = y^\mu(x) - x^\mu = -\xi^\mu. \quad (3.48)$$

Выпишем также аналог формулы (3.45) и последующих формул для потенциала электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} A'_\mu(y(x)) &= \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} A_\nu(x) = (\delta_\mu^\nu + \xi_{,\mu}^\nu) A_\nu(x) = \\ &= A_\mu(x) + \xi_{,\mu}^\nu A_\nu = A'_\mu(x) - \xi^\nu A_{\mu,\nu}. \end{aligned}$$

При помощи последнего равенства находим:

$$\delta A_\mu(x) \equiv A'_\mu(x) - A_\mu(x) = \xi^\nu A_{\mu,\nu} + \xi_{,\mu}^\nu A_\nu = \xi^\nu F_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\xi^\nu A_\nu). \quad (3.49)$$

Теперь совершим бесконечно малое преобразование координат. Это преобразование влечет за собой вариацию метрики (3.47) и вариацию материальных переменных δq . В нашем примере эти вариации задаются согласно (3.48) и (3.49). Так как действие S материальной системы инвариантно относительно общих преобразований координат, то при этом вариация действия δS будет тождественно равна нулю:

$$\delta S = \delta_g S + \delta_q S = 0. \quad (3.50)$$

Здесь $\delta_g S$ и $\delta_q S$ — вариации действия, следующие из вариации полей метрики и вариации переменных q , соответственно.

Проверим равенство (3.50) на простейшем примере действия одной массивной частицы:

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)} dx^\mu dx^\nu.$$

Вариация этого действия как результат вариации координат частицы (см. (3.19)) и метрики имеет вид

$$\delta S = mc \int \delta x^\rho g_{\mu\rho} \left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu u^\lambda u^\nu \right) ds - mc \int \frac{\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{2 ds \cdot ds} ds.$$

Подставляя сюда значения вариаций метрики (3.47) и координат (3.48), находим:

$$\begin{aligned} \delta S &= mc \int \left\{ -\xi_\mu \left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu u^\lambda u^\nu \right) - \nabla_\nu \xi_\mu u^\mu u^\nu \right\} ds = \\ &= -mc \int \left\{ \xi_\mu \frac{du^\mu}{ds} + (\partial_\nu \xi_\mu) u^\mu u^\nu \right\} ds = \\ &= -mc \int \left\{ \xi_\mu \frac{du^\mu}{ds} + u^\mu \frac{d\xi_\mu}{ds} \right\} ds = -mc \int d(\xi_\mu u^\mu) = 0. \end{aligned}$$

Вернёмся к общему случаю. Будем считать, что материальные поля подчиняются уравнениям движения. Это равносильно условиям $\delta_q S = 0$ в (3.50). В этом случае уравнение (3.50) сводится к уравнению $\delta_g S = 0$, что с учетом определения (3.34) и равенства (3.47) дает уравнение

$$\int T^{\mu\nu} (\nabla_\mu \xi_\nu) \sqrt{-g} d^{(4)}x = 0 \quad (3.51)$$

для любого ковекторного поля $\xi_\nu(x)$. Теперь учтем, что

$$T^{\mu\nu}\nabla_\mu\xi_\nu = \nabla_\mu(T^{\mu\nu}\xi_\nu) - (\nabla_\mu T^{\mu\nu})\xi_\nu,$$

и согласно (2.93)

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}\xi_\nu) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\nu).$$

Допустим, что на бесконечности $\xi_\nu(x)$ обращается в нуль. Тогда с учетом выписанных формул левая часть равенства (3.51) преобразуется к виду

$$\int(\nabla_\mu T^{\mu\nu})\xi_\nu\sqrt{-g}d^{(4)}x = 0.$$

Ввиду произвольности поля ξ_ν отсюда следует, что

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.52)$$

Уравнение (3.52) имеет место лишь в том случае, когда поля материи подчиняются уравнениям движения.

Подчеркнем, что уравнение (3.52) не означает сохранение какой-либо величины. Из результатов следующего Раздела можно сделать вывод, что в уравнениях (3.52) содержатся уравнения движения материи.

3.2.4. Уравнение движения релятивистской жидкости

Многие физические системы, включая, вероятно, саму Вселенную, можно рассматривать приближенно как идеальную жидкость. Движение идеальной жидкости может быть описано при помощи Ур.(3.52), где $T^{\mu\nu}$ — ее тензор энергии-импульса. Обозначим через U^μ 4-скорость релятивистской жидкости в данной точке пространства-времени, нормированную обычным образом:

$$U^\mu U_\mu = 1, \quad U^i = v^i U^0. \quad (3.53)$$

Вследствие (3.53) имеется единственная возможность для построения симметричного тензора второго ранга при помощи 4-скорости U^μ : тензор $\text{const } U^\mu U^\nu$. Поэтому для построения симметричного тензора энергии-импульса жидкости в нашем распоряжении имеется всего два симметричных тензора: $U^\mu U^\nu$ и $g^{\mu\nu}$.

Следовательно, тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (3.54)$$

Здесь ε и p — скалярные поля, смысл которых выясняется при переходе в локальную систему нормальных координат Римана \tilde{K}_0 , в которой вблизи рассматриваемой точки $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (см. Раздел 8.3) и жидкость покоится, т.е. $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. В системе \tilde{K}_0 (которая называется собственной) имеем:

$$\tilde{T}^{00} = \varepsilon, \quad \tilde{T}^{ij} = p\delta^{ij}, \quad \tilde{T}^{0i} = 0. \quad (3.55)$$

Отсюда видно, что ε является плотностью энергии жидкости, а p — её давление в системе \tilde{K}_0 .

Подставляя тензор (3.54) в Ур. (3.52), можно получить *уравнение движения релятивистской жидкости*. Для этого необходимо ввести в рассмотрение сохраняющийся 4-вектор тока частиц n^μ :

$$\nabla_\mu n^\mu = 0. \quad (3.56)$$

Из условия (3.56) следует, что полное число частиц $N = \int n^0 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3$ сохраняется (см. (2.105)). Очевидно, что 4-вектор n^μ должен быть пропорционален 4-скорости U^μ , т.е. иметь вид

$$n^\mu = n U^\mu. \quad (3.57)$$

Здесь $n(x)$ — скалярное поле, из определения которого ясно, что $n(x)$ есть плотность числа частиц в точке x в собственной системе отсчета.

Рассмотрим далее энтальпию $W = E + pV$, которая есть термодинамическая величина, характеризующая состояние некой подсистемы, заключающей в себе определенное количество вещества. Здесь E — полная энергия подсистемы, p — давление, а V — ее объем в собственной системе отсчета. Если к этой подсистеме не подводится тепло, то $dE = -pdV$. Отсюда

$$dW = V dp. \quad (3.58)$$

Соотношение (3.58) справедливо в случае отсутствия теплообмена или в случае сохранения энтропии.

В формуле (3.54) величина $w = (\varepsilon + p)$ является энтальпией единицы объема в собственной системе отсчета. Поскольку объем, приходящийся на одну частицу, есть $1/n$, то энтальпия, приходящаяся на одну частицу, равна w/n . Согласно (3.58) в случае изэнтропического движения

$$d\left(\frac{w}{n}\right) = \frac{1}{n} dp. \quad (3.59)$$

Теперь подставим (3.54) в (3.52):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = U^\mu \nabla_\nu \left[\left(\frac{w}{n}\right) (nU^\nu) \right] + w U^\nu \nabla_\nu U^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\nu p = 0.$$

С учётом равенств (3.56) и (3.57) последнее равенство переписывается как

$$\left(\frac{w}{n}\right)_{,\nu} U^\mu nU^\nu + w U^\nu \nabla_\nu U^\mu - p_{,\nu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (3.60)$$

Спроектируем Ур. (3.60) на U_μ и учтем, что вследствие (3.53) $U_\mu \nabla_\nu U^\mu = 0$:

$$U^\nu \left[\left(\frac{w}{n}\right)_{,\nu} - \frac{p_{,\nu}}{n} \right] = 0. \quad (3.61)$$

Согласно (3.59) Ур. (3.61) означает, что при движении релятивистской жидкости теплообмен отсутствует, т.е. *её движение является изэнтропическим*.

При помощи равенства (3.61) Ур. (3.60) несколько упрощается:

$$w U^\nu \nabla_\nu U_\mu = \partial_\mu p - U_\mu U^\nu \partial_\nu p \quad (3.62)$$

Уравнение (3.62) является релятивистским обобщением уравнения Эйлера. Проведенный анализ показывает, что не только Ур. (3.52) является следствием общей ковариантности и уравнений движения, но и сами уравнения движения содержатся в (3.52).

В случае электромагнитного взаимодействия из (3.36) и (3.37) получаем (след тензора (3.37) равен нулю):

$$T_\mu^\mu = (-g)^{-1/2} \sum_n m_n c^2 \int d s_n \delta^{(4)}(x - x_n).$$

Но (в системе \tilde{K}_0) $ds_n = c dt_n \sqrt{1 - \beta_n^2}$. Поэтому в ультрарелятивистском пределе ($\beta_n \rightarrow 1$) $ds_n \rightarrow 0$, и мы имеем

$$T_\mu^\mu = 0. \quad (3.63)$$

Предположим, что макроскопические силы являются результатом усреднения микроскопических электромагнитных сил. Тогда равенство (3.63) сохраняет свою силу в ультрарелятивистском пределе для макроскопического тензора энергии-импульса (3.54), что дает в этом предельном случае *уравнение состояния*

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (3.64)$$

Хотя уравнение состояния (3.64) выведено для чисто электромагнитных сил на макроскопическом уровне, представляется разумным считать его справедливым в ультрарелятивистском пределе также и для микроскопических сил любой другой природы.

3.3. Уравнение Эйнштейна

В Разделе 10 были выписаны уравнения, определяющие движение материи в заданном гравитационном поле. Однако материя и сама создает гравитационное поле. Поэтому *наша задача — сформулировать уравнение, связывающее механические характеристики гравитационного поля и материи.*

3.3.1. Физический вывод Эйнштейна

В ньютоновском пределе (малые скорости и поля) гравитационное поле подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta\phi = 4\pi G\mu. \quad (3.65)$$

Здесь $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ — гравитационная постоянная, μ — плотность массы тела. Часто пользуются вместо G величиной

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,86 \cdot 10^{-27} \text{ см} \cdot \text{г}^{-1}, \quad (3.66)$$

которая называется *эйнштейновской гравитационной постоянной*.

В нерелятивистском пределе $\varepsilon = \mu c^2$ и давление p пренебрежимо мало по сравнению с величиной ε . Поэтому тензор энергии-импульса (3.54) принимает вид $T^{\mu\nu} = \mu c^2 u^\mu u^\nu$. Кроме того, в нерелятивистском пределе $u^0 = 1$, $u^i = 0$, и из всех компонент $T^{\mu\nu}$ остается только

$$T_{00} = \mu c^2. \quad (3.67)$$

Используя (3.27) и (3.67), перепишем Ур.(3.65) в виде

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (3.68)$$

Последнее уравнение указывает путь, по которому следует двигаться. Очевидно, что в полном уравнении должны участвовать равноправно все компоненты тензора энергии-импульса. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.69)$$

Здесь слева — некий тензор, который строится из метрического тензора и его производных. Уравнение (3.69) удовлетворяет принципу общей ковариантности теории.

Тензор $G_{\mu\nu}$ удовлетворяет нескольким требованиям:

- а)** Поскольку $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, то и $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.
- б)** Поскольку тензор энергии-импульса удовлетворяет Ур. (3.52), то $G_{\mu\nu}$ должен удовлетворять тождеству

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0. \quad (3.70)$$

В этом случае Ур. (3.52) автоматически следует из Ур. (3.69). В этом смысле ситуация похожа на ту, которая имеет место в электродинамике: из уравнения Максвелла (3.41) автоматически следует закон сохранения электрического тока $\nabla_\mu J^\mu = 0$ (см. (3.42)).

- в)** Тензор $G_{\mu\nu}$ должен быть линеен относительно вторых производных метрического тензора и квадратичен относительно его

первых производных. Все остальные комбинации производных метрического тензора в $G_{\mu\nu}$ недопустимы, так как в противном случае при изменении масштаба гравитационное взаимодействие полностью изменяло бы свой характер, что противоречит огромному количеству наблюдений. Согласно этому требованию

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R. \quad (3.71)$$

Здесь

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad R \equiv R^\mu{}_\mu \quad (3.72)$$

тензор Риччи и скалярная кривизна пространства, соответственно, а C_1 и C_2 — константы. Из (2.67) и (2.87) следует, что величина (3.72) удовлетворяет свойству в), а из (2.83)–(2.85) — что тензор Риччи симметричен. Поэтому величина (3.71) удовлетворяет также свойству а).

г) В релятивистских уравнениях (3.69) содержится теория Ньютона как предельный случай.

Условие б) дает возможность найти соотношение констант C_1 и C_2 . Используем для этого тождество Бианки (2.82):

$$\nabla_\sigma R_{\lambda\mu\rho\nu} + \nabla_\rho R_{\lambda\mu\nu\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho} = 0. \quad (3.73)$$

Напомним, что согласно (2.42) $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$. Поэтому

$$g^{\rho\lambda} \nabla_\sigma R_{\lambda\mu\rho\nu} = \nabla_\sigma (g^{\rho\lambda} R_{\lambda\mu\rho\nu}) = \nabla_\sigma R_{\mu\nu}.$$

Умножим тождество (3.73) на $g^{\rho\lambda}$ и используем последнее равенство. Это приводит к тождеству

$$\nabla_\sigma R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R_{\mu\sigma} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Умножая это равенство на $g^{\mu\sigma}$, получаем

$$\nabla_\mu R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu R = 0.$$

Отсюда видно, что если $C_2 = -\frac{1}{2}C_1$, то имеет место тождество (3.70), где

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (3.74)$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.75)$$

Уравнение (3.75) называется *уравнением Эйнштейна*, а левая часть этого уравнения — *тензором Эйнштейна*.

Умножим Ур. (3.75) на $g^{\mu\nu}$:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (T = T^\mu_\mu). \quad (3.76)$$

Исключая из Ур.(3.75) скалярную кривизну при помощи соотношения (3.76), переписываем *уравнение Эйнштейна в эквивалентной форме*:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (3.77)$$

Остается установить свойство γ .

В начале этого параграфа было показано, что в нерелятивистском пределе единственная отличная от нуля компонента $T_{\mu\nu}$ имеет вид (3.67). Поэтому мы должны рассмотреть Ур. (3.77) с индексами $\mu = \nu = 0$:

$$R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2}\mu. \quad (3.78)$$

При вычислении величины R_{00} замечаем, что члены, квадратичные относительно связности (см. (2.67), малы в Ньютонском пределе. Поэтому

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{00}^\mu - \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{0\mu}^\mu. \quad (3.79)$$

Члены, содержащие производные $\partial/\partial x^0$ малы, как содержащие лишний множитель c^{-1} . При вычислении величины Γ_{00}^i согласно (2.87) следует помнить, что все недиагональные элементы $g^{\mu\nu}$ дают лишнюю малость. Поэтому в нужном приближении

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{00}. \quad (3.80)$$

Комбинируя уравнения (3.27), (3.78)-(3.80), мы возвращаемся к уравнению (3.65), что и требовалось.

3.3.2. Вывод Гильберта

Одновременно и независимо от Эйнштейна уравнения (13.11) были получены Гильбертом при помощи принципа наименьшего действия. Мы воспроизводим здесь этот вывод, пользуясь другим формализмом.

Напомним, что инвариантный элемент объёма равен $dV = \sqrt{-g} d^{(4)}x$.

Согласно Гильберту *действие гравитационного поля* имеет вид (см.(2.67))

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)}x \sqrt{-g} R = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)}x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu}{}^\lambda{}_{\nu}, \quad R^\lambda{}_{\mu}{}^\lambda{}_{\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma} \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}. \quad (3.81)$$

Предположим, что связность согласована с метрикой и кручение отсутствует, то есть имеют место формулы (2.42), (2.76) и (2.87). В этом случае все величины в (3.81) выражаются через метрический тензор, который играет роль совокупности всех независимых динамических переменных, описывающих гравитационное поле. Поэтому для вывода уравнений движения гравитационной системы необходимо вычислить вариацию действия (3.81) относительно тензора $g_{\mu\nu}$.

Эта задача существенно упрощается вследствие того что вариация действия (3.81) относительно коэффициентов связности равна нулю:

$$\delta S_g / \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(g(x)) \equiv 0. \quad (3.82)$$

Подчеркнём, что для выполнения тождества (3.82) необходимо предположение, что вариация коэффициентов связности обусловлена вариацией метрического тензора и что уравнения (2.42), (2.76) и (2.87) выполнены.

На первом шаге вычислим вариацию тензора Римана как следствие вариации коэффициентов связности, которые предполагаются независимыми. В этом вычислении не предполагается, что связность согласована с метрикой или она без кручения. При

помощи равенств (3.81), (2.25) и (2.75) легко находим²:

$$\delta R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda} = (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\sigma} - (\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda})_{;\nu} + \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \cdot T_{\lambda\nu}^{\rho}. \quad (3.83)$$

В (3.83) ковариантные производные построены по обычным правилам (2.25), которые в данном случае применяются к тензорам типа (2, 1).

Далее будем предполагать, что тензор кручения равен нулю. Приравнивая в (3.83) индексы λ и σ и сворачивая по ним, находим вариацию тензора Риччи и затем подставляем эту вариацию в выражение для гравитационного действия (3.81). Таким образом мы находим вариацию действия как результат вариации коэффициентов связности при условии отсутствия кручения:

$$\delta_{\Gamma} S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)} x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} \right]. \quad (3.84)$$

Согласованность связности и метрики выражается равенством (2.42), которое равносильно равенству $g_{;\lambda}^{\mu\nu} = 0$. С учётом последнего равенства вариация (3.84) переписывается как

$$\begin{aligned} \delta_{\Gamma} S_g &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)} x \sqrt{-g} \left[(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} - (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} \right] = \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)} x \sqrt{-g} [X_{;\lambda}^{\lambda} - Y_{;\nu}^{\nu}], \end{aligned} \quad (3.85)$$

где

$$X^{\lambda} = (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}), \quad Y^{\nu} = (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}).$$

При помощи Ур. (2.93) объёмный интеграл (3.85) преобразуется в интеграл по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объём, на которой все вариации можно считать нулевыми. Таким образом равенство (3.82) установлено при условии, что связность согласована с метрикой и кручение отсутствует.

Для вычисления вариации действия (3.81) относительно тензора $g_{\mu\nu}$ остаётся вычислить вариацию величины $\sqrt{-g} g^{\mu\nu}$. Име-

²Заметим, что совокупность вариаций компонент связности $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ образует тензор типа (2, 1). Это видно из закона преобразования коэффициентов связности (2.27): оператор δ аннулирует последнее (неоднородное относительно Γ) слагаемое в (2.27).

ем:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g^{\lambda\rho} = -g^{\lambda\mu}g^{\rho\nu}\delta g_{\mu\nu} \longrightarrow \\ \longrightarrow \delta(\sqrt{-g}g^{\lambda\rho}) &= \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}g^{\rho\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Таким образом, при помощи (3.82) и (3.86) окончательно находим вариацию действия (3.81) относительно тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\delta_g S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)}x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.87)$$

Принцип наименьшего действия гласит, что уравнения движения получаются из условия

$$\delta(S_g + S_m) = 0. \quad (3.88)$$

Здесь S_m — действие материи (см. Раздел 10). В нашем формализме независимо варьируются переменные $g_{\mu\nu}$ и q . Напомним, что переменные q описывают степени свободы материи, варьирование которых приводит к уравнениям движения материи. Варьирование относительно метрического тензора $g_{\mu\nu}$ приводит к уравнению Эйнштейна. Действительно, согласно (3.34) и (3.87)

$$\begin{aligned} \delta_g(S_g + S_m) &= \\ = \int d^{(4)}x \sqrt{-g} \left\{ \frac{c^3}{16\pi G} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) - \frac{1}{2c}T^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Приравнявая в (3.89) коэффициент при $\delta g_{\mu\nu}(x)$ нулю, мы приходим к уравнению Эйнштейна (3.75).

Значительный интерес представляет изучение гравитационного действия (3.81), записанного в форме Палатини. В частности, такая запись действия допускает изящное обобщение рассматриваемой здесь континуальной теории на дискретную теорию гравитации на нерегулярной решетке (симплициальном комплексе).

Далее работаем в ортонормированном базисе. Так как используется антисимметричная форма связности ($\omega^{ab} = -\omega^{ba}$), то согласно (2.43) это автоматически означает, что связность согласована с метрикой. А priori кручение не предполагается нулевым.

Рассмотрим 4-форму

$$\Xi = \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d. \quad (3.90)$$

Здесь ε_{abcd} — абсолютно антисимметричный тензор, $\varepsilon_{0123} = 1$, 2-форма кривизны $R^{ab} = R_{\mu\nu}^{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu$ выражается через 1-форму связности $\omega_\mu^{ab} dx^\mu$ согласно (2.79) и $\omega^a = e_\mu^a dx^\mu$ (см. формулы (2.44), (2.45)). Имеем:

$$\varepsilon_{abcd} e_\lambda^c e_\rho^d = (\det e_\sigma^c) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} e_\mu^c e_\nu^d.$$

Из соотношения $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$ (см. (2.44)) получаем $g = (\det \eta_{ab})(\det e_\mu^a)^2 = -(\det e_\mu^a)^2$. Пусть $\det e_\mu^a > 0$. Тогда $\det e_\mu^a = \sqrt{-g}$ и

$$\varepsilon_{abcd} e_\lambda^c e_\rho^d = E_{\mu\nu\lambda\rho} e_\mu^c e_\nu^d. \quad (3.91)$$

Тензор $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ определен в (2.97). Форма (3.90) переписывается при помощи (3.91) в виде

$$\Xi = \frac{1}{4} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho E_{\sigma\tau\lambda\rho} e_a^\sigma e_b^\tau R_{\mu\nu}^{ab}.$$

Теперь учтем, что (см. (2.4))

$$e_a^\sigma e_b^\tau R_{\mu\nu}^{ab} = R_{\mu\nu}^{\sigma\tau},$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}.$$

Поэтому

$$\Xi = \frac{1}{4} \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} R_{\mu\nu}^{\sigma\tau}.$$

Но

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} = 2(\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\tau^\mu \delta_\sigma^\nu),$$

и окончательно

$$\Xi = dV \cdot R, \quad R = R_{\mu\nu}^{\mu\nu}, \quad dV = \sqrt{-g} d^{(4)}x. \quad (3.92)$$

Мы видим, что интеграл от формы (3.90) пропорционален действию Гильберта (3.81).

Вычислим вариацию формы (3.90) предполагая формы ω^{ab} и ω^a независимыми. Тензор кривизны задаётся согласно (2.79). Имеем:

$$\begin{aligned} \delta\Xi = & d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\right) - \\ & - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \delta\omega^d. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Здесь T^c обозначает левую часть Ур. (2.78). Формула (3.93) без труда выводится в такой точке пространства, в которой $\omega^{ab} = 0$. В Разделе 7.3 было показано, что этого можно добиться в любой точке, выбирая соответствующим образом базис. В такой точке имеем:

$$d\delta\omega^{ab} = \frac{1}{2}\delta R^{ab}, \quad d\omega^c = \frac{1}{2}T^c.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}\delta R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge d\delta\omega^{ab} = \\ &= d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}. \end{aligned}$$

Таким образом, первые два слагаемых в (3.93) возникают вследствие вариации связности, последнее слагаемое тривиально получается вследствие вариации тетрады. Формула (3.93) проверена в точке, в которой $\omega^{ab} = 0$. Теперь из факта независимости обеих частей Ур. (3.93) от базиса следует, что Ур. (3.93) справедливо в любой точке.

Приведенное вычисление, использующее возможность обращения связности в нуль в любой точке пространства, характерно для дифференциальной геометрии и теории гравитации. Таким путем можно резко сократить вычисления.

Считая переменные ω^{ab} и ω^d независимыми, приравняем отдельно нулю коэффициенты при вариациях $\delta\omega^{ab}$ и $\delta\omega^d$ в интеграле от величины (3.93). При этом первое слагаемое в (3.93) можно отбросить, поскольку оно является полной производной. Имеем условие экстремальности относительно ω^{ab} :

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{abcd}e_\nu^c T_{\lambda\rho}^d = 0,$$

или

$$e_{[\mu}^a T_{\nu\lambda]}^b - e_{[\mu}^b T_{\nu\lambda]}^a = 0.$$

(смысл обозначения $[\mu\nu\lambda]$ см. после (2.81)). После умножения последнего равенства на e_a^λ получаем

$$T_{\mu\nu}^a = (e_\mu^a T_{\nu\lambda}^b - e_\nu^a T_{\mu\lambda}^b) e_b^\lambda. \quad (3.94)$$

Последнее равенство умножим на e_a^ν , что дает $T_{\mu\nu}^a e_a^\nu = 0$. Вместе с (3.94) это означает отсутствие кручения. Таким образом, вариация интеграла величины (3.93) относительно связности дает уравнения

$$\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0, \quad (3.95)$$

которые имеют единственное решение (2.89) для формы связности (или (2.87) в базисе $\partial/\partial x^\mu$). Если подставить это решение в 4-форму (3.90), мы возвращаемся к подынтегральному выражению в действии Гильберта (3.81), которое полностью выражается через метрический тензор.

Приведём также коэффициент в (3.93) при вариации δe_μ^a :

$$\delta \Xi = \dots - 2(\det e_\lambda^c) \left(R_a^b e_b^\mu - \frac{1}{2} R e_a^\mu \right) \delta e_\mu^a.$$

Здесь была использована формула

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} e_\rho^d = (\det e_\mu^a) \varepsilon^{abcd} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda. \quad (3.96)$$

Вычисления в этом Разделе приводят к следующему выводу. Если связность согласована с метрикой, то действие Гильберта (3.81) (или интеграл от формы (3.90)) тогда и только тогда экстремально относительно вариации коэффициентов связности, когда кручение отсутствует. Таким образом, для получения уравнения Эйнштейна остаётся проварьировать действие Гильберта относительно метрического тензора (или тетрады), не затрагивая коэффициентов связности, и вариацию приравнять нулю. Коэффициенты связности в уравнении Эйнштейна должны выражаться согласно (2.87).

В настоящее время согласие ОТО с опытом установлено приблизительно с точностью от 1% до 20% в зависимости от вида эксперимента. Однако, экспериментальных данных мало.

3.3.3. Возможны ли другие варианты теории?

Теория должна быть безмассовой из-за дальнего действия. Действительно, массивное поле в релятивистской механике удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2 \right) \phi = 0.$$

Если имеется статический точечный источник в начале координат, то последнее уравнение принимает вид

$$(-\Delta + m^2)\phi = \zeta \delta^{(3)}(\mathbf{x}).$$

Решение этого уравнения имеет вид $\phi \sim (r^{-1})(\exp -mr)$, откуда видно, что дальнедействующее поле не может быть массивным.

а). **Скалярная теория.** Взаимодействие скалярного поля с материей могло бы быть вида

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \sim \phi T_\mu^\mu.$$

Но след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю. Поэтому оно не взаимодействовало бы с гравитационным полем и не отклонялось в нем. Вообще в ультрарелятивистском случае вследствие Ур. (3.63) отсутствовало бы взаимодействие материи с гравитационным полем. Но это противоречит эксперименту.

б). **Векторная теория** неудовлетворительна тем, что векторные частицы (фотоны) приводят к притяжению противоположных по знаку частиц (частица + античастица) и отталкиванию одинаковых частиц.

в). **Теория типа R^2** явно или неявно содержит вторые производные по времени. Такие динамические системы не рассматриваются, поскольку нарушают всю традицию механики.

3.3.4. Теория гравитации с Λ -членом

Весьма важным для космологии обобщением уравнения (3.75) является уравнение с так называемым Λ -членом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.97)$$

Здесь Λ — некая константа, называемая космологической постоянной и имеющая размерность кривизны, то есть см^{-2} . Эта константа должна быть весьма малой, чтобы уравнения (3.75) и (3.97) фактически приводили бы к различным следствиям лишь на очень больших космических масштабах. При $\Lambda \rightarrow 0$ условия а) — г) этого параграфа выполнены.

Уравнение (3.97) рассматривалось еще Эйнштейном. Это уравнение может быть получено из вариационного принципа, если вместо (3.81) использовать следующее выражение для действия гравитационного поля:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda). \quad (3.98)$$

Теперь (3.97) выводится при помощи (3.86) и (3.87) из условия $\delta(S_g + S_m) = 0$.

3.4. Задача Коши. Псевдотензор энергии-импульса. Гармонические координаты.

3.4.1. Задача Коши

В этом параграфе в качестве независимых переменных берутся тетрада $e_\mu^a(x)$ и связность $\omega_\mu^{ab}(x)$. Эти переменные подчиняются уравнениям (3.75), в которых тензор кривизны выражен через связность согласно (2.79), и уравнениям (3.95).

Мы хотим изучить следующую задачу. Предположим, что на "гиперповерхности" $x^0 = \text{Const}$ заданы поля тетрады и связности. Можно ли найти эти поля на "гиперповерхности" $x^0 + \delta x^0$, используя уравнения (3.75) и (3.95) и заданные начальные условия при $x^0 = \text{Const}$? *Эта задача называется задачей Коши.*

Заметим, что тождество Бианки (3.73) вытекает непосредственно из определения тензора кривизны (2.79). Поэтому тождество (3.70) для тензора (3.74) имеет место всегда независимо от выполнения уравнений (3.75) и (3.95). Распишем тождество (3.70):

$$\dot{G}^{\mu 0} = -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma_{\sigma\nu}^\mu G^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\nu G^{\mu\sigma}. \quad (3.99)$$

Точка сверху означает производную $\partial/\partial x^0$. Согласно общим формулам пересчета связности (2.13) и с учетом (2.4) имеем

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = e_{\nu}^{\mu} e_{\lambda}^b \omega_{b\lambda}^a + e_a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} e_{\nu}^a. \quad (3.100)$$

Так как тензор $G^{\mu\nu}$ содержит величину $\dot{\omega}_{\mu}^{ab}$ в степени не выше первой, то с учетом (3.100) можно утверждать, что правая часть равенства (3.99) содержит $\dot{\omega}_{\mu}^{ab}$ в степени не выше первой. Следовательно, величина $G^{\mu 0}$ вовсе не зависит от $\dot{\omega}_{\mu}^{ab}$.

В уравнениях (3.75) и (3.95) не содержатся величины \dot{e}_0^a и $\dot{\omega}_0^{ab}$. Поэтому поля $e_0^a(x)$ и $\omega_0^{ab}(x)$ не являются динамическими переменными, они являются произвольными функциями, смысл которых выяснится ниже. Таким образом, динамическими переменными являются поля $e_i^a(x)$ и $\omega_i^{ab}(x)$, $i = 1, 2, 3$.

Выше было показано, что компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от $\dot{\omega}_i^{ab}$. Из определения тензора $G^{\mu\nu}$ (3.74) видно, что он не зависит от \dot{e}_i^a . Поскольку компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от производных $\partial/\partial x^0$ от каких-либо полей, то эти компоненты не могут зависеть также и от полей $\omega_0^{ab}(x)$. В противном случае была бы нарушена общая ковариантность теории. Далее, из (3.90), (3.92) и (3.81) видно, что действие S_g зависит от e_0^a линейно, и потому вариация S_g относительно e_0^a не зависит от e_0^a . С другой стороны, вследствие (3.87), симметрии тензора $G_{\mu\nu}$ и формулы

$$\delta g_{\mu\nu} = \eta_{ab} (e_{\mu}^a \delta e_{\nu}^b + e_{\nu}^b \delta e_{\mu}^a)$$

мы можем сделать вывод, что $G^{\mu 0}$ не зависит от e_0^a . Поэтому часть уравнений Эйнштейна

$$R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} = 0 \quad (3.101)$$

не содержат полей e_0^a , ω_0^{ab} , \dot{e}_i^a , $\dot{\omega}_i^{ab}$. Четыре уравнения (3.101) являются связями между переменными e_i^a и ω_i^{ab} на гиперповерхности $x^0 = \text{Const}$. Очевидно, что 12 из 24-х уравнений (3.95) также являются связями:

$$\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj} - \partial_j e_i^a - \omega_j^{ab} e_{bi} = 0. \quad (3.102)$$

Уравнениями движения являются уравнения

$$\dot{e}_i^a = -\omega_0^{ab} e_{bi} + \partial_i e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0}, \quad (3.103)$$

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R - \frac{8\pi G}{c^4}T^{ij} = 0. \quad (3.104)$$

Пусть на гиперповерхности $x^0 = \text{Const}$ заданы переменные e_i^a и ω_i^{ab} , удовлетворяющие условиям (3.101) и (3.102). Такие переменные будем называть допустимыми. Тогда при помощи Ур. (3.103) можно найти переменные e_i^a в момент времени $x^0 + \delta x^0$. Из этого же уравнения виден смысл полей ω_0^{ab} и e_0^a , которые произвольны. Поля ω_0^{ab} генерируют локальные преобразования Лоренца ОНБ $\{e^a\}$, а поля e_0^a производят общее преобразование локальных координат. Действительно, изменение метрики $g_{ij} = e_i^a e_{aj}$ за бесконечно малый промежуток времени δx^0 согласно (3.103) равно (сравни с (3.47))

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \delta x^0 \{ \partial_i e_0^a \cdot e_{aj} + e_{ai} \cdot \partial_j e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0} e_{aj} + \omega_j^{ab} e_{b0} e_{ai} \} = \\ &= \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i - \delta x^0 e_{a0} \{ (\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj}) + (\partial_j e_i^a + \omega_j^{ab} e_{bi}) \} = \\ &= \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Здесь $\xi_i = e_0^a e_{ai} \delta x^0$. При переходе к последнему равенству мы учли тетрадный постулат (2.47).

Для нахождения 18 полей ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$ не достаточно шести уравнений (3.104). Мы потребуем, чтобы 12 связей (3.102) сохранялись во времени. Это даст нам недостающие 12 уравнений. Для этого вычислим производную $\partial/\partial x^0$ от уравнений (3.102) и воспользуемся уравнениями (3.103) и еще раз уравнениями (3.102). В результате простого вычисления получаем:

$$R_{0i}^{ab} e_{bj} - R_{0j}^{ab} e_{bi} + R_{ij}^{ab} e_{b0} = 0. \quad (3.106)$$

Двенадцать уравнений (3.106) и шесть уравнений (3.104) относительно величин $\dot{\omega}_i^{ab}$ (все эти уравнения линейны) дают возможность найти все величины $\dot{\omega}_i^{ab}$ и тем самым найти поля ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$.

Остается установить, что найденные переменные e_i^a и ω_i^{ab} на гиперплоскости $x^0 + \delta x^0$ допустимы т.е. что связи (3.101) и (3.102) остаются в силе. Сохранение связей (3.102) заложено в саму процедуру решения, поскольку сохранение этих связей дает возможность найти $\dot{\omega}_i^{ab}$. Сохранение связей (3.101) вытекает из тожде-

ства Бианки

$$\nabla_\nu \left(G^{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \right) = 0,$$

которое с учетом уравнений связей (3.101) и движения (3.104) дает

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} \right) = 0.$$

К обсужденным здесь уравнениям гравитационных полей следует добавить уравнения движения для полей материи. Мы видим, что *в теории гравитации имеет смысл задача Коши. Однако задача Коши здесь содержит произвол: 4 функции e_0^a и 6 функций ω_0^{ab} , которые выбираются исходя из соображений удобства.*

3.4.2. Закон сохранения энергии-импульса

Выпишем ещё раз гравитационное действие (3.81):

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)}x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.107)$$

где тензор Риччи

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma. \quad (3.108)$$

Если связность выразить через метрику согласно (2.87), то действие (3.107) окажется зависящим от вторых производных метрического тензора, что неприемлемо с точки зрения канонического формализма механики. В данном случае эта трудность легко устраняется, т.к. вторые производные входят линейно в действие. Поэтому мы перебросим производные со связности на остальные множители. В результате получим с точностью до поверхностного члена, который не влияет на уравнение движения, следующее выражение для действия гравитационного поля:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^{(4)}x \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_\nu^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \right) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\lambda} + \Delta S. \quad (3.109)$$

Здесь ΔS — та часть действия, которая зависит квадратично от связности, но не зависит от производных метрического тензора непосредственно.

Таким образом, действие (3.109) зависит от связности $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ (но не от ее производных), от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его производных первого порядка $g_{\mu\nu,\lambda}$. Согласно (3.82), при варьировании действия (3.109) относительно метрического тензора коэффициенты связности можно формально считать независимыми переменными, вариация относительно которых равна нулю.

Формула (3.109) дает выражение для плотности лагранжиана гравитационного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G} (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \delta_{\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\lambda} + \Delta\mathcal{L}. \quad (3.110)$$

$\Delta\mathcal{L}$ зависит квадратично от связности и не зависит от $g_{\mu\nu,\lambda}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\sqrt{-g}t_{\mu}^{\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} g_{\lambda\sigma,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu}\mathcal{L}. \quad (3.111)$$

Имеем

$$(\sqrt{-g}t_{\mu}^{\nu})_{,\nu} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}}\right)_{,\nu} g_{\lambda\sigma,\mu} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}}\right) g_{\lambda\sigma,\mu\nu} - \mathcal{L}_{,\mu}.$$

Но

$$\mathcal{L}_{,\mu} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma}}\right) g_{\lambda\sigma,\mu} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}}\right) g_{\lambda\sigma,\mu\nu} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}}\right) \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\lambda}.$$

Как было сказано выше, здесь последнее слагаемое равно нулю. Поэтому

$$(\sqrt{-g}t_{\mu}^{\nu})_{,\nu} = \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}}\right)_{,\nu} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma}}\right) \right] g_{\lambda\sigma,\mu}. \quad (3.112)$$

Здесь выражение в квадратной скобке есть вариация действия S_g относительно вариации тензора $g_{\lambda\sigma}$, умноженная на $(-c)$. Поэтому в силу Ур. (3.89) выражение в квадратной скобке в (3.112) равно

$$[\dots] = -\frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{-g} \left(R^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} R \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\lambda\sigma}. \quad (3.113)$$

Последнее равенство является уравнением Эйнштейна (3.75). Комбинируя (3.112) и (3.113), получаем

$$(\sqrt{-g}t_\mu^\nu)_{,\nu} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\lambda\sigma}g_{\lambda\sigma,\mu} = 0. \quad (3.114)$$

Теперь воспользуемся формулой (2.95) и уравнениями движения материи в форме (3.52). При помощи этих двух равенств находим:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\lambda\sigma}g_{\lambda\sigma,\mu} = (\sqrt{-g}T_\mu^\nu)_{,\nu}, \quad (3.115)$$

и уравнение (3.114) принимает вид

$$\{\sqrt{-g}(t_\mu^\nu + T_\mu^\nu)\}_{,\nu} = 0. \quad (3.116)$$

Подчеркнем, что при выводе этих уравнений использовались уравнения движения.

Поскольку $T^{\mu\nu}$ является тензором энергии-импульса материи, то $t^{\mu\nu}$ естественно считать тензором энергии-импульса гравитационного поля. Таким образом, *Ур. (3.116) выражает закон сохранения полных энергии и импульса материи и гравитационного поля.* Однако компоненты $t^{\mu\nu}$ не образуют тензора (см. ниже). Поэтому $t^{\mu\nu}$ называют *псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля.*

Рассмотрим четыре дифференциальных 3-формы

$$\omega_\mu = \frac{1}{6}\sqrt{-g}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}(t_\mu^\nu + T_\mu^\nu)dx^\lambda \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (3.117)$$

Вследствие (3.116) (сравни с (2.105))

$$d\omega_\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.118)$$

Это означает, что 4-импульс

$$P_\mu = \int_{\mathcal{Y}} (t_\mu^\nu + T_\mu^\nu) dS_\nu, \\ dS_\nu = \frac{1}{6}\sqrt{-g}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} dx^\lambda \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (3.119)$$

сохраняется в силу уравнений движения (сравни с (2.105)). Здесь \mathcal{U} — некая 3-мерная гиперповерхность, например $x^0 = \text{Const}$. В последнем случае

$$P_\mu(x^0) = \int_{x^0=\text{Const}} (t_\mu^0 + T_\mu^0) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (3.120)$$

Более того, интегралы (3.119) или (3.120) не зависят от выбора локальных координат, так как можно, не изменяя координат в один момент времени, изменить их в другой момент времени. Но 4-импульс как сохраняющаяся величина один и тот же во все моменты времени.

Здесь следует сделать оговорку, что 4-импульс (3.119) сохраняется в том случае, если на пространственной бесконечности отсутствует поток 4-импульса через поверхность, ограничивающую объём. Это условие не всегда выполняется для конкретной системы. В случае, когда пространство не имеет границы (например, гиперповерхность $x^0 = \text{Const}$ является сферой S^3) это условие выполнено.

Формулу (3.111) можно переписать в виде

$$\sqrt{-g}t_\mu^\nu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) Q_{m,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}, \quad (3.121)$$

где Q_m , $m = 1, \dots, 10$ — любые 10 независимых функций десяти величин $g_{\lambda\sigma}$.

Действительно,

$$Q_{m,\rho} = \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) \delta_\rho^\nu g_{\lambda\sigma,\nu},$$

т.е.

$$\frac{\partial Q_{m,\rho}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} = \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) \delta_\rho^\nu. \quad (3.122)$$

Далее,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\rho}} \right) \frac{\partial Q_{m,\rho}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right)$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались равенством (3.122). Теперь имеем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\sigma,\nu}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) \left(\frac{\partial Q_m}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) g_{\lambda\sigma,\mu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \right) Q_{m,\mu},$$

что и требовалось.

Возьмем в качестве величин Q_m величины $\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma}$ и воспользуемся формулами (3.110) и (3.121). Напомним, что согласно (3.82) дифференцировать \mathcal{L} относительно связности излишне. Кроме того, $\Delta\mathcal{L}$ не зависит от $Q_{m,\mu}$. Поэтому без труда получаем

$$\sqrt{-g}t_{\mu}^{\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (\Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\nu}\Gamma_{\lambda\rho}^{\rho}) (\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma})_{,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu}\mathcal{L}. \quad (3.123)$$

Из последней формулы очевиден *нетензорный характер псевдотензора энергии-импульса*. Действительно, согласно Разделу 8.3 в любой точке величины $\Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu}$ могут быть сделаны равными нулю за счет выбора системы координат. Согласно (3.110) и (3.123) в этой точке псевдотензор энергии-импульса также обращается в нуль. Это означает также, что *гравитационная энергия не может быть локализована*.

Псевдотензор энергии-импульса определен неоднозначно. Всегда к $t_{\mu}^{\nu}\sqrt{-g}$ можно прибавить член вида $\eta_{\mu}^{\nu\lambda},_{\lambda}$, где $\eta_{\mu}^{\nu\lambda} = -\eta_{\mu}^{\lambda\nu}$. Новый псевдотензор по-прежнему будет удовлетворять закону сохранения (3.116).

3.4.3. Гармонические координаты

Будем рассматривать Ур. (3.75) как дифференциальные уравнения второго порядка относительно компонент метрического тензора.

Симметричный тензор в 4-мерном пространстве-времени имеет 10 независимых компонент. Поэтому, на первый взгляд, может показаться, что уравнений Эйнштейна при заданных граничных условиях может быть достаточно, чтобы определить $g_{\mu\nu}$ единственным образом.

Вспомним, однако, что тензор, стоящий в левой части Ур. (3.75), удовлетворяет тождеству (3.70), которое состоит из 4-х дифференциальных уравнений. Из этого тождества следует, что число независимых дифференциальных уравнений среди уравнений Эйнштейна равно $10 - 4 = 6$. Отсюда, в свою очередь следует, что Ур. (3.75) оставляют неопределенными 4 степени свободы в 10 неизвестных компонентах $g_{\mu\nu}$. Эти степени свободы соответствуют тому, что если $g_{\mu\nu}$ — решение уравнений Эйнштейна, то

решением его будет также и $g'_{\mu\nu}$, которое получается из $g_{\mu\nu}$ с помощью произвольного преобразования координат $x \rightarrow x'$. Такое преобразование координат вводит четыре произвольные функции $x'(x)$, соответствующие как раз четырем степеням свободы в решении уравнений Эйнштейна.

Недостаточность эйнштейновских уравнений для определения $g_{\mu\nu}$ единственным образом аналогична недостаточности уравнений Максвелла для однозначного определения вектор-потенциала A_μ . Эта неоднозначность используется в каждой конкретной задаче наложением калибровочного условия так, чтобы это облегчало решение задачи.

Аналогично поступают и в общей теории относительности. Из сказанного ясно, что в данном случае следует выбрать некоторую конкретную систему координат. При этом исключается неоднозначность в метрическом тензоре. Особенно удобны при наличии слабых гравитационных полей *условия гармоничности координат*

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (3.124)$$

Условие (3.124) всегда возможно. Действительно, согласно (2.27)

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda'} &= g^{\mu'\nu'}\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} g^{\mu'\nu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} g^{\mu'\nu'} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} g^{\sigma\rho} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda - \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \right) \right] \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} \right) g^{\sigma\rho} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda - \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} g^{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Если Γ^λ не исчезает, то мы вводим новую систему координат, решив следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda = 0. \quad (3.126)$$

Тогда согласно (3.125) $\Gamma^{\lambda'} = 0$ в координатах x' .

Чтобы выяснить математический смысл Ур. (3.126), используем представление символов Кристоффеля через метрический тензор (2.87), при помощи которого находим:

$$\Gamma^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\nu\lambda}). \quad (3.127)$$

При помощи (3.127) и (2.94) уравнения (3.126) переписываются в виде

$$-\square x^{\lambda'} = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.128)$$

Последние уравнения совпадают с (2.94), где вместо поля ϕ подставлены координаты $x^{\lambda'}$.

Теперь проясняется смысл термина "гармонические координаты": *гармонические координаты x' удовлетворяют уравнению д'Аламбера (2.94)*.

Пусть x^μ — гармонические координаты, т.е. условие (3.124) выполнено. Согласно (3.127) это означает выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.129)$$

Если x' — другие гармонические координаты, то согласно (3.126) они удовлетворяют уравнениям

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (3.130)$$

Очевидно, что в пространстве Минковского обычные ортогональные координаты являются гармоническими, поскольку $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $g = -1$. Тем самым условия (3.129) выполняются тривиально.

В неком смысле гармонические координаты в кривом пространстве максимально близки (в конечном участке пространства, в отличие от бесконечно малого участка пространства вблизи центра нормальных координат Римана) к ортогональным координатам в пространстве Минковского. Однако, хотя условия (3.124) накладывают некоторые ограничения на координаты, эти условия не фиксируют координаты однозначно. Это видно уже

на примере пространства Минковского. Действительно, если добавить к гармоническим координатам любые решения уравнения д'Аламбера (3.130), то новые координаты останутся гармоническими. Известно, что уравнение д'Аламбера имеет бесконечно много решений, которые легко описываются в пространстве Минковского. Ситуация опять аналогична ситуации в электродинамике. Фиксация калибровки условием $\partial_\mu A^\mu = 0$ неоднозначна, поскольку потенциал $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, $\square f = 0$, также удовлетворяет условию $\partial_\mu A'^\mu = 0$.

В заключение отметим, что условие (3.128) не является тензорным, т.к. координаты не являются скалярными величинами. Условия гармоничности отбирают некий класс координат, которые особенно полезны при изучении гравитационных волн.

Глава 4. Следствия из общей теории относительности

4.1. Гравитационное излучение

4.1.1. Слабое гравитационное поле

Случай слабого гравитационного поля означает, что метрика мало отличается от псевдоевклидовой, а связность и кривизна малы по абсолютной величине. На математическом языке это значит, что

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (4.1)$$

Выпишем связность и кривизну в первом порядке по $h_{\mu\nu}$. Согласно (2.87) и (2.67)

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_{\lambda}h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}h_{\lambda\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\nu\lambda}), \quad (4.2)$$

$$R_{\mu\nu}(h) = -\frac{1}{2}\{\partial^2 h_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\partial_{\lambda}h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}h_{\mu}^{\lambda}) + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\lambda}^{\lambda}\}, \quad (4.3)$$

$$\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}.$$

В этом разделе индексы величин, пропорциональных $h_{\mu\nu}$, поднимаются и опускаются при помощи величины $\eta_{\mu\nu}$. Например, $h_{\nu}^{\mu} = \eta^{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}$.

Мы будем искать решение линеаризованного уравнения Эйнштейна в форме (3.77)

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda}. \quad (4.4)$$

Заметим, что для малости гравитационного поля тензор энергии-импульса материи также должен быть малым. Поэтому при определении $S_{\mu\nu}$ в (4.4) используется $\eta_{\mu\nu}$. Учет $h_{\mu\nu}$ дал бы дополнительную малость. Уравнения (3.52) и (3.70) для величины (3.74) теперь принимают вид

$$\partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = 0, \quad \partial_{\mu}G_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) эквивалентны уравнениям

$$\partial_\mu S_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu S_\lambda^\lambda = 0, \quad \partial_\mu R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu R = 0. \quad (4.6)$$

При замене координат $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$, $\varepsilon^\mu \rightarrow 0$ метрика изменяется согласно (3.47):

$$\delta g_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) = \delta h_{\mu\nu}.$$

Непосредственно проверяется, что для тензора (4.3) справедливо тождество $R_{\mu\nu}(h) \equiv R_{\mu\nu}(h + \delta h)$ для любых $\varepsilon_\mu(x)$. Это свойство называется свойством калибровочной инвариантности Ур. (4.4). Здесь следует заметить, что это свойство инвариантности справедливо лишь в линейном по $h_{\mu\nu}$ и ε_μ приближении, когда слагаемые порядка $O(\varepsilon h)$ опускаются.

Чтобы устранить возникающую таким образом, неопределенность, будем работать в гармонических координатах. Мы увидим, что изучение поставленной задачи в гармонических координатах весьма удобно.

Таким образом, фиксируем калибровку условием (3.124):

$$\Gamma^\lambda = \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (4.7)$$

С учетом Ур. (4.2) условие (4.7) принимает вид

$$\partial_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\nu^\nu = 0. \quad (4.8)$$

Условие (4.8) всегда возможно. Если же оно не выполнено, то совершим указанное выше преобразование координат с параметрами ε_μ , удовлетворяющими уравнениям

$$\partial^2 \varepsilon_\mu = \partial_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\nu^\nu.$$

При условии (4.8) Ур. (4.4) принимает простой вид

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Одно из решений этого уравнения, называемое *запаздывающим*, имеет вид

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{4G}{c^4} \int d^{(3)}y \frac{S_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (4.10)$$

Прямая проверка показывает, что для решения (4.10) условие (4.8) выполнено как следствие уравнений (4.6). Наоборот, из Ур. (4.8) и (4.10) следуют Ур. (4.6), и потому с учетом Ур. (4.4) следуют также Ур. (4.5). Для дальнейших вычислений в этом параграфе Ур. (4.5) имеет большое значение, поскольку лишь T_{00} и T_{0i} в Ур. (4.9) в используемом здесь приближении непосредственно получаются из соответствующих компонент тензора энергии-импульса. В компоненты же T_{ij} в линеаризованном Ур. (4.9) должны быть включены нелинейные по $h_{\mu\nu}$ поправки, содержащиеся в $R_{\mu\nu}$, и имеющие тот же порядок величины, что и часть тензора энергии-импульса, содержащаяся в T_{ij} .

Действительно, в интересующем нас нерелятивистском случае согласно (3.36)

$$T^{00} \sim \mu c^2, \quad T^{0i} \sim \mu c v^i, \quad T^{ij} \sim \mu v^i v^j,$$

где μ — плотность массы и v^i — скорость материи. Поэтому из Ур. (4.9) имеем оценку

$$h_{\mu\nu} \sim \frac{GM}{c^2 r},$$

и вклад в T^{ij} от нелинейностей в $R_{\mu\nu}$ относительно $h_{\mu\nu}$ имеет нулевой порядок по c , что следовало бы учесть. Однако, вследствие Ур. (4.5) компоненты T_{ij} и T_{0i} исключаются из окончательной формулы, которая выражается лишь через компоненту T_{00} .

К решению (4.10) добавляется любое решение вида

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu = 0. \quad (4.11)$$

Выражение (4.10) интерпретируется как *гравитационное излучение, создаваемое источником $S_{\mu\nu}$* , в то время как дополнительный член, удовлетворяющий уравнениям (4.11), представляет собой *гравитационное излучение, приходящее из бесконечности*. Появление в (4.10) временного аргумента ($x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$) показывает, что *гравитационные эффекты распространяются со скоростью света*.

4.1.2. Случай плоской волны

Начнем изучение гравитационного излучения со случая плоской волны, распространяющейся в пустом пространстве. Математически эта задача сводится к описанию решений Ур. (4.11), зависящих от одной переменной $\psi = k_\mu x^\mu$, где k_μ — постоянный 4-вектор. Тогда имеем

$$h_{\mu\nu,\lambda} = u_{\mu\nu} k_\lambda, \quad u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}, \quad (4.12)$$

где $u_{\mu\nu}$ — производная от $h_{\mu\nu}$ по ψ . Уравнения (4.11) теперь принимают вид

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad \left(u^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} u \right) k_\nu = 0, \quad u = u^\mu{}_\mu. \quad (4.13)$$

Вычислим псевдотензор энергии-импульса, соответствующий плоской волне.

Прежде всего установим, что лагранжиан \mathcal{L} в (3.111) в данном случае равен нулю.

Заметим, что \mathcal{L} является полиномом второй степени относительно связности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ и, согласно (3.82), производная лагранжиана от связности равна нулю. В этом случае вклад в лагранжиан, линейный по связности, по модулю вдвое больше вклада, квадратичного по связности, и имеет противоположный знак. Иными словами, в (3.110) можно отбросить слагаемое $\Delta\mathcal{L}$ и одновременно умножить первое слагаемое на 1/2. Поэтому нам достаточно установить, что первое слагаемое в (3.110) равно нулю.

Для дальнейших вычислений необходимо найти некоторые величины с точностью до первого порядка по $h_{\mu\nu}$.

Из (4.2) находим

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} (u_\nu^\mu k_\lambda + u_\lambda^\mu k_\nu - u_{\nu\lambda} k^\mu). \quad (4.14)$$

Имеем

$$\begin{aligned} g_{,\lambda}^{\mu\nu} &= -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} g_{\sigma\rho,\lambda} = -\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} u_{\sigma\rho} k_\lambda = -u^{\mu\nu} k_\lambda, \\ \sqrt{-g}_{,\lambda} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\sigma\rho} g_{\sigma\rho,\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \eta^{\sigma\rho} u_{\sigma\rho} k_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{-g} u k_\lambda. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Поэтому

$$(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})_{,\lambda} = -\sqrt{-g}(u^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}u)k_{\lambda}. \quad (4.16)$$

Согласно (4.14), (4.16) и (4.13)

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})_{,\lambda} = 0, \quad \Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu}(\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma})_{,\mu} = \frac{1}{2}\left(u_{\lambda\sigma}u^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}u^2\right)k^{\nu}k_{\mu}. \quad (4.17)$$

Вышесказанное вместе с равенствами (4.17) и (4.13) означает, что *лагранжиан (3.110) плоской гравитационной волны равен нулю*. Обратим внимание на то, что лагранжиан плоской электромагнитной волны также равен нулю.

Теперь мы имеем все средства для вычисления псевдотензора энергии-импульса. Согласно (3.123) и (4.17) псевдотензор энергии-импульса плоской гравитационной волны имеет вид

$$\sqrt{-g}t_{\mu}^{\nu} = \frac{c^4}{32\pi G}\left(u_{\lambda\sigma}u^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}u^2\right)k^{\nu}k_{\mu}. \quad (4.18)$$

Рассмотрим частный случай, когда волна распространяется вдоль третьей оси. Тогда $k^0 = k^3 = k$, $k^1 = k^2 = 0$. В этом случае Ур. (4.13) дают соотношения

$$\begin{aligned} u_{00} + u_{03} &= \frac{1}{2}u, & u_{03} + u_{33} &= -\frac{1}{2}u, \\ u_{10} + u_{13} &= 0, & u_{20} + u_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$u_{00} - u_{33} = u = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33},$$

откуда

$$u_{11} + u_{22} = 0 \rightarrow u = u_{00} - u_{33}. \quad (4.20)$$

Складывая первые два уравнения, получаем

$$2u_{03} = -(u_{00} + u_{33}). \quad (4.21)$$

Далее

$$\begin{aligned} \xi \equiv u_{\lambda\sigma} u^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} u^2 = u_{00}^2 + u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 - 2u_{01}^2 - 2u_{02}^2 - 2u_{03}^2 + \\ + 2u_{12}^2 + 2u_{13}^2 + 2u_{23}^2 - \frac{1}{2} (u_{00} - u_{33})^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В последней сумме заменим u_{03} согласно (4.21) и учтем соотношения (4.19) и (4.20). В результате находим

$$\xi = 2(u_{11}^2 + u_{12}^2).$$

Таким образом

$$\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (u_{11}^2 + u_{12}^2) k^{\nu} k_{\mu}. \quad (4.23)$$

Отсюда видно, что *плотность энергии плоской гравитационной волны положительна*. В противном случае изучаемая теория не имела бы физического смысла, поскольку малые возмущения метрики относительно метрики Минковского приводили бы к уменьшению полной энергии системы. В результате плоский вакуум был бы неустойчив относительно рождения гравитонов, то есть плоский вакуум превращался бы в искривленный, что противоречит наблюдениям.

Мы видим также, что *псевдотензор энергии-импульса плоской волны зависит лишь от двух компонент поля $h_{\mu\nu}$* .

Этот факт имеет следующее объяснение. Четыре уравнения (4.13) оставляют независимыми шесть компонент $u_{\mu\nu}$ из десяти.

Теперь заметим, что

$$u'^{\mu\nu} = u^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu} k^{\nu} + \varepsilon^{\nu} k^{\mu} \quad (4.24)$$

также удовлетворяют Ур. (4.13) для любых величин ε^{μ} .

Можно сделать вывод, что для произвольных значений четырех параметров ε_{μ} тензоры поляризации $u'_{\mu\nu}$ и $u_{\mu\nu}$ соответствуют одной и той же физической картине. Именно поэтому из шести независимых компонент, удовлетворяющих (4.13), только $6 - 4 = 2$ компоненты имеют физическое значение. В рассмотренном нами случае, когда $k_{\mu} = (k, 0, 0, -k)$, четыре компоненты

u_{0i} и u_{22} выражаются через остальные шесть компонент при помощи уравнений (4.19)-(4.21), а для последних преобразование (4.24) означает

$$\begin{aligned} u'_{11} &= u_{11}, & u'_{12} &= u_{12}, \\ u'_{13} &= u_{13} - \varepsilon_1 k, & u'_{23} &= u_{23} - \varepsilon_2 k, \\ u'_{33} &= u_{33} - 2\varepsilon_3 k, & u'_{00} &= u_{00} + 2\varepsilon_0 k. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Беря

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{13}}{k}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u_{23}}{k}, \quad \varepsilon_3 = \frac{u_{33}}{2k}, \quad \varepsilon_0 = -\frac{u_{00}}{2k},$$

мы обращаем в нуль следующие компоненты: u_{00} , u_{33} , u_{23} , u_{13} , u_{0i} . Компоненты u_{11} и u_{12} вообще не изменяются под действием преобразования (4.24).

Произведем поворот в плоскости (12) на угол ϕ . Матрица ω_ν^μ этого поворота имеет компоненты:

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= \cos \phi, & \omega_2^1 &= \sin \phi, & \omega_1^2 &= -\sin \phi, \\ \omega_2^2 &= \cos \phi, & \omega_0^0 &= \omega_3^3 &= 1. \end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы ω_ν^μ равны нулю. Преобразованный тензор поляризации имеет вид $u'_{\mu\nu} = \omega_\mu^\lambda \omega_\nu^\sigma u_{\lambda\sigma}$. Отсюда для нужных нам компонент находим

$$u'_{11} = \cos 2\phi \cdot u_{11} - \sin 2\phi \cdot u_{12}, \quad u'_{12} = \sin 2\phi \cdot u_{11} + \cos 2\phi \cdot u_{12}.$$

Отсюда видно, что

$$u'_\pm = \exp(\pm 2i\phi) \cdot u_\pm, \quad u_\pm = u_{11} \pm i u_{12}. \quad (4.26)$$

Тем самым мы можем интерпретировать компоненты u_\pm как амплитуды волн, имеющих спиральность (проекцию спина на ось "3") ± 2 , соответственно. Таким образом установлено, что *гравитационные волны являются частицами со спином 2 и спиральностью ± 2* .

4.1.3. Излучение гравитационных волн

Пусть движущаяся материя заключена в ограниченной области пространства, размеры которой $\sim a$. Изучим излучаемое

системой гравитационное поле на расстояниях $r = |\mathbf{x}| \gg a$. Поскольку в (4.10) $|\mathbf{y}| \sim a$, то $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ можно заменить на $r - \mathbf{n}\mathbf{y}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$. Так как нас интересует именно поле излучения, то в (4.10) нам следует учесть лишь вклад $\sim O(r^{-1})$:

$$h_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{rc^4} \int d^{(3)}y S_{\mu\nu}(\psi + \mathbf{n}\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (4.27)$$

где

$$\psi = k_\mu x^\mu = x^0 - r, \quad k_\mu = (1, -\mathbf{n}). \quad (4.28)$$

Мы видим, что на больших расстояниях поле излучения (4.27) ведет себя как плоская волна. С нужной нам точностью $O(r^{-1})$ имеем (см. (4.4) и (4.12)):

$$u_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial h_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x})}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tau_\lambda^\lambda \right\}. \quad (4.29)$$

Для сокращения записи введено обозначение

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{4G}{rc^4} \int d^{(3)}y T_{\mu\nu}(\psi + \mathbf{n}\mathbf{y}, \mathbf{y}). \quad (4.30)$$

Простые вычисления с использованием (4.29) приводят к формуле

$$u_{\mu\nu} u^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (u^\mu_\mu)^2 = \frac{\partial \tau_{\mu\nu}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \tau^{\mu\nu}}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_\lambda^\lambda}{\partial \psi} \right)^2. \quad (4.31)$$

При помощи формул (4.29)-(4.31) и (4.18) принципиально решается проблема излучения гравитационной энергии пространственно ограниченной материальной системой, если задан ее тензор энергии-импульса. Выписанные до сих пор формулы точные, поскольку речь идет об учете излученных гравитационных волн.

Далее мы будем предполагать, что материя движется с малыми скоростями по сравнению со скоростью света. В этом случае эффекты запаздывания дают малые поправки, которые учитываются путем разложения тензора энергии-импульса в (4.30)

по \mathbf{ny} . Рассмотрим величину

$$\frac{\partial \tau^{00}}{\partial \psi} = -\frac{4G}{rc^4} \int d^{(3)}y \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) + (\mathbf{ny}) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} (\mathbf{ny})^2 \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) + \dots \right\}. \quad (4.32)$$

Каждое дифференцирование по ψ дает множитель c^{-1} . Легко видеть, что первое и второе слагаемые в фигурной скобке в (4.32) дают нулевой вклад в интеграл. Для этого распишем закон сохранения (4.5):

$$\frac{\partial}{\partial \psi} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y^j} T^{0j}(\psi, \mathbf{y}), \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} T^{0i}(\psi, \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y^j} T^{ij}(\psi, \mathbf{y}). \quad (4.34)$$

Из Ур. (4.33)-(4.34) вытекает следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} T^{00}(\psi, \mathbf{y}) = \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} T^{ij}(\psi, \mathbf{y}). \quad (4.35)$$

Из равенств (4.33) и (4.35) видно, что первое и второе слагаемые в (4.32) дают нулевой вклад в интеграл. Поэтому в наинизшем по \mathbf{ny} приближении

$$\frac{\partial \tau^{00}}{\partial \psi} = -\frac{2G}{3rc^5} n^i n^j (\ddot{D}^{ij} + \delta^{ij} \ddot{D}). \quad (4.36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^{(3)}y (3y^i y^j - \delta^{ij} y^2) T^{00}(\psi, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^{(3)}y (3y^i y^j - \delta^{ij} y^2) \mu(\psi, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

— квадрупольный момент материи и

$$D = \frac{1}{c^2} \int d^{(3)}y \cdot y^2 T^{00}(\psi, \mathbf{y}),$$

так, что $D^{ij} + \delta^{ij}D = 3c^{-2} \int d^{(3)}y \cdot y^i y^j T^{00}$.

При написании второго равенства (4.37) было учтено, что в нерелятивистском пределе $T^{00} = c^2\mu$, где μ — плотность массы вещества (см. (3.67)). Точка сверху означает частную производную по времени $\partial/\partial t$.

Путем интегрирования по частям устанавливается, что

$$\int d^{(3)}y \frac{\partial}{\partial \psi} T^{ij}(\psi, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int d^{(3)}y y^i y^j \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l} \frac{\partial}{\partial \psi} T^{kl}(\psi, \mathbf{y}).$$

Пользуясь (4.35), преобразуем правую часть последнего равенства к виду

$$\frac{1}{2} \int d^{(3)}y y^i y^j \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} T^{00}(\psi, \mathbf{y}).$$

Отсюда (см. (4.30)):

$$\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial \psi} = -\frac{2G}{3rc^5} (\ddot{D}^{ij} + \delta^{ij} \ddot{D}). \quad (4.38)$$

Наконец,

$$\frac{\partial \tau^{0i}}{\partial \psi} = -\frac{4G}{rc^4} \int d^{(3)}y \left[\frac{\partial}{\partial \psi} T^{0i}(\psi, \mathbf{y}) + (\mathbf{n}\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} T^{0i}(\psi, \mathbf{y}) + \dots \right]. \quad (4.39)$$

Вследствие (4.34) первое слагаемое в (4.39) не дает вклада в интеграл, а второе слагаемое приводит к ненулевому результату

$$\frac{\partial \tau^{0i}}{\partial \psi} = -\frac{2G}{3rc^5} n^j (\ddot{D}^{ij} + \delta^{ij} \ddot{D}). \quad (4.40)$$

Выразим при помощи формул (4.36), (4.38) и (4.40) величину (4.31) через квадрупольный момент вещества и затем согласно (4.18) найдем интересующие нас компоненты псевдотензора энергии-импульса $\sqrt{-g} t^{0i}$.

В результате, при помощи Ур. (3.116), находим для потока энергии, уносимой гравитационными волнами в элемент телесного угла $d\omega$ в единицу времени, следующее выражение

$$\begin{aligned} dI &\equiv c(t^{0i}n^i)r^2 d\omega = \\ &= \frac{G}{36\pi c^5} \left\{ \frac{1}{4}(n^i n^j \ddot{D}^{ij})^2 - n^j n^k \ddot{D}^{ij} \ddot{D}^{ik} + \frac{1}{2}(\ddot{D}^{ij})^2 \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Для того, чтобы вычислить энергию I , уносимую гравитационными волнами по всем направлениям в единицу времени, следует проинтегрировать выражение (4.41) по всем телесным углам. Поскольку квадрупольный момент не зависит от вектора \mathbf{n} , то интегрирование в (4.41) по углам сводится к умножению этого выражения на 4π и замене в нем

$$n^i n^j \rightarrow \frac{1}{3} \delta^{ij}, \quad n^i n^j n^k n^l \rightarrow \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Таким образом

$$I = \frac{G}{45 c^5} (\ddot{D}^{ij})^2. \quad (4.42)$$

Например, для полной интенсивности гравитационного излучения двух тел с массами m_1 и m_2 , движущихся по круговой орбите радиуса r под действием силы тяготения, легко получить следующую формулу:

$$I = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5}. \quad (4.43)$$

Так как излучение гравитационных волн пропорционально Gc^{-5} , то этот эффект чрезвычайно мал. В частности, формула (4.43) дает для двух звезд с массами $\sim 10^{33}$ г (масса Солнца), движущихся по орбите $r \sim 10^{13}$ см (радиус орбиты Земли) мощность гравитационного излучения $\sim 10^{20}$ эрг/сек. Для сравнения укажем мощность электромагнитного излучения Солнца: $\sim 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек. Однако, согласно (4.43), интенсивность излучения гравитационных волн звёздной системой чрезвычайно сильно зависит от расстояния между звёздами. Например, если расстояние между звёздами уменьшить в сто раз, то мощность гравитационного и электромагнитного излучения становятся соизмеримыми (мощность электромагнитного излучения практически не зависит от межзвездного расстояния).

4.1.4. О методике регистрации гравитационных волн

В настоящее время факт существования гравитационных волн является установленным благодаря наблюдениям за двой-

ными звёздными системами, в которых межзвёздное расстояние r достаточно мало. Формула (4.43) дает возможность оценить изменение механической энергии таких систем за счет излучения гравитационных волн. Вместе с уменьшением механической энергии уменьшается межзвёздное расстояние r , период обращения и прочие механические характеристики системы. Поскольку излучение гравитационных волн является весьма интенсивным, то изменение во времени механических характеристик оказывается измеримым с достаточной точностью. Эти измерения согласуются с хорошей точностью с оценками, вытекающими из формулы (4.43). Поскольку других источников потери энергии системой аналогичной интенсивности не существует, то эти наблюдения являются косвенным подтверждением существования гравитационных волн.

Коротко опишем некоторые мыслимые прямые методы регистрации гравитационных волн.

I. Обозначим координаты (ct, x, y, z) и предположим, что плоская гравитационная волна распространяется вдоль оси z и имеет поляризацию (см. (4.25))

$$u = u_{xx} = -u_{yy} \neq 0, \quad (4.44)$$

причем все остальные компоненты $u_{\mu\nu} = 0$. Отсюда согласно (4.14) $\Gamma_{00}^i = 0$, и потому из уравнения движения свободной нерелятивистской частицы (3.25) находим, что в рассматриваемой гравитационной волне для точечной массивной частицы имеется решение

$$x = \text{Const}, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (4.45)$$

С другой стороны, пространственная метрика согласно (3.9), (4.1), (4.12) и (4.44) осциллирует:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 1 + u_0 \cos [k(z - ct)], & \gamma_{22} &= 1 - u_0 \cos [k(z - ct)], \\ \gamma_{33} &= 1, & \gamma_{12} &= \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Пусть жесткий массивный стержень длины L_0 (при отсутствии гравитационной волны) расположен вдоль оси x . Если бы

силы упругости отсутствовали или если бы они не успевали реагировать на поле волны, то согласно (4.45) в поле гравитационной волны координатная длина стержня вдоль оси x осталась бы $L_0 = \text{Const}$. Предположим, что именно такая ситуация реализуется в нулевом приближении. Тогда, согласно (3.10) и (4.46), физическая длина стержня L равна

$$L = \left\{ 1 + \frac{1}{2} u_0 \cos [k(z - ct)] \right\} L_0. \quad (4.47)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае физическая длина стержня колеблется и возникают периодические напряжения, приводящие к колебаниям, период которых равен периоду гравитационной волны. Периодические внутренние напряжения, приводящие к колебаниям, возникают при любых предположениях относительно взаимодействия стержня и гравитационной волны. Если частота собственных колебаний стержня равна частоте гравитационной волны, то возникает резонанс и эффект будет легче наблюдать. Именно такова идея эксперимента Вебера, который был проведен в 60-х годах. Однако, достоверных положительных результатов, полученных при помощи эксперимента Вебера и подтверждающих существование гравитационных волн, до сих пор получено не было.

В настоящее время в Европе и США готовятся новые эксперименты по обнаружению гравитационных волн. Точность экспериментов будет иметь порядок $|h_{\mu\nu}| \sim 10^{-21}$. Эти эксперименты исключительно сложны. Для сравнения укажем, что точность первых экспериментов по обнаружению гравитационных волн была примерно на десять порядков ниже.

II. Более перспективным методом прямого обнаружения гравитационных волн является метод, основанный на использовании интерферометра Майкельсона.

Принципиальная схема интерферометра Майкельсона изображена на Рис. 4.1. Пусть при отсутствии гравитационных волн расстояние между светоделителем и зеркалами $M1$ и $M2$ равно L_0 . Гравитационная волна с фиксированной длиной волны $\lambda \gg L_0$ распространяется вдоль оси z (см. Подраздел 4.1.4. I). Тогда метрический тензор задается согласно (4.46). Предположим, что также как и в Подразделе 4.1.4. I, в гравитационной

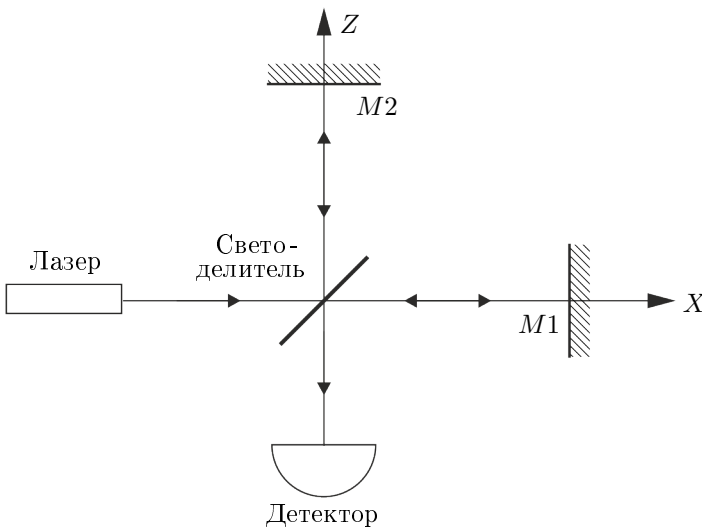


Рис. 4.1. Интерферометр Майкельсона

волне координатное расстояние между светоделителем и зеркалами $M1$ и $M2$ остаётся равным L_0 . Это означает, что физическое расстояние между светоделителем и зеркалом $M2$ остаётся L_0 , а физическое расстояние между светоделителем и зеркалом $M1$ оказывается равным (4.47). Вследствие этого разделённые пучки лазерного излучения, отразившись от зеркал $M1$ и $M2$, интерферируют в детекторе в зависимости от разности фаз в пучках.

Согласно (3.21), фазы пучков определяются уравнением для их эйконалов:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (4.48)$$

В нашем случае ненулевые компоненты метрического тензора имеют вид

$$\begin{aligned} g^{00} &= 1, & g^{11} &= -1 + u_0 \cos \phi, & g^{22} &= -1 - u_0 \cos \phi, \\ g^{33} &= -1, & \phi &= k(z - ct). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Предположим, что $|kL_0| \ll 1$. Тогда можно считать фазу ϕ в (4.49) постоянной в процессе пролёта фотона от светоделителя до зеркала и обратно до детектора. При помощи (4.48) и (4.49) находим решения для эйконалов ψ_1 и ψ_2 пучков, отразившихся

от первого и второго зеркал, соответственно:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= k_f \left[x^0 \pm \left(1 + \frac{1}{2} u_0 \cos \phi \right) x^1 \right], \\ \psi_2 &= k_f [x^0 \pm x^1].\end{aligned}$$

Здесь k_f — волновое число фотонов лазера. Отсюда и с учётом неравенства $|kL_0| \ll 1$ видно, что разность фаз двух разделённых в светоделителе пучков лазера и встретившихся в детекторе, равна

$$\delta = k_f L_0 u_0 \cos(kx^0).$$

Интенсивность же лазерного излучения, попавшего в детектор, определяется формулой

$$I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \delta).$$

В начале 2016 года в журнале *Phys. Rev. Lett.* появилось сообщение об экспериментальном обнаружении гравитационных волн при помощи интерферометра Майкельсона.

4.2. Центральное-симметричное гравитационное поле

4.2.1. Решение Шварцшильда

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Это означает, что метрика ds^2 инвариантна по отношению к пространственной группе вращений. Если ввести "пространственный" единичный вектор, $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, то весь набор пространственных координат будет (r, \mathbf{n}) , а общий вид метрики

$$ds^2 = h(r, t) dr^2 + k(r, t)(d\mathbf{n})^2 + l(r, t) dt^2 + a(r, t) dr dt. \quad (4.50)$$

Выражение (4.50) остается инвариантным по отношению к ортогональным преобразованиям $\mathbf{n} = \mathcal{O}\mathbf{n}'$, $(\mathbf{n})^2 = (\mathbf{n}')^2$. Форма метрики (4.50) сохраняется при произвольных преобразованиях координат (r, t) : $r' = \phi(r, t)$, $t' = \psi(r, t)$.

Таким образом, в нашем распоряжении имеются две произвольные функции ϕ и ψ , подбирая которые, можно добиться равенств $a(r, t) = 0$, $k(r, t) = -r^2$. Тогда

$$ds^2 = e^\nu dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2. \quad (4.51)$$

Функции ν и λ зависят от переменных r, x^0 . Вид метрики (4.51) означает, что длина окружности с центром в начале координат равна $2\pi r$, где r — радиус окружности. Однако, расстояние от центра до точки на окружности равно не r , а $\int_0^r dr' \exp \frac{1}{2}\lambda(r', x^0)$.

В изучаемой нами задаче тензор энергии-импульса материи зависит лишь от переменных (r, t) и скорость направлена по радиусу.

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики (4.51). Для этого введем 1-формы ω^a :

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \left(\exp \frac{1}{2}\nu \right) dx^0, & \omega^1 &= \left(\exp \frac{1}{2}\lambda \right) dr, \\ \omega^2 &= r d\theta, & \omega^3 &= r \sin\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Метрика (4.51) представляется в виде $ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b$ (см. (2.45)). Таким образом, 1-формы ω^a являются формами смещения в некоем ОНБ. Выпишем внешний дифференциал форм ω^a :

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= -\frac{1}{2}\nu'e^{-\lambda/2}\omega^0 \wedge \omega^1, & d\omega^1 &= \frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{-\nu/2}\omega^0 \wedge \omega^1, \\ d\omega^2 &= \frac{1}{r}e^{-\lambda/2}\omega^1 \wedge \omega^2, & d\omega^3 &= \frac{1}{r}e^{-\lambda/2}\omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{1}{r}\text{ctg}\theta\omega^2 \wedge \omega^3. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Штрих и точка сверху означают частные производные $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial x^0$, соответственно.

Отсюда находим коэффициенты C_{abc} , через которые выражается связность согласно (2.89). Везде далее мы выписываем лишь ненулевые компоненты различных величин

$$\begin{aligned} C_{0,01} &= -\frac{1}{4}\nu'e^{-\lambda/2}, & C_{1,01} &= -\frac{1}{4}\dot{\lambda}e^{-\nu/2}, \\ C_{2,12} &= -\frac{1}{2r}e^{-\lambda/2}, & C_{3,13} &= -\frac{1}{2r}e^{-\lambda/2}, & C_{3,23} &= -\frac{1}{2r}\text{ctg}\theta. \end{aligned}$$

Теперь получаем для $\omega_{ab} = (C_{abc} - C_{bac} - C_{cab})\omega^c$:

$$\begin{aligned}\omega^{01} &= -\frac{1}{2}\nu'e^{-\lambda/2}\omega^0 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{-\nu/2}\omega^1, \\ \omega^{12} &= \frac{1}{r}e^{-\lambda/2}\omega^2, \quad \omega^{13} = \frac{1}{r}e^{-\lambda/2}\omega^3, \quad \omega^{23} = \frac{1}{r}\cot\theta\omega^3.\end{aligned}\quad (4.54)$$

В результате простых, хотя и длительных вычислений, находим согласно (2.79) компоненты тензора кривизны $R^{ab} = R_{cd}^{ab}\omega^c \wedge \omega^d$:

$$\begin{aligned}R_{01}^{01} &= \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{1}{2}(\nu')^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' \right] - \frac{1}{2}e^{-\nu} \left[\ddot{\lambda} + \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} \right], \\ R_{02}^{02} &= R_{03}^{03} = \frac{1}{2r}\nu'e^{-\lambda}, \quad R_{12}^{02} = -R_{02}^{12} = R_{13}^{03} = -R_{03}^{13} = \frac{1}{2r}\dot{\lambda}e^{-\frac{\lambda+\nu}{2}}, \\ R_{12}^{12} &= R_{13}^{13} = -\frac{1}{2r}\lambda'e^{-\lambda}, \quad R_{23}^{23} = \frac{1}{r^2}(e^{-\lambda} - 1).\end{aligned}\quad (4.55)$$

Теперь не составляет труда выписать уравнения Эйнштейна (3.75):

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r}\lambda' - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0, \quad (4.56)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1, \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{1}{2}(\nu')^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2}\nu'\lambda' \right] + \\ + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left[\ddot{\lambda} + \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} \right] = \frac{8\pi G}{c^4}T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^4}T_3^3,\end{aligned}\quad (4.58)$$

$$-\frac{1}{r}\dot{\lambda}e^{-(\lambda+\nu)/2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^1. \quad (4.59)$$

Остальные компоненты уравнения Эйнштейна тождественно обращаются в нуль. Компоненты тензора энергии-импульса должны быть выражены через плотность энергии материи ε , давление p и радиальную скорость согласно (3.54).

Умножим Ур. (4.56) на r^2 :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r - re^{-\lambda}) = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 T_0^0. \quad (4.60)$$

Уравнения (4.56)-(4.59) можно проинтегрировать до конца не только в пустоте, то есть вне создающей гравитационное поле массивной материи и при отсутствии электромагнитного поля, но и в некоторых случаях при наличии электромагнитного поля (но не массивной материи). Например, рассмотрим случай с ненулевым точечным электрическим зарядом Q в центре и отсутствующей массивной материей при $r > a$. В этом случае тензор энергии-импульса материи не равен нулю при любых r . Вычислим его.

Выпишем нулевую компоненту Ур. (3.41):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} F^{io}) = 4\pi \sqrt{-g} J^0 = 4\pi Q \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (4.61)$$

Здесь локальными координатами являются (x^0, r, θ, ϕ) . Будем искать решение Ур. (4.61) в виде

$$F^{r0} \neq 0, \quad \text{остальные } F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.62)$$

Согласно (4.51) $\sqrt{-g} = e^{(\nu+\lambda)/2} r^2 \sin \theta$. Поэтому согласно Ур. (4.61) при $r > 0$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \sin \theta F^{r0} \right] = 0 \longrightarrow F^{r0} = \frac{Q}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}. \quad (4.63)$$

В (4.61) и (4.63) Q есть одна и та же величина — полный электрический заряд. В этом убеждаемся без труда путём интегрирования Ур. (4.61) $\int d^{(3)}x$, применения к левой части теоремы Гаусса и использования решения (4.63). Если электрический заряд распределён при $r < a$ центрально симметричным образом, то решение (4.63) остаётся справедливым при $r > a$.

В ортонормированном базисе тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ab} = -\frac{1}{4\pi} \left(\eta_{cd} F^{ac} F^{bd} - \frac{1}{4} \eta^{ab} F^2 \right). \quad (4.64)$$

В нашем ортонормированном базисе $F^{ab} = e_\mu^a e_\nu^b F^{\mu\nu}$ и $e_\mu^a = \text{diag}(e^{\nu/2}, e^{\lambda/2}, r, r \sin \theta)$. Поэтому

$$F^{10} = e_\mu^1 e_\nu^0 F^{\mu\nu} = e^{(\nu+\lambda)/2} F^{r0} = \frac{Q}{r^2}.$$

Остальные компоненты $F^{\mu\nu}$ равны нулю. Теперь при помощи (4.64) находим в области $r > a$:

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = \frac{1}{8\pi} (F^{10})^2 = \frac{Q^2}{8\pi r^4}. \quad (4.65)$$

Остальные компоненты T^{ab} равны нулю. Уравнения Эйнштейна (4.56), (4.57) и (4.59) сводятся к следующим уравнениям:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \lambda' - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 = \frac{GQ^2}{c^4 r^4}, \quad (4.66)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \nu' + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 = \frac{GQ^2}{c^4 r^4}, \quad (4.67)$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (4.68)$$

Вычитая из Ур. (4.66) Ур. (4.67), находим $\lambda' + \nu' = 0$, откуда $\lambda + \nu = f(t)$. При больших r пространство должно быть близко к плоскому, так что при $r \rightarrow \infty$, λ и ν должно стремиться к нулю. Поэтому

$$\lambda + \nu = 0. \quad (4.69)$$

Уравнения (4.68) и (4.69) показывают, что λ и ν зависят лишь от r .

Умножим Ур. (4.66) на r^2 :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r - r e^{-\lambda}) = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 T_0^0 = \frac{GQ^2}{c^4 r^2} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GQ^2}{c^4 r} \right). \quad (4.70)$$

Это уравнение интегрируется, и мы находим при $r > a$:

$$g_{00} = e^{-\lambda} = e^\nu = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad q^2 \equiv \frac{GQ^2}{c^4}. \quad (4.71)$$

Здесь r_g — константа интегрирования, имеющая размерность длины. Она называется *гравитационным радиусом тела*, создающего гравитационное поле. Легко найти связь между гравитационным радиусом и массой тела. Из Ур. (3.65) находим, что на больших расстояниях от тела массы M ньютоновский потенциал равен $\phi = -GM/r$, а из Ур. (3.27) следует, что $g_{00} \rightarrow 1 - 2GM/(c^2r)$ при $r \rightarrow \infty$. С другой стороны, из (4.71) видно, что на достаточно больших расстояниях кулоновский вклад может быть опущен, и мы имеем $g_{00} = 1 - r_g/r$. Поэтому

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4.72)$$

Решение (4.71) удовлетворяет также и уравнению (4.58). Таким образом, метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.73)$$

является центрально симметричным решением уравнения Эйнштейна при $r > a$ и при наличии в центре электрического заряда.

Следует заметить, что при $q < r_g/2$ величина $(1 - r_g/r + q^2/r^2)$ обращается в нуль при следующих значениях радиуса:

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}r_g \pm \sqrt{\frac{1}{4}r_g^2 - q^2} < r_g. \quad (4.74)$$

Мы видим, что используемые координаты имеют смысл лишь при $r > r_1$. Проблема введения более глобальных координат в центрально симметричном случае при нулевом электрическом заряде рассматривается далее в этом разделе. Согласно (4.73) при $Q = 0$ мы имеем:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.75)$$

Метрика (4.75) называется *метрикой Шварцшильда*.

Согласно (4.75) пространственная метрика определяется формулой

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.76)$$

Уже отмечалось, что в этой метрике длина окружности $r = \text{Const}$ с центром в точке $r = 0$ есть $2\pi r$. Из (4.76) видно, что длина участка кривой $r_1 < r < r^2$, $\theta = \text{Const}$, $\phi = \text{Const}$ есть

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (4.77)$$

Далее из (3.7) и (4.76) имеем

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt. \quad (4.78)$$

Таким образом, *на конечных расстояниях от масс происходит замедление времени по сравнению со временем на бесконечности.*

Рассмотрим первое из уравнений (4.70) при наличии массивной материи. Из этого уравнения видно, что при $r \rightarrow 0$ λ стремится к нулю по крайней мере как r^2 . В противном случае тензор энергии-импульса имел бы особенность в нуле $\sim r^{-2}$. Интегрируя уравнение (4.70), находим

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi G}{c^4 r} \int_0^r T_0^0 r'^2 dr'\right). \quad (4.79)$$

Так как при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$, то при $r > a$

$$\lambda(r) = -\ln \left(1 - \frac{8\pi G}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r'^2 dr'\right).$$

Сравнивая последнюю формулу с (4.71) и (4.72), получаем для полной массы тела следующее выражение

$$M = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr. \quad (4.80)$$

Для статического распределения вещества в теле звезды имеем согласно (3.55) $T_0^0 = \varepsilon$. Поэтому

$$M = \int_0^a \mu \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (4.81)$$

где μ — плотность массы тела. Согласно (4.76) элемент пространственного объема равен $dV = \varepsilon^{\lambda/2} 4\pi r^2 dr$. Но, так как $T_0^0 \geq \varepsilon > 0$, то из (4.79) видно, что $\lambda > 0$. Поэтому $dV > 4\pi r^2 dr$, и из формулы (4.81) следует, что полная масса тела меньше суммы масс его отдельных частей. *Это явление называется гравитационным дефектом массы тела.*

Рассмотрим падение частицы к центру вдоль радиуса. Воспользуемся формулами, полученными в Подразделе 4.2.4, в которых в нашем случае следует положить $M = 0$. Вычислим мировое время полета Δt частицы от r_1 до r_2 , $r_1 > r_2$. При помощи (4.116) находим

$$\Delta t = \frac{\varepsilon}{mc^3} \int_{r_2}^{r_1} dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{r_g}{r} \right]^{-1/2}. \quad (4.82)$$

Этот интеграл расходится при стремлении r_2 к r_g как $-r_g/c \ln(r_2 - r_g)$. Отсюда асимптотически имеем

$$r(t) - r_g = \text{Const} \exp\left(-\frac{ct}{r_g}\right). \quad (4.83)$$

Мы видим, что в мировом времени (с точки зрения удаленного наблюдателя) падающая частица достигает гравитационный радиус за бесконечное время.

Метрика (4.75) имеет особенность при $r = r_g$. Однако, это не означает, что пространство-время сингулярно при $r = r_g$. Действительно, согласно (4.55) и (4.71) (с $Q = 0$) ненулевые компоненты тензора кривизны равны

$$R_{01}^{01} = R_{23}^{23} = -\frac{r_g}{r^3}, \quad R_{02}^{02} = R_{12}^{12} = \frac{r_g}{2r^3},$$

следовательно, имеют сингулярность лишь при $r = 0$. Поэтому сингулярность метрики Шварцшильда при $r = r_g$ является

следствием выбора системы координат. По этой причине целесообразно ввести (и это возможно) более глобальные координаты.

4.2.2. Координаты Крускала

В 1960 году Крускал ввел наиболее полную систему координат для черной дыры, вся масса которой сосредоточена в одной особой точке $r = 0$. В координатах Крускала переменные θ , ϕ остаются прежними, а вместо переменных $x^0 = ct$ и r вводятся переменные v и u согласно формулам

$$T^2 \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right) \exp \frac{r}{r_g} = u^2 - v^2, \quad (4.84)$$

$$x^0 = 2r_g \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = r_g \operatorname{arctg} \frac{2uv}{u^2 + v^2}. \quad (4.85)$$

Здесь T — свободный параметр. Формулы (4.84)-(4.85) легко обращаются. Например, если $u > |v| \geq 0$, то

$$\begin{aligned} u &= T \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} \left(\exp \frac{r}{2r_g} \right) \operatorname{ch} \frac{x^0}{2r_g}, \\ v &= T \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} \left(\exp \frac{r}{2r_g} \right) \operatorname{sh} \frac{x^0}{2r_g}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Метрика Шварцшильда в переменных Крускала имеет вид

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{T^2 r} \exp \left(-\frac{r}{r_g} \right) (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.87)$$

Здесь переменная r должна быть выражена через $(u^2 - v^2)$ при помощи Ур. (4.84). Эта задача однозначно решается, поскольку левая часть Ур. (4.84) монотонно растет при $r > 0$.

На Рис. 4.2 в плоскости (u, v) изображены (сплошными линиями и пунктиром) кривые, отвечающие постоянным значениям радиуса r . Поскольку $r \geq 0$, то из (4.84) имеем $v^2 \leq T^2 + u^2$. Поэтому точки пространства-времени находятся во взаимно однозначном соответствии с точками плоскости (u, v) , заключенными между гиперболами

$$v = \pm \sqrt{T^2 + u^2}.$$

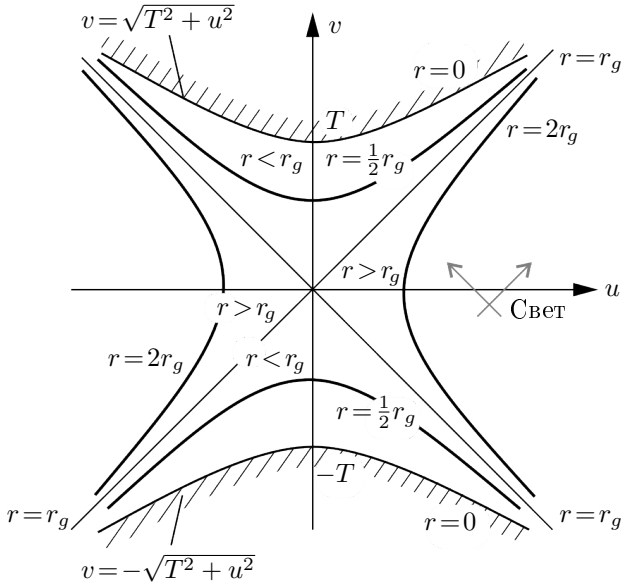


Рис. 4.2. Связь координат двух карт на сфере S^n , построенных при помощи стереографических проекций

На Рис. 4.3 в этой же плоскости прямые, проходящие через центральную точку $(u, v) = (0, 0)$, отвечают постоянным значениям мирового времени x^0 . Из Рис. 4.2, 4.3 видно, что переменные Шварцшильда при $r > r_g$ являются координатами части пространства-времени, заключенной между биссектрисами $v = \pm u$ в плоскости (u, v) . Лишь точка $(u, v) = (0, 0)$ отвечает $r = r_g$ и конечному времени x^0 . Все остальные точки $v = \pm u$ отвечают $r = r_g$ и $x^0 = \pm\infty$. Из рисунков видно также, что часть пространства, описываемая координатами Шварцшильда с $r > r_g$ в плоскости (u, v) содержится дважды: $u \geq 0, |v| \leq u$ и $u \leq 0, |v| \leq -u$. Обозначим эти области в плоскости (u, v) через U_+ и U_- , соответственно. Мы видим также, что в области U_+ росту мирового времени x^0 соответствует рост "времени" v . Так как функции замены координат Шварцшильда на координаты Крускала аналитические, то естественно считать, что *все частицы в пространстве-времени движутся в направлении возрастания координаты v .*

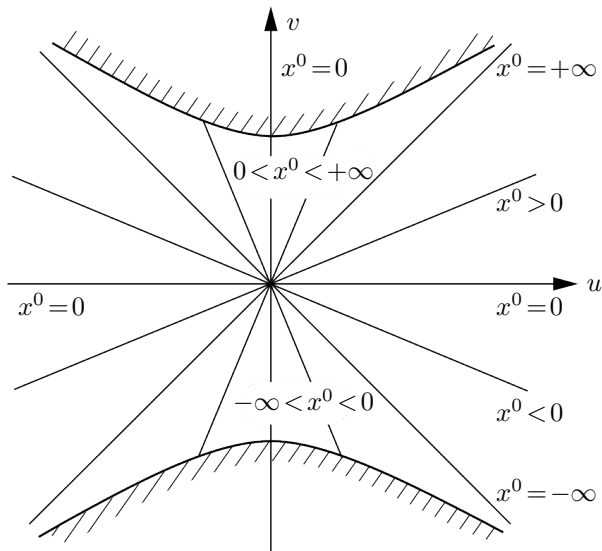


Рис. 4.3. Связь координат двух карт на сфере S^n , построенных при помощи стереографических проекций

Рассмотрим движение частиц в переменных Крускала. Лагранжиан, описывающий движение частицы, имеет вид (см. (3.24))

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2e} \{g_{vv}(\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - r^2 \dot{\phi}^2\} - \frac{1}{2} e (mc)^2, \quad g_{vv} = \frac{4r_g^3}{T^2 r} e^{-r/r_g}. \quad (4.88)$$

Поскольку лагранжиан (4.88) не зависит от ϕ , то момент

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \equiv \mathcal{M} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{e} \quad (4.89)$$

сохраняется. Условия $\partial \mathcal{L} / \partial e = 0$ и (4.89) дают

$$\dot{v}^2 = \dot{u}^2 + \frac{e^2}{g_{vv}} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{r^2} + m^2 c^2 \right). \quad (4.90)$$

Так как лагранжиан (4.88) зависит лишь от r , но не зависит от x^0 , то сохраняется энергия (сравни с (4.113)):

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{x}^0 = \frac{g_{vv}}{2er_g} (u\dot{v} - v\dot{u}) = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (4.91)$$

Здесь при получении второго равенства были использованы формулы (4.86), из которых непосредственно следует, что

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{x}^0} = \frac{v}{2r_g}, \quad \frac{\partial \dot{v}}{\partial \dot{x}^0} = \frac{u}{2r_g}.$$

Комбинируя уравнения (4.90) и (4.91), получаем соотношение между дифференциалами координат u и v :

$$dv^2 - du^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 \frac{g_{vv}}{4r_g^2} \left[1 + \left(\frac{\mathcal{M}}{mcr}\right)^2\right] (u dv - v du)^2,$$

или

$$1 - \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = a^2 \left(u - v \frac{du}{dv}\right)^2, \quad (4.92)$$

где

$$a^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 \frac{g_{vv}}{4r_g^2} \left[1 + \left(\frac{\mathcal{M}}{mcr}\right)^2\right].$$

Из Ур. (4.92) видно, что

$$\left|\frac{du}{dv}\right| \leq 1, \quad (4.93)$$

причём равенство в оценке (4.93) имеет место лишь в случае $a^2 = 0$, то есть в случае безмассовых частиц, либо в случае

$$\frac{du}{dv} = \frac{u}{v} = \pm 1, \quad (4.94)$$

что бывает лишь при $r = r_g$.

При помощи Ур. (4.92) находим:

$$\frac{du}{dv} = \frac{a^2 uv \pm \sqrt{1 - a^2(u^2 - v^2)}}{1 + a^2 v^2} \quad (4.95)$$

Рассмотрим сначала распространение безмассовых частиц вдоль радиуса, что отвечает случаю $m = 0$ или $a^2 = 0$, а также $\mathcal{M} = 0$. Тогда из (4.95) следует, что

$$v = \pm u + \text{Const}. \quad (4.96)$$

Изображая прямые (4.96) на Рис. 5, 6, делаем вывод, что в области пространства-времени $v < -|u|$ движение возможно лишь от центра, когда растет временная координата v . Этот же вывод справедлив и в отношении движения частиц с моментом и с массой, что вытекает из оценки (4.93). Это означает, что координаты Крускала покрывают области пространства-времени, в которых движение происходит лишь от центра при $r < r_g$. Эту область пространства-времени можно назвать *белой дырой*,

Напротив, в области пространства-времени $v > |u|$ при возрастании времени v движение частиц возможно лишь по направлению к центру. Эту область пространства-времени принято называть *черной дырой*.

Рассмотрим Ур. (4.95) для массивной частицы, движущейся по радиусу ($\mathcal{M} = 0$) вблизи точки $u = v > 0$. Пусть $u = v + \varepsilon(v)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Выпишем Ур. (4.95) с нижним знаком, разложив его относительно ε :

$$\frac{du}{dv} = \frac{a_0^2 v^2 - 1}{a_0^2 v^2 + 1} + O(\varepsilon), \quad a_0^2 = \frac{1}{eT^2} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2. \quad (4.97)$$

Отсюда видно, что при конечных v вблизи прямой $u = v > 0$ имеются мировые линии частиц, движущихся по геодезическим, которые пересекают прямую $u = v$ под ненулевым углом. С учетом оценки (4.93) отсюда следует, что такие геодезические заканчиваются на гиперполе $v = \sqrt{T^2 + u^2}$, причем вдоль этих геодезических координаты u и v ограничены. Обозначим начальную точку какой-либо из рассмотренных геодезических через p , а конечную — через q . Координата r точки q равна нулю, а точка p лежит в области U_+ . Сказанное означает, что интеграл

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_p^q ds < \infty \quad (4.98)$$

конечен, поскольку при $r \rightarrow 0$ интеграл (4.98) имеет согласно (4.87) интегрируемую особенность вида

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r}}.$$

Из (4.98) следует, что *частица, движущаяся по радиусу по направлению к черной дыре, пересекает сферу Шварцшильда и достигает нулевого радиуса за конечное собственное время.*

В координатах Крускала любая геодезическая либо продолжается до бесконечности, либо обрывается на истинной сингулярности $r = 0$.

Из приведенного рассмотрения ясно, что указанные выше области пространства-времени U_+ и U_- причинно не связаны.

4.2.3. О возможности возникновения черных дыр в результате эволюции

Коротко обсудим вопрос о возможности возникновения черных дыр в результате неограниченного сжатия звезд под действием гравитационных сил.

Рассмотрим нейтронную звезду. Совокупность нейтронов, из которых состоит звезда, можно считать вырожденным фермионным газом. Пусть N — число нейтронов в звезде, $V \sim R^3$ — ее объем, R — радиус звезды, m — масса нейтрона $M = Nm$ — масса звезды, p_F — импульс Ферми, $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ — энергия Ферми и E_F — энергия вырожденного фермионного газа.

Вначале рассмотрим нерелятивистский случай. В этом случае имеем следующие элементарные оценки, вытекающие из квантовой механики и нерелятивистской теории гравитации:

$$\frac{p_F^3 V}{(2\pi\hbar)^3} \sim N \longrightarrow p_F \sim \hbar \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}, \quad \varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2 M^{2/3}}{m^{5/3} R^2}. \quad (4.99)$$

Оценка (4.99) остаётся справедливой в релятивистском случае, так как она основана лишь на волновой природе частиц.

$$E_F \sim N\varepsilon_F \sim N \frac{p_F^2}{m} \sim \frac{\hbar^2}{m} N^{5/3} V^{-2/3}. \quad (4.100)$$

Давление в феми-газе P_F имеет порядок

$$P_F \sim -\frac{\partial E_F}{\partial V} \sim \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = \frac{\hbar^2}{m^{8/3}} \frac{M^{5/3}}{R^5}. \quad (4.101)$$

Давление (4.101) стремится растолкать нейтроны. С другой стороны, гравитационное давление, которое стремится сжать звезду, имеет порядок

$$P_{\text{Грав}} \sim \left(\frac{GM^2}{R^2}\right) / R^2 \sim \frac{GM^2}{R^4}. \quad (4.102)$$

Здесь $(GM^2)/R^2$ есть порядок силы, с которой звезда сама себя притягивает, а R^2 — порядок величины площади её поверхности. Из условия равновесия нейтронной звезды $P_F = P_{\text{Грав}}$ находится её радиус в положении равновесия R_0 :

$$R_0 = \text{Const} \frac{\hbar^2}{Gm^{8/3}M^{1/3}}. \quad (4.103)$$

Здесь Const — число порядка единицы. Из оценок (4.101) и (4.102) видно, что положение равновесия (4.103) является устойчивым. Действительно, при возрастании радиуса звезды расталкивающее давление P_F убывает быстрее, чем сжимающее давление $P_{\text{Грав}}$. Поэтому звезда вернется в положение равновесия. При уменьшении радиуса будем иметь аналогичную картину.

Из (4.103) видно, что при возрастании массы звезды M радиус R_0 уменьшается. При этом согласно (4.99) энергия Ферми ε_F возрастает:

$$\varepsilon_F \sim \frac{G^2 m^{11/3} M^{4/3}}{\hbar^2}. \quad (4.104)$$

Следовательно, при возрастании массы звезды фермионный газ станет релятивистским. Оценим массу, при которой нейтронный ферми-газ становится релятивистским. Имеем:

$$\varepsilon_F \sim \frac{G^2 m^{11/3} M^{4/3}}{\hbar^2} > mc^2 \longrightarrow M > \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m^2} \sim 10^{33} \text{ г}. \quad (4.105)$$

Таким образом, если нейтронная звезда имеет массу, большую, чем масса Солнца ($\sim 10^{33}$ г), то составляющие ее нейтроны должны рассматриваться как вырожденный релятивистский ферми-газ.

В релятивистском случае

$$\varepsilon_F \sim p_F c, \quad E_F \sim N p_F c \sim \hbar c \left(\frac{M}{m} \right)^{4/3} V^{-1/3}. \quad (4.106)$$

При получении последней оценки была использована оценка (4.99). Теперь расталкивающее давление ферми-газа имеет порядок

$$P_F \sim \hbar c \left(\frac{M}{m} \right)^{4/3} \frac{1}{R^4}. \quad (4.107)$$

В релятивистском случае гравитационная масса имеет порядок не mN , а

$$M_{\text{Грав}} \sim \frac{\varepsilon_F N}{c^2} \sim \frac{\hbar}{cR} \left(\frac{M}{m} \right)^{4/3}. \quad (4.108)$$

Так как метрика всё ещё мало отличается от евклидовой, то для оценки сжимающего гравитационного давления пригодна ньютоновская формула (4.102), в которой используется значение массы (4.108):

$$P_{\text{Грав}} \sim \frac{GM_{\text{Грав}}^2}{R^4} \sim \frac{G\hbar^2}{c^2} \left(\frac{M}{m} \right)^{8/3} \frac{1}{R^6}. \quad (4.109)$$

Сравнение формул (4.107) и (4.109) показывает, что в релятивистском случае наступает гравитационный коллапс, который невозможно удержать никакими другими взаимодействиями.

Из сказанного можно сделать вывод, что если масса звезды в несколько раз больше массы Солнца, то ее эволюция заканчивается гравитационным коллапсом и образованием черной дыры.

4.2.4. Движение в центрально-симметричном поле

Рассмотрим лагранжиан частицы в форме (3.22) в координатах Шварцшильда (4.75). Заметим, что, так как в центрально-симметричном поле сохраняется момент импульса, движение

происходит в одной плоскости, проходящей через центр. Поэтому сразу положим $\theta = \pi/2$. Тогда

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2e} \{ \} - \frac{1}{2} e (mc)^2,$$

где $\{ \} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 \dot{\phi}^2.$ (4.110)

Условие $\delta\mathcal{L}/\delta e = 0$ дает

$$\{ \}^{1/2} = emc. \quad (4.111)$$

Так как лагранжиан не зависит от переменных x^0 и ϕ , то их "импульсы" являются интегралами движения. Имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \equiv \mathcal{M} = \frac{r^2\dot{\phi}}{e}, \quad (4.112)$$

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^0} \equiv \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{x}^0. \quad (4.113)$$

Величины \mathcal{M} и \mathcal{E} имеют смысл момента импульса и энергии частицы, которые сохраняются. Воспользуемся Ур. (4.111) для нахождения величины \dot{r} . Выражая $\dot{\phi}$ и \dot{x}^0 через \mathcal{M} и \mathcal{E} при помощи соотношений (4.112) и (4.113), получаем:

$$\dot{r}^2 = e^2 [\], \quad [\] = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\mathcal{M}^2}{r^2} + m^2 c^2\right). \quad (4.114)$$

Из (4.112) и (4.114) находим интегральное соотношение, определяющее траекторию частицы:

$$\begin{aligned} \phi &= \int dr \frac{\mathcal{M}}{r^2} [\]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}} \int dr \left[\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(\frac{\mathcal{M}^2}{r^2} + m^2 c^2\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Комбинируя (4.113) и (4.114), получаем зависимость радиуса от времени:

$$x^0 = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \times \left\{ \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 - \left[\left(\frac{\mathcal{M}}{mcr}\right)^2 + 1 \right] \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right\}^{-1/2}. \quad (4.116)$$

Движение массивных частиц

Предположим, что частица массивная и ее скорость мала по сравнению со скоростью света, а гравитационное поле мало отклоняется от ньютоновского, что выражается неравенством $r/r_g \ll 1$. Эта ситуация имеет место при движении планет вокруг Солнца, поскольку гравитационный радиус Солнца $r_g = 3$ км.

Чтобы легче извлечь из интеграла в (4.115) полезную информацию, его следует привести к виду, максимально приближающемуся к аналогичному интегралу в ньютоновской механике. Для этого сделаем замену переменной интегрирования согласно $r(r - r_g) = (r')^2$. Теперь член в квадратной скобке в (4.115), пропорциональный \mathcal{M}^2 , принимает вид $\mathcal{M}^2/(r')^2$. При сделанных предположениях приближенно имеем

$$r = r' + \frac{1}{2}r_g + \frac{r_g^2}{8r'}. \quad (4.117)$$

С точностью до $O(r_g^2)$ квадратная скобка в (4.115), выраженная через r' , имеет вид

$$-\alpha + \frac{2}{r'}\beta - \frac{1}{(r')^2} \left[\mathcal{M}^2 - \frac{3}{2}(r_g m c)^2 \right],$$

$$\alpha = m^2 c^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}, \quad \beta = \frac{1}{2}(mcr_g)^2. \quad (4.118)$$

Константы α и β не зависят от \mathcal{M} и в случае финитного движения они обе положительны. В квадратной скобке мы пренебрегли

величиной $(r_g \mathcal{E}'/c)^2$ по сравнению с $(r_g m c)^2$, где \mathcal{E}' — нерелятивистская энергия. Из (4.117) имеем

$$dr = \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{r_g}{r'} \right)^2 \right] dr'. \quad (4.119)$$

Далее штрих над буквой r опускается. Учет второго слагаемого в квадратной скобке в (4.119) дает вклад в (4.115) порядка

$$\delta_1 \phi \sim \frac{r_g^2 m \mathcal{E}'}{\mathcal{M}^2}. \quad (4.120)$$

Ниже будет видно, что этот вклад в нашем приближении относительно ничтожен. Таким образом, согласно (4.115), (4.118) и (4.119)

$$\Delta \phi = -2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \left\{ -\alpha + \frac{2}{r} \beta - \frac{1}{r^2} \left[\mathcal{M}^2 - \frac{3}{2} (r_g m c)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.121)$$

Здесь $\Delta \phi$ — изменение угла за время одного оборота, который считается совершенным при изменении радиуса от минимального значения r_{min} до максимального значения r_{max} и затем опять до r_{min} . Значения r_{min} и r_{max} — это те значения переменной r , для которых фигурная скобка в (4.121) обращается в нуль.

Интеграл в (4.121) вычисляется точно:

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r} \sqrt{(r_{max} - r)(r - r_{min})} = \frac{\pi}{2} (r_{min} + r_{max} - 2\sqrt{r_{min} r_{max}}).$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= -2\pi \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\mathcal{M}^2 - \frac{3}{2} (r_g m c)^2} \right\} = \\ &= 2\pi \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_g m c}{\mathcal{M}} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что смещение перигелия орбиты

$$\delta \phi = \frac{6\pi}{4} \left(\frac{r_g m c}{\mathcal{M}} \right)^2 = 6\pi \left(\frac{GMm}{c\mathcal{M}} \right)^2. \quad (4.122)$$

Сравнивая (4.120) и (4.122), находим оценку $\delta_1\phi/\delta\phi \sim \mathcal{E}'/mc^2 \ll 1$. Поэтому формула (4.122) справедлива.

Численные значения смещения, определяемого формулой (4.122), для Меркурия и Земли равны соответственно $43,0''$ и $3,8''$ в сто лет.

Движение безмассовых частиц

В случае распространения светового луча в формуле (4.115) следует положить $m = 0$. Прибегая к тем же манипуляциям, которые привели к (4.121), получаем

$$\phi = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \int dr \left[\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + \frac{2\mathcal{E}^2 r_g}{rc^2} - \frac{1}{r^2} \mathcal{M}^2 \right]^{1/2}. \quad (4.123)$$

В отличие от случая массивной частицы, при распространении светового луча релятивистская поправка к его траектории является эффектом первого порядка относительно r_g . Разложим правую часть (4.123) по r_g/r :

$$\phi = -\frac{\mathcal{E}}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \left\{ \int dr \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} + r_g \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \right\}, \quad \rho = \frac{\mathcal{M}c}{\mathcal{E}}. \quad (4.124)$$

Интегралы в (4.124) берутся при помощи подстановки $r = \rho \cosh \chi$. При изменении переменной χ от $-\infty$ до $+\infty$ происходит пролет луча света мимо центра. Первый интеграл в (4.124) удобно сначала продифференцировать по \mathcal{M} . Путем дальнейшего интегрирования по χ в бесконечных пределах получаем $\Delta\phi^{(0)} = \pi$. Это соответствует невозмущенному движению частицы. Второй интеграл дает

$$\Delta\phi^{(1)} = -\frac{2r_g \mathcal{E}}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \operatorname{arc} \cosh \frac{R\mathcal{E}}{\mathcal{M}c}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Вычисляя производную и затем переходя к пределу, находим

$$\Delta\phi^{(1)} = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{c^2 \rho} \equiv \delta\phi. \quad (4.125)$$

Остается заметить, что параметр ρ в (4.125) является прицельным расстоянием, а выражение (4.125) и есть искомое угловое отклонение от прямой линии луча света, пролетающего на прицельном расстоянии ρ от гравитирующего центра.

Для луча, проходящего мимо края Солнца, $\delta\phi = 1,75''$.

4.3. Применение общей теории относительности к космологии

Применение ОТО к космологии приводит к качественно новым результатам. Это обусловлено тем, что в геометродинамике пространство-время, вообще говоря, не является галилеевым.

4.3.1. Геометрия однородных и изотропных пространств

Будем рассматривать достаточно большие участки пространства, в которых заключены большие количества галактик. При таком подходе можно предположить, что средняя плотность вещества постоянна. Предполагается, что усреднение происходит по указанным большим участкам пространства. Далее, предположим, что все свойства пространства изотропны и однородны. Заметим, что мы говорим об изотропии и однородности именно пространства, а не пространства-времени. Это предположение означает, во первых, что мы пользуемся сопутствующей системой координат, в которой скорость материи равна нулю и, во-вторых, плотность материи постоянна в пространстве. На математическом языке предположение означает, что все геометрические уравнения, записанные в ОНБ, полностью сохраняют свой вид при любом изменении ориентации ОНБ в пространстве и при переходе в другие точки. Пространства с такими свойствами называются однородными. Сделанная гипотеза об однородности и изотропности пространства Вселенной и распределения в ней материи не противоречит современному эксперименту. Однородная и изотропная модель Вселенной в рамках ОТО впервые рассматривалась А.А.Фридманом в 1922 г.

Из сказанного вытекает, что изучение решения Фридмана следует начать с изучения однородных римановых пространств с

локально-евклидовой метрикой. Последняя задача легче всего формулируется в ОНБ.

Выпишем в ОНБ структурные уравнения Картана (2.78)-(2.79) для случая n -мерного риманова однородного и изотропного пространства:

$$\delta\omega^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta = 0, \quad \delta\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = K\omega^\alpha \wedge \omega_\beta. \quad (4.126)$$

Здесь $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ и поэтому нет разницы между верхними и нижними индексами: $\omega^\alpha = \omega_\alpha$, $\omega_\beta^\alpha = \omega_{\alpha\beta}$. Символ δ означает внешнее дифференцирование, K — некая константа. Из вида правых частей Ур. (4.126) вытекает инвариантность Ур. (4.126) относительно любых ортогональных преобразований базиса, что означает изотропию пространства. Независимость параметра K от координат означает однородность пространства. Очевидно, в нашем случае тензор кривизны равен

$$R_{\alpha\beta\ \gamma\sigma} = K(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}). \quad (4.127)$$

Прямая проверка показывает, что тензор (4.127) удовлетворяет тождествам Бианки (2.82). Поэтому Ур. (4.126) корректны.

Для фактического построения форм смещения и связности, удовлетворяющих Ур. (4.126), воспользуемся методом, развитым в Разделе 8. Согласно этому методу, следует решить дифференциальные уравнения (см. (2.122))

$$\frac{\partial\bar{\omega}^\alpha}{\partial t} = \delta x^\alpha + \bar{\omega}_\beta^\alpha x^\beta, \quad (4.128)$$

$$\frac{\partial\bar{\omega}_\beta^\alpha}{\partial t} = K(x^\alpha\bar{\omega}_\beta - x_\beta\bar{\omega}^\alpha) \quad (4.129)$$

для $0 \leq t \leq 1$ с начальными данными

$$\bar{\omega}^\alpha|_{t=0} = 0, \quad \bar{\omega}_\beta^\alpha|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{\omega}_\beta^\alpha|_{t=0} = 0. \quad (4.130)$$

Решения Ур. (4.128)-(4.129) с начальными данными (4.130) в точке $t = 1$ удовлетворяют Ур. (4.126).

Приступим к решению системы уравнений (4.128)-(4.130).

Продифференцируем Ур. (4.129) по параметру t и воспользуемся Ур. (4.128):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\omega}_{\alpha\beta} = K(x_\alpha \bar{\omega}_{\beta\gamma} - x_\beta \bar{\omega}_{\alpha\gamma}) x_\gamma + K(x_\alpha \delta x_\beta - x_\beta \delta x_\alpha). \quad (4.131)$$

Последнее уравнение умножим на x_β и просуммируем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta) &= -Kx^2 (\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta) - Kx^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta, \\ x^2 &= x_\alpha x_\alpha. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Уравнения (4.132) легко решаются относительно неизвестных $(\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta)$ с начальными данными (4.130). Однако с этого момента следует делать различие между случаями $K > 0$ и $K < 0$.

Рассмотрим сначала случай $K = a^{-2} > 0$. Имеем:

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta} x_\beta = \left[\cos \left(\frac{xt}{a} \right) - 1 \right] \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta. \quad (4.133)$$

Здесь $x = \sqrt{x^2}$. Теперь подставим (4.133) в правую часть Ур. (4.131) и решим его:

$$\bar{\omega}_{\alpha\beta} = \left[1 - \cos \left(\frac{xt}{a} \right) \right] \frac{1}{x^2} (x_\alpha \delta x_\beta - x_\beta \delta x_\alpha). \quad (4.134)$$

Подставляя (4.134) в правую часть (4.128), находим формы смещения:

$$\bar{\omega}_\alpha = \frac{a}{x} \sin \left(\frac{xt}{a} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta + t \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \delta x_\beta.$$

Полагая $t = 1$, окончательно находим:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \frac{a}{x} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\beta + \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \delta x_\beta, \\ \omega_{\alpha\beta} &= \left[1 - \cos \left(\frac{x}{a} \right) \right] \frac{1}{x^2} (x_\alpha \delta x_\beta - x_\beta \delta x_\alpha). \end{aligned} \quad (4.135)$$

Можно проверить путем прямого вычисления тот очевидный факт, что 1-формы (4.135) удовлетворяют уравнениям (4.126).

Переменная x заключена в пределах $0 \leq x \leq \pi a$, т.к. формулы (4.135) описывают геометрию сферы S^n , и при $x = 0, \pi a$ мы попадаем на "северный" или "южный" полюс. Действительно, рассмотрим метрику нашего пространства

$$\delta s^2 = (\omega_\alpha)^2 = \frac{a^2}{x^2} \left(\sin \frac{x}{a} \right)^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \right) \delta x_\alpha \delta x_\beta + \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2} \delta x_\alpha \delta x_\beta. \quad (4.136)$$

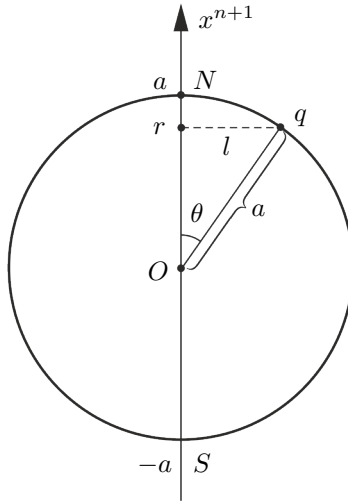


Рис. 4.4. Двумерное сечение сферы S^n в Евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1}

Метрика (4.136) является естественной метрикой (в нормальных координатах Римана) сферы S^n , индуцированной евклидовой метрикой пространства \mathbb{R}^{n+1} , в которое вложена сфера. В этом можно убедиться следующим образом (см. Рис. 4.4). Пусть центр сферы радиуса a расположен в центре координат \mathbb{R}^{n+1} и северный N (южный S) полюс находится на оси x^{n+1} в точке с координатой a ($-a$). Из северного полюса выходит семейство геодезических, каждая из которых является меридианом, соединяющим северный полюс с южным. Каждая геодезическая определяется однозначно единичным вектором n_α , $\alpha = 1, \dots, n$, принадлежащим касательной к S^n в северном полюсе n -мерной гиперплоскости. На Рис. 4.4 изображено сечение сферы S^n дву-

мерной плоскостью, содержащей ось x^{n+1} и пару таких геодезических или меридианов. Пусть длина отрезка геодезической Nq равна x . Из Рис. 4.4 видно, что

$$\theta = \frac{x}{a}, \quad l = \sin \theta.$$

Нормальные координаты Римана в точке q определяются (см. (2.108)) согласно

$$x_\alpha = n_\alpha x.$$

Очевидно, что сдвиг вдоль геодезической даёт приращение интервала $ds^2 = (\delta x)^2 = (n_\alpha \delta x_\alpha)^2$, что совпадает с последним слагаемым в (4.136). Из Рис 4.4 видно, что для вычисления вклада в приращение интервала от сдвигов по направлениям, перпендикулярным к n_α , то есть для $\delta x_\alpha = (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) \delta x_\beta$, все длины в нормальных координатах Римана следует снабдить фактором $(l/x) = (a/x) \sin(x/a)$. Такое вычисление приводит к первому слагаемому в (4.136).

Согласно (2.50) элемент объема равен

$$\delta V = \left(\frac{a}{x} \sin \frac{x}{a} \right)^{n-1} \delta^n x,$$

и весь объем конечен.

Теперь рассмотрим нужный нам случай $n = 3$. При помощи подстановки

$$x_\alpha = a\chi(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad 0 \leq \chi, \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (4.137)$$

метрика (4.136) приводится к виду

$$\delta s^2 = a^2[\delta\chi^2 + \sin^2 \chi(\delta\theta^2 + \sin^2 \theta \delta\phi^2)] = (\tilde{\omega}_\alpha)^2. \quad (4.138)$$

Здесь

$$\tilde{\omega}^1 = a\delta\chi, \quad \tilde{\omega}^2 = a \sin \chi \delta\theta, \quad \tilde{\omega}^3 = a \sin \chi \sin \theta \delta\phi. \quad (4.139)$$

Метрика (4.138) является метрикой сферы S^3 , записанной в угловых переменных. Поскольку формы $\tilde{\omega}_\alpha$ и ω_α связаны (локальным) ортогональным преобразованием и уравнения (4.126)

инвариантны относительно локальных ортогональных преобразований, то формы $\tilde{\omega}_\alpha$ и $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (4.126).

Элемент объема в новых переменных равен

$$\delta V = a^3 \sin^2 \chi \sin \theta \delta \chi \delta \theta \delta \phi, \quad (4.140)$$

а весь объем

$$V = \int \delta V = 2\pi^2 a^3. \quad (4.141)$$

В случае однородных пространств отрицательной кривизны, когда $K = -a^{-2} < 0$, проводимые действия и получаемые формулы в точности аналогичны действиям и формулам в случае $K > 0$ за тем лишь исключением, что в формулах (4.133)-(4.138) делается замена

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow ia, & \chi &\longrightarrow i\chi \longrightarrow \\ &\longrightarrow \cos(xt/a) & \longrightarrow \operatorname{ch}(xt/a), & \sin(xt/a), \longrightarrow -i \operatorname{sh}(xt/a), \end{aligned}$$

и теперь $0 \leq x \leq +\infty$. Для пространства отрицательной кривизны элемент объема равен

$$\delta V = \left(\frac{a}{x} \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right)^{n-1} d^n x,$$

и весь объем бесконечен. В случае $n = 3$ по-прежнему мы делаем замену переменных согласно (4.137). В новых переменных метрика пространства имеет вид

$$\begin{aligned} \delta s^2 &= a^2 [\delta \chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (\delta \theta^2 + \sin^2 \theta \delta \phi^2)] = (\tilde{\omega}^\alpha)^2, \\ 0 &\leq \chi < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Здесь

$$\tilde{\omega}^1 = a \delta \chi, \quad \tilde{\omega}^2 = a \operatorname{sh} \chi \delta \theta, \quad \tilde{\omega}^3 = a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \delta \phi. \quad (4.143)$$

Формы $\tilde{\omega}_\alpha$ и $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (4.126) с $K = -a^{-2}$. Элемент объема равен

$$\delta V = a^3 \operatorname{sh}^2 \chi \sin \theta \delta \chi \delta \theta \delta \phi,$$

и весь объем бесконечен.

Заметим, что при подстановке в (4.138) $r = \sin \chi$ и при подстановке в (4.142) $r = \operatorname{sh} \chi$ эти метрики объединяются в одной формуле

$$\delta s^2 = a^2 \left[\frac{\delta r^2}{1 - kr^2} + r^2(\delta\theta^2 + \sin^2 \theta \delta\phi^2) \right]. \quad (4.144)$$

В (4.144) $k = 1$ для метрики (4.138) и $k = -1$ для метрики (4.142). В случае, когда $k = 0$, мы имеем плоскую метрику с масштабным фактором a .

4.3.2. Включение времени и решение Фридмана

Теперь опять займемся изучением однородного пространства положительной кривизны и включим в рассмотрение временную координату, которую обозначим буквой η . Всегда временную координату можно выбрать так чтобы полная метрика в пространстве-времени имела вид

$$d s^2 = a^2(\eta) \{ d \eta^2 - [\delta \chi^2 + \sin^2 \chi (\delta \theta^2 + \sin^2 \theta \delta \phi^2)] \}. \quad (4.145)$$

Таким образом, пространство является пространством сферы S^3 , радиус которой $a(\eta)$ зависит от времени.

Перепишем эту метрику в виде:

$$d s^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b,$$

где $\eta_{ab} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ и

$$\omega^0 = a(\eta) d \eta, \quad \omega^\alpha = \tilde{\omega}^\alpha. \quad (4.146)$$

Теперь оператор внешнего дифференцирования $d = d \eta \cdot \partial / \partial \eta + \delta$, где δ есть оператор внешнего дифференцирования относительно переменных (χ, θ, ϕ) . Из (4.146) и (4.139) получаем

$$d \omega^0 = 0, \quad d \omega^\alpha = \frac{\dot{a}}{a^2} \omega^0 \wedge \tilde{\omega}^\alpha + \delta \tilde{\omega}^\alpha. \quad (4.147)$$

Везде $\dot{a} = d a / d \eta$.

Прежде всего найдем форму связности ω_b^a при помощи первых уравнений структуры (2.78) с нулевым кручением. Прямой

проверкой нетрудно убедиться, что формы

$$\omega_0^\alpha = \omega_\alpha^0 = \frac{\dot{a}}{a^2} \tilde{\omega}^\alpha, \quad \omega_\beta^\alpha = \tilde{\omega}_\beta^\alpha \quad (4.148)$$

удовлетворяют этим уравнениям. Действительно, из (4.147) следует, что $\omega_\alpha^0 \wedge \omega^\alpha = 0$. Для формы ω_α^0 из (4.148) последнее уравнение выполняется. Далее, вследствие (4.147) и (4.148)

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \omega_0^\alpha \wedge \omega^0 &= \\ &= \frac{\dot{a}}{a^2} \omega^0 \wedge \tilde{\omega}^\alpha + (\delta \tilde{\omega}^\alpha + \tilde{\omega}_\beta^\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta) + \frac{\dot{a}}{a^2} \tilde{\omega}^\alpha \wedge \omega^0 = 0. \end{aligned}$$

При получении последнего равенства использовано первое уравнение структуры (4.126). Поскольку форма связности находится однозначно из первого уравнения структуры, то формулы (4.148) решают поставленную задачу.

Следующая задача — нахождение тензора Римана.

Заметим, что вся зависимость форм смещения и связности от времени обусловлена их зависимостью от радиуса a и его производных. Но формы $\omega_{\alpha\beta}$ вовсе не зависят от a и его производных. Это видно из первого уравнения структуры (4.126), поскольку формы ω_α зависят от радиуса линейно и однородно, и поэтому первые из уравнений (4.126) можно сократить на a . Следовательно, формы $\omega_{\alpha\beta}$ не зависят от времени и $d\omega_{\alpha\beta} = \delta\omega_{\alpha\beta}$. Поэтому второе из Ур. (4.126) дает

$$d\omega_\beta^\alpha = -\omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma - \frac{1}{a^2} \omega^\alpha \wedge \omega_\beta. \quad (4.149)$$

Знак перед последним слагаемым в (4.149) диктуется тем, что теперь поднятие или опускание индексов α, β, \dots приводит к изменению знака. Из (4.149) и (4.148) получаем

$$d\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma + \omega_0^\alpha \wedge \omega_\beta^0 = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 1 \right) \omega^\alpha \wedge \omega_\beta,$$

откуда

$$R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 1 \right) (\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta - \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta), \quad R_{\alpha\beta\gamma 0} = 0. \quad (4.150)$$

При помощи Ур. (4.147) и (4.148) и первого из Ур. (4.126) находим

$$d\omega_0^\alpha = \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \omega^0 \wedge \omega^\alpha - \frac{\dot{a}}{a^2} \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

Последнее слагаемое при помощи (4.148) переписываем в виде $-\omega_\beta^\alpha \wedge \omega_0^\beta$. Поэтому

$$d\omega_0^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega_0^\beta = \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \omega^0 \wedge \omega^\alpha,$$

и

$$R_{0\beta 0}^\alpha = - \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \delta_\beta^\alpha. \quad (4.151)$$

Из (4.150) и (4.151) находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_\beta^\alpha = - \left(\frac{2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{\ddot{a}}{a^3} \right) \delta_\beta^\alpha, \quad R_0^0 = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^4} - \frac{\ddot{a}}{a^3} \right). \quad (4.152)$$

Отсюда

$$R = R_0^0 + R_\alpha^\alpha = -6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a^3} \right). \quad (4.153)$$

Используя (4.152) и (4.153), мы можем выписать «нуль-нуль»-компоненту уравнения Эйнштейна (3.75):

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon. \quad (4.154)$$

Здесь учтено, что $T^{00} = \varepsilon$, поскольку $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$ (см. (3.54)).

В уравнении (4.154) содержатся две неизвестные величины $a(\eta)$ и $\varepsilon(\eta)$. Для получения второго уравнения воспользуемся уравнением $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, которое содержится в уравнениях Эйнштейна. В Разделе 10.4 было показано, что последнее уравнение содержит в себе условие изэнтропичности движения, т.е. Ур. (3.58) и (3.59). Условие изэнтропичности можно записать также

в виде $dE = -p dV$, где E , V — энергия и объем Вселенной, а p — давление. Так как $\varepsilon = E/V$, то

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p) \frac{dV}{V} = -3(\varepsilon + p) \frac{da}{a}.$$

Последнее равенство является следствием (4.141). Окончательно

$$\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = -3 \ln a + \text{Const}. \quad (4.155)$$

Если вещество распределено в виде отдельных тел, движущихся с относительно малыми скоростями, то можно положить $\varepsilon = \mu c^2$, где μ — сумма масс тел, отнесенная к единице объема. В этом случае давлением можно пренебречь по сравнению с ε . Плотность и давление имеющегося в пространстве излучения также пренебрежимо малы. Таким образом, современное состояние Вселенной описывается уравнением состояния

$$\varepsilon = \mu c^2, \quad p = 0. \quad (4.156)$$

В этом случае Ур. (4.155) дает

$$\varepsilon a^3 = \frac{M c^2}{2\pi^2}. \quad (4.157)$$

Здесь M — арифметическая сумма всех масс во Вселенной без учета энергии их гравитационного взаимодействия.

Уравнение (4.154) переписывается при помощи уравнения (4.157) следующим образом:

$$\dot{a}^2 + a^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon a^4 = 2a_0 a, \quad a_0 = \frac{2GM}{3\pi c^2}. \quad (4.158)$$

Последнее уравнение легко интегрируется:

$$a = a_0(1 - \cos \eta). \quad (4.159)$$

Из соотношения $c dt = a(\eta) d\eta$ и (4.159) получаем для мирового времени:

$$t = \frac{a_0}{c} (\eta - \sin \eta). \quad (4.160)$$

Из полученных формул видно, что a возрастает от нуля при $\eta = 0$ или $t = 0$ до максимального значения $2a_0$ при $\eta = \pi$ или $t = \pi a_0/c$ и затем снова убывает до нуля при $\eta = 2\pi$ или $t = 2\pi a_0/c$. Из (4.157) видно также, что при $a \rightarrow 0$ плотность $\mu \rightarrow \infty$:

$$\varepsilon = \frac{3c^4 a_0}{4\pi G a^3}.$$

Следовательно, при $a \rightarrow 0$ уравнение состояния (4.156) не может быть правильным, т.к. при увеличении плотности возрастает и давление. Поэтому примем при $a \rightarrow 0$ уравнение состояния в виде (3.64), каким оно является в ультрарелятивистском пределе. Подставляя $p = \varepsilon/3$ в (4.155), получаем

$$\varepsilon a^4 = \text{Const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi G}, \quad (4.161)$$

где a_1 — новая постоянная. Теперь левое уравнение (4.158) и $c \, dt = a \, d\eta$ дают

$$a = a_1 \sin \eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(1 - \cos \eta). \quad (4.162)$$

Это решение имеет смысл рассматривать лишь при очень больших значениях ε , т.е. при малых η . Полагая в (4.162) $\eta \ll 1$, получаем

$$a \approx \sqrt{2a_1 c t}. \quad (4.163)$$

Из (4.163) и (4.161) немедленно вытекает, что

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2}. \quad (4.164)$$

Обратим внимание, что зависимость (4.164) не содержит никаких параметров.

Таким образом, значение $t = 0$ является особой точкой пространственно-временной метрики изотропной модели. Вторая точка, в которой $a = 0$, также является особой. Попытка аналитического продолжения t на отрицательные значения в найденном решении приводит к парадоксу, поскольку a^2 становится отрицательным. Действительно, в (4.145) подразумевается, что вместо $a^2 \, d\eta^2$ стоит $c^2 \, dt^2$. Поэтому отрицательность a^2

означает, что метрика (4.145) становится локально-евклидовой, что физически бессмысленно.

Рассмотренная модель положительной кривизны называется замкнутой изотропной моделью.

Теперь рассмотрим изотропное пространство отрицательной кривизны.

В этом случае вместо (4.145) для пространственно-временной метрики имеем (см. (4.142))

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - [\delta\chi^2 + \text{sh}^2\chi \cdot (\delta\theta^2 + \sin^2\theta\delta\phi^2)]\}. \quad (4.165)$$

Это выражение формально получается из (4.145) заменой η , χ , a на $i\eta$, $i\chi$, ia , соответственно. Поэтому и уравнения движения можно получить путем этой же замены. Вместо Ур. (4.158) будем теперь иметь

$$\dot{a}^2 - a^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\varepsilon a^4. \quad (4.166)$$

Очевидно, уравнение изэнтропичности сохраняет свой вид (4.155). Для пылевидной материи ($p = 0$) получаем из (4.155):

$$\varepsilon a^3 = \frac{3c^4}{4\pi G}a_0,$$

где a_0 — константа интегрирования. Следовательно, Ур. (4.166) принимает вид

$$\dot{a}^2 - a^2 = 2a_0a. \quad (4.167)$$

Имеем решение последнего уравнения:

$$a = a_0(\text{ch}\eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c}(\text{sh}\eta - \eta). \quad (4.168)$$

Мы видим, что в отличие от замкнутой модели, здесь радиус кривизны монотонно растет от нуля при $\eta = 0$ или $t = 0$ до бесконечности при $\eta \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow \infty$. Плотность материи монотонно убывает от бесконечности до нуля при возрастании времени.

Для больших плотностей ($t \rightarrow 0$) решение (4.168) неприменимо, поскольку правильное уравнение состояния, как и в замкнутой модели, есть $p = \varepsilon/3$. Поэтому при $t \rightarrow 0$ следует пользоваться соотношением (4.161), которое вместе с Ур. (4.167) дает

$$a = a_1 \operatorname{sh} \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (\operatorname{ch} \eta - 1). \quad (4.169)$$

Отсюда при $\eta \ll 1$

$$a = \sqrt{2a_1 ct}, \quad \mu = \frac{3}{32\pi G t^2},$$

что совпадает с (4.163) и (4.164). Таким образом, и в изотропной модели с отрицательной кривизной метрика имеет особую точку при $t = 0$. Вторая особая точка здесь отсутствует.

Изотропная модель с отрицательной кривизной называется открытой изотропной моделью.

Заметим, что изменение радиуса кривизны во времени есть факт объективный, с выбором координатной системы не связанный. Действительно, кроме гравитационного взаимодействия существуют и другие. В частности, электромагнитное взаимодействие в рамках квантовой механики приводит к появлению боровского радиуса. В рассмотренных процессах боровский радиус остается неизменным (если Вселенная не очень близка к рассмотренным особым точкам).

Начало процесса расширения Вселенной при $t \geq 0$ часто называется *Большим взрывом*.

4.3.3. Космологические следствия

Рассмотрим движение свободной частицы (массивной или безмассовой) в метрике (4.145). Лагранжиан такой частицы имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{a^2(\eta)}{2e(\tau)} \left\{ \dot{\eta}^2 - \dot{\chi}^2 - \sin^2 \chi \cdot \dot{\theta}^2 - \sin^2 \chi \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right\} - \frac{1}{2} e(\tau) (mc)^2. \quad (4.170)$$

Поскольку этот лагранжиан не зависит от ϕ , то имеется соответствующий интеграл движения, который удобно положить рав-

ным нулю:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^2}{e} \sin^2 \chi \sin^2 \theta \dot{\phi} = \mathcal{M} = 0. \quad (4.171)$$

Выпишем остальные уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \longrightarrow \frac{d}{d\tau} \left[\frac{a^2}{e} \sin^2 \chi \cdot \dot{\theta} \right] = \frac{a^2}{e} \sin^2 \chi \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2. \quad (4.172)$$

Уравнения (4.171) и (4.172) дают решение

$$\dot{\phi} = 0, \quad \dot{\theta} = 0. \quad (4.173)$$

Заметим, что решение (4.173) всегда реализуемо для любой свободной частицы, движущейся в однородной и изотропной метрике (4.145) или (4.165). Действительно, за счёт однородности пространства всегда можно выбрать пространственные координаты таким образом, чтобы северный полюс находился на траектории частицы, то есть траектория частицы являлась бы меридианом.

Так как с учётом (4.173) и $\partial \mathcal{L} / \partial \chi = 0$, то

$$p_\chi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} = \frac{a^2 \dot{\chi}}{e} = \varkappa = \text{Const}. \quad (4.174)$$

Имеем также последнее уравнение (связи):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} = 0 \longrightarrow a^2 (\dot{\eta}^2 - \dot{\chi}^2) = (emc)^2 \quad (4.175)$$

Исключая из уравнений (4.174) и (4.175) параметр e , находим скорость частицы:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{a d\chi}{a d\eta} = \frac{\dot{\chi}}{\dot{\eta}} = \pm \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + (mca)^2}}. \quad (4.176)$$

Отсюда видно, что $|\beta| \leq 1$, причём $|\beta| = 1$ только если $m = 0$. Если же $m \neq 0$, то с увеличением масштаба Вселенной a скорость частицы уменьшается. Вычислим релятивистскую энергию частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{(mc^2)^2 + \left(\frac{c\varkappa}{a}\right)^2}. \quad (4.177)$$

В формуле (4.177) содержится предел для безмассовых частиц, т.е. закон изменения энергий или частот фотонов, гравитонов и других безмассовых частиц:

$$\omega a = \text{Const} . \quad (4.178)$$

Формулы (4.176)-(4.178) можно получить также следующим образом. Пусть x обозначает пространственную координату, измеряемую обычным масштабом, p_χ и p_x обозначают канонически сопряжённые импульсы по отношению к пространственным переменным χ и x , соответственно. Из равенства $\dot{x} = a\dot{\chi}$ находим $p_x = p_\chi/a$. Теперь при помощи Ур. (4.174) получаем:

$$p_x = \frac{p_\chi}{a} = \frac{\varkappa}{a} . \quad (4.179)$$

Здесь p_x является обычным импульсом, вычисленным в координатах Минковского. Поэтому, подставляя правую часть Ур. (4.179) в стандартные формулы

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + (mc)^2}}, \quad E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$$

мы ещё раз получаем равенства (4.176)-(4.178).

Выше было установлено, что без ограничения общности можно считать, что световой луч распространяется вдоль меридиана. Это значит, что выполнены условия (4.173) и $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2) = 0$, то есть уравнения траекторий описанных световых лучей ($\theta = \text{Const}$, $\phi = \text{Const}$) имеют вид

$$\chi = \pm\eta + \text{Const} . \quad (4.180)$$

Предположим, что в момент времени $t(\eta)$ наблюдается свет в точке $\chi = 0$, излученный источником, находящимся на расстоянии, соответствующем координате χ . Согласно (4.180) момент испускания этого света есть $t(\eta - \chi)$. Если ω_0 есть частота света в момент испускания, то согласно (4.178) наблюдаемая частота равна

$$\omega = \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}\omega_0 . \quad (4.181)$$

Если радиус кривизны a монотонно возрастает, то частота наблюдаемого света монотонно падает по сравнению с частотой испускания по мере удаления источника испускания от точки наблюдения. Это значит, что при наблюдении спектра проходящего света все его линии оказываются смещенными в красную сторону по сравнению со спектрами тех же веществ в нормальных условиях. Это явление называется *красным смещением*.

Пусть $\chi \ll 1$. Это означает, что расстояние между точками испускания и поглощения не очень велико. Тогда вместо (4.181) приближенно имеем:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}. \quad (4.182)$$

Расстояние l между точками p и q вдоль луча света будет равно

$$l = \int_0^\chi a(\eta - \chi') d\chi' \approx \chi a(\eta). \quad (4.183)$$

В результате для относительной величины изменения частоты находим следующую формулу:

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{H}{c} l, \quad (4.184)$$

где

$$H = \frac{c\dot{a}}{a^2} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (4.185)$$

— так называемая *постоянная Хаббла*. Напомним, что $ct = x^0$ — мировое время.

При помощи формул (4.183) и (4.185) получим относительную скорость разбегания галактик:

$$v = \left. \frac{dl}{dt} \right|_{\chi=\text{const}} = \chi \frac{da}{dt} = Hl. \quad (4.186)$$

Таким образом, изменение частоты согласно формуле (4.184) (красное смещение) может рассматриваться как эффект Доплера, согласно которому $z = v/c$.

Постоянная Хаббла не зависит от l и она экспериментально измерима:

$$H \approx 10^{-18} \text{ (сек)}^{-1}. \quad (4.187)$$

Выразим при помощи (4.185) \dot{a} через H и подставим в (4.158) и (4.166), соответственно. В результате получим:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\mu - H^2 \quad (4.188)$$

для замкнутой модели и

$$\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi G}{3}\mu \quad (4.189)$$

для открытой модели. Таким образом, *кривизна пространства положительна или отрицательна в зависимости от того положительна или отрицательна разность $8\pi G\mu/3 - H^2$* . Эта разность обращается в нуль при

$$\mu = \mu_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3, \quad (4.190)$$

где $\mu_{\text{кр}}$ обозначает *критическую плотность вещества*.

Замечание. Введем стандартное обозначение

$$\Omega = \frac{\mu}{\mu_{\text{кр}}}.$$

Тогда из Ур. (4.185), (4.188)-(4.190) имеем:

$$|\Omega - 1| = \left(\frac{c}{aH}\right)^2 = c^2 \left(\frac{da}{dt}\right)^{-2}.$$

При высоких плотностях можно воспользоваться формулой (4.163), при помощи которой находим

$$|\Omega - 1| \sim \frac{ct}{a_1}. \quad (4.191)$$

Для оценки масштаба a_1 предположим, что оценка (4.163) качественно верна в современную эпоху эволюции, когда Вселенная продолжает расширяться. Согласно эксперименту $t_0 \sim 15 \cdot 10^9$ лет

— возраст Вселенной, и наблюдаемая область Вселенной имеет масштаб $L_0 \sim ct_0 \sim 10^{28}$ см. Тогда при помощи оценки (4.163) $a \sim \sqrt{a_1 ct}$, в которой делаются подстановки $a \rightarrow L_0$, $ct_0 \rightarrow L_0$, мы получаем оценку $a_1 \sim L_0$. С другой стороны, в момент рождения Вселенной $t \sim t_P$, $ct_P \sim l_P \sim \sqrt{(G\hbar/c^3)} \sim 10^{-33}$ см, и потому

$$|\Omega - 1| \sim \frac{l_P}{L_0} \sim 10^{-60}. \quad (4.192)$$

Эта оценка имеет место в модели Фрийдмана со степенным расширением (4.163) в самой начальной стадии расширения.

4.3.4. Оценки средней плотности материи во Вселенной

Для получения оценки (4.190) мы воспользовались (4.187). В настоящее время оценка средней плотности материи в пространстве может быть произведена лишь приближенно.

Оценка, основанная на подсчете числа светящихся объектов (звёзд, галактик, метagalактик), дает значение для $\mu_{\text{свет}}/\mu_{\text{кр}} \sim 0,02$. Поскольку подавляющая часть массы звездной материи заключена в барионах (нейтроны, протоны и т.д.), то $\mu_{\text{свет}}$ является вкладом в плотность барионной материи. Это свидетельствовало бы в пользу открытой Вселенной. Однако, в этой оценке не учитывается возможное существование межгалактического темного газа и других видов несветящейся и темной материи, учет которых мог бы существенно повысить среднюю плотность материи.

Согласно теории бариосинтеза и другим теориям, основанным на физике элементарных частиц, всего во Вселенной имеется барионной материи оценочно $\mu_{\text{бар}}/\mu_{\text{кр}} \sim 0,045$. Здесь $\mu_{\text{бар}}$ обозначает полную плотность барионной материи. Таким образом, большая часть барионной материи является несветящейся.

Барионная материя не исчерпывает всю несветящуюся скупивающуюся материю.

Рассмотрим скопление галактик (метagalактику) в системе покоя скопления. Согласно вириальной теореме для финитного

движения галактик в скоплении

$$\bar{E}_k = -\frac{1}{2}\bar{U}. \quad (4.193)$$

Здесь E_k — полная кинетическая энергия скопления, состоящая из сумм кинетических энергий отдельных галактик, U — полная потенциальная энергия скопления. Черта сверху означает усреднение по времени. По порядку величины

$$\bar{U} \sim -\frac{GM^2}{R}, \quad \bar{E}_k \sim \frac{M\bar{v}^2}{2}, \quad (4.194)$$

где M — полная масса скопления, R — его радиус и \bar{v}^2 — среднее значение квадрата скорости галактик в системе покоя скопления. Из сопоставления формул (4.193) и (4.194) получаем оценку

$$M \sim \frac{R\bar{v}^2}{G}. \quad (4.195)$$

Величины \bar{v}^2 и R поддаются определению при помощи наблюдений. Если затем воспользоваться формулой (4.195), то получится оценка для полной массы скопления галактик, которая называется динамической или вириальной массой скопления. Оказалось, что для большинства скоплений галактик динамическая масса, оцененная по формуле (4.195), в десятки раз превосходит видимую светящуюся массу скопления. Таким образом, при помощи наблюдений за движением галактик в их скоплениях можно сделать вывод, что порядка 90% сгущающейся вокруг метагалактик материи находится в скрытой массе, ненаблюдаемой в непосредственной форме.

Обозначим через $\mu_{\text{тёмн}}$ среднюю плотность небарионной несветящейся сгущающейся материи, которая называется *тёмной материей*. Согласно наблюдениям

$$(\mu_{\text{бар}} + \mu_{\text{тёмн}})/\mu_{\text{кр}} \sim 0,3 \pm 0,03. \quad (4.196)$$

Природа тёмной материи неизвестна.

4.3.5. Режим экспоненциального расширения Вселенной

Рассмотрим в пятимерном пространстве Минковского с вещественными координатами $\{z^0, z^a\}$, $a = 1, 2, 3, 4$, и метрикой

$$ds^2 = (dz^0)^2 - \sum_{a=1}^4 (dz^a)^2 \quad (4.197)$$

четырёхмерное подпространство, определяемое уравнением

$$(z^0)^2 - \sum_{a=1}^4 (z^a)^2 = -\frac{1}{H^2}, \quad H = \text{Const}. \quad (4.198)$$

Метрика на этом пространстве индуцируется метрикой объемлющего пространства (4.197). Это пространство называется *пространством де Ситтера*.

Введём четыре вещественных переменных, параметризующих пространство (4.198):

$$\begin{aligned} z^0 &= H^{-1} \text{sh} Hx^0, & z^a &= H^{-1} (\text{ch} Hx^0) n^a, \\ (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 + (n^4)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.199)$$

Если считать, что начало единичного четырёхмерного вектора n^a находится в начале координат пространства \mathbb{R}^4 с координатами z^a , то его конец находится в некой точке $p \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Поэтому три координаты точки p на S^3 и время x^0 параметризуют точки на пространстве (4.198). Очевидно, метрика на S^3 может быть записана как

$$\delta\tilde{s}^2 = (\delta n^a)^2 = (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2 + (\tilde{\omega}^3)^2 = (\tilde{\omega}^\alpha)^2, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.200)$$

Формы смещения $\tilde{\omega}^\alpha$ и соответствующие формы связности $\tilde{\omega}_\beta^\alpha$ удовлетворяют уравнениям структуры (4.126) с $K = 1$:

$$\delta\tilde{\omega}^\alpha + \tilde{\omega}_\beta^\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta = 0, \quad \delta\tilde{\omega}_\beta^\alpha + \tilde{\omega}_\gamma^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta^\gamma = \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta. \quad (4.201)$$

Теперь мы можем выписать метрику на пространстве (4.198), для чего в выражение для метрики Минковского (4.197) следует

подставить полные дифференциалы функций в (4.199):

$$\begin{aligned} d s^2 &= (d x^0)^2 - H^{-2} \operatorname{ch}^2 H x^0 \cdot (\delta n^a)^2 = \\ &= (d x^0)^2 - H^{-2} \operatorname{ch}^2 H x^0 \cdot (\tilde{\omega}^\alpha)^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b, \\ \omega^0 &= d x^0, \quad \omega^\alpha = H^{-1}(\operatorname{ch} H x^0) \tilde{\omega}^\alpha. \end{aligned} \quad (4.202)$$

Вычислим тензор Римана на изучаемом пространстве. Имеем:

$$d \omega^0 = 0, \quad d \omega^\alpha = (\operatorname{sh} H x^0) \omega^0 \wedge \tilde{\omega}^\alpha + H^{-1}(\operatorname{ch} H x^0) \delta \tilde{\omega}^\alpha. \quad (4.203)$$

Теперь при помощи уравнений

$$d \omega^0 + \omega_\alpha^0 \wedge \omega^\alpha = 0, \quad d \omega^\alpha + \omega_0^\alpha \wedge \omega^0 + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta = 0,$$

а также уравнений (4.202) и (4.203), находим:

$$\omega_\alpha^0 = \omega_0^\alpha = (\operatorname{sh} H x^0) \tilde{\omega}^\alpha, \quad \omega_\beta^\alpha = \tilde{\omega}_\beta^\alpha \longrightarrow d \omega_\beta^\alpha = \delta \tilde{\omega}_\beta^\alpha. \quad (4.204)$$

Вычисление тензора Римана производится стандартным путём:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R^{\alpha 0} &= d \omega^{\alpha 0} + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^{\beta 0} = \\ &= H(\operatorname{ch} H x^0) \omega^0 \wedge \tilde{\omega}^\alpha + [(\operatorname{sh} H x^0) \delta \tilde{\omega}^\alpha + (\operatorname{sh} H x^0) \tilde{\omega}_\beta^\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta] = \\ &= -H^2 \omega^\alpha \wedge \omega^0 \longrightarrow R_{\beta 0}^{\alpha 0} = -H^2 \delta_{\beta}^\alpha, \quad R_{\beta \gamma}^{\alpha 0} = 0. \end{aligned} \quad (4.205)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_\beta^\alpha &= d \omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma + \omega_0^\alpha \wedge \omega_\beta^0 = \\ &= \delta \tilde{\omega}_\beta^\alpha + \tilde{\omega}_\gamma^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta^\gamma - (\operatorname{sh} H x^0)^2 \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta = \\ &= -[\tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta + (\operatorname{sh} H x^0)^2 \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta] = -(\operatorname{ch}^2 H x^0) \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta \longrightarrow \\ &R_{\gamma \delta}^{\alpha \beta} = -H^2 \left(\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta - \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta \right). \end{aligned} \quad (4.206)$$

Формулы (4.205) и (4.206) собираются в одну формулу:

$$R_{cd}^{ab} = -H^2 (\delta_c^a \delta_d^b - \delta_d^a \delta_c^b). \quad (4.207)$$

Отсюда находим тензор Риччи и скалярную кривизну пространства (4.198):

$$R_c^a = -3H^2 \delta_c^a, \quad R = -12H^2. \quad (4.208)$$

Перепишем левую часть Ур. (3.97) при помощи (4.208), оставляя правую часть в прежнем виде:

$$3H^2\delta_b^a \approx \frac{8\pi G}{c^4}T_b^a + \Lambda\delta_b^a. \quad (4.209)$$

Для наглядности выпишем рядом матрицу тензора энергии-импульса материи и матрицу, связанную с космологической постоянной:

$$T_b^a = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad \Lambda\delta_b^a = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix}. \quad (4.210)$$

Отсюда видно, что космологическая постоянная даёт отрицательный вклад в давление, в то время как любое уравнение состояния материи в состоянии теплового равновесия приводит к положительному давлению.

Приближённое уравнение (4.209) становится всё более и более точным при условии $(8\pi G/c^4)T_0^0/\Lambda \rightarrow 0$ и $\Lambda = 3H^2$. Иными словами, если можно в уравнении Эйнштейна пренебречь вкладом от тензора энергии-импульса материи по сравнению со вкладом от космологической постоянной, то метрика (4.202) является решением уравнения Эйнштейна (3.97), если $\Lambda = 3H^2$.¹

Рассмотрим именно этот случай, когда вклад от тензора энергии-импульса материи пренебрежимо мал по сравнению со вкладом от космологической постоянной. В этом случае метрика (4.202) является решением уравнения Эйнштейна. Пусть $Hx^0 \gg 1$. Тогда согласно (4.202)

$$\omega^\alpha = \frac{e^{Hx^0}}{2H}\tilde{\omega}^\alpha. \quad (4.211)$$

¹Заметим, что если тензор энергии-импульса материи соизмерим или преобладает над космологической постоянной, то метрика (4.202) не может даже качественно быть решением уравнения Эйнштейна. Действительно, вид тензора энергии-импульса материи (см. (4.210)) не имеет ничего общего с видом вклада от космологической постоянной. Кроме того, компоненты тензора энергии-импульса при любом уравнении состояния существенно зависят от масштабного фактора, или от времени (см. Раздел 4.3.2).

Последняя формула показывает, что при указанных условиях мы имеем экспоненциальное расширение Вселенной.

Космологические наблюдения показывают, что режим экспоненциального расширения Вселенной (или близкий к нему режим) имеет место в настоящую эпоху. Как было показано, это значит, что вклад от космологической постоянной преобладает над вкладом от тензора энергии-импульса материи. Вклад от космологической постоянной в уравнение Эйнштейна называется *тёмной энергией*. Точнее, плотностью тёмной энергии называется величина

$$\varepsilon_{\text{тёмн}} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}.$$

В настоящее время имеется следующая оценка:

$$\frac{\varepsilon_{\text{тёмн}}}{\mu_{\text{кр}} c^2} \sim 0,7 \mp 0,03. \quad (4.212)$$

Из сравнения оценки (4.212) с оценкой (4.196) видно, что в уравнении Эйнштейна вклад от космологической постоянной преобладает над вкладом от тензора энергии-импульса материи в соотношении 7 : 3. Более того

$$(\mu_{\text{бар}} + \mu_{\text{тёмн}})/\mu_{\text{кр}} + \frac{\varepsilon_{\text{тёмн}}}{c^2 \mu_{\text{кр}}} = 1. \quad (4.213)$$

В настоящую эпоху

$$\Lambda \sim 10^{-56} \text{см}^2. \quad (4.214)$$

Метрика (4.202) — не единственное решение уравнения Эйнштейна (3.97) с нулевым тензором энергии-импульса материи и ненулевой космологической постоянной. Действительно, рассмотрим метрику вида

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 - a^2(x^0) (\delta x^\alpha)^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b, \\ \omega^0 &= dx^0, \quad \omega^\alpha = a(x^0) \delta x^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.215)$$

Здесь x^α — декартовы координаты в \mathbb{R}^3 . Таким образом, метрика (4.215) является метрикой расширяющегося (или

сжимающегося) во времени плоского трёхмерного пространства. Действительно, если вычислить тензор Римана метрики $\delta s^2 = a^2(x^0)(\delta x^\alpha)^2$ при помощи лишь оператора внешнего дифференцирования по пространственным координатам $\delta = \delta x^\alpha(\partial/\partial x^\alpha)$, то тензор Римана окажется нулевым. Однако, пространственно-временной тензор Римана метрики (4.215) не равен нулю. Вычислим его.

Имеем:

$$d\omega^0 = 0, \quad d\omega^\alpha = \frac{\dot{a}}{a}\omega^0 \wedge \omega^\alpha, \quad \dot{a} = \frac{da}{dx^0}. \quad (4.216)$$

Используя эти уравнения, нетрудно убедиться, что 1-формы

$$\omega_0^\alpha = \omega_\alpha^0 = \frac{\dot{a}}{a}\omega^\alpha, \quad \omega_\beta^\alpha = 0 \quad (4.217)$$

удовлетворяют уравнениям (см. Ур. (2.78) с нулевой правой частью)

$$d\omega^0 + \omega_\alpha^0 \wedge \omega^\alpha = 0, \quad d\omega^\alpha + \omega_0^\alpha \wedge \omega^0 + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta = 0.$$

Следовательно, формы (4.217) являются формами связности для метрики (4.215) Теперь из равенств 2-форм

$$\frac{1}{2}R^{\alpha 0} = d\omega^{\alpha 0} = -\frac{\ddot{a}}{a}\omega^\alpha \wedge \omega^0, \quad \frac{1}{2}R^{\alpha\gamma} = \omega_0^\alpha \wedge \omega^{0\gamma} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2}\omega^\alpha \wedge \omega^\gamma$$

находим все компоненты тензора Римана:

$$R_{\beta 0}^{\alpha 0} = -\frac{\ddot{a}}{a}\delta_\beta^\alpha, \quad R_{\beta\gamma}^{\alpha 0} = 0, \quad R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2}(\delta_\beta^\alpha\delta_\delta^\gamma - \delta_\delta^\alpha\delta_\beta^\gamma). \quad (4.218)$$

При помощи (4.218) легко получаем тензор Риччи, скалярную кривизну и ненулевые компоненты тензора Эйнштейна:

$$R_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_0^\alpha = 0, \quad R_\beta^\alpha = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta_\beta^\alpha, \\ R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), \quad (4.219)$$

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad R_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha R = \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta_\beta^\alpha. \quad (4.220)$$

Если

$$a = a_0 e^{Hx^0}, \quad \Lambda = 3H^2,$$

то метрика (4.202) является решением уравнения Эйнштейна (3.97) с нулевым тензором энергии-импульса материи.

В настоящее время считается, что метрика (4.215) наиболее адекватно описывает макроскопическую динамику Вселенной в её текущую эпоху развития.

4.3.6. Противоречия классических моделей Фридмана

Согласно рассуждениям и оценкам, приведенным в конце Подраздела 3, можно предполагать с некоторой натяжкой, что в предшествующую эпоху имел место степенной закон расширения Вселенной

$$a \sim \sqrt{L_0 ct}, \quad L_0 \sim ct_0 \sim 10^{28} \text{ см}, \quad t_0 \sim 15 \cdot 10^9 \text{ лет}. \quad (4.221)$$

Согласно философии квантовой механики невозможно рассматривать какие либо оценки, вытекающие из классической механики, на временах меньше планковского времени t_P , где

$$ct_P \sim l_P \sim \sqrt{\left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)} \sim 10^{-33} \text{ см}. \quad (4.222)$$

Это утверждение можно интерпретировать как утверждение о том, что в момент рождения Вселенной время уже имело порядок t_P . Тогда, в соответствии с (4.221), в момент рождения Вселенной размеры той части Вселенной, которая наблюдается в современную эпоху, были оценочно

$$a_0 \sim \sqrt{L_0 l_P} \sim 10^{-3} \text{ см}. \quad (4.223)$$

Здесь важно, что наблюдаемая часть Вселенной весьма однородна. Нет серьёзных оснований полагать, что это свойство ощутило усиливало в процессе эволюции. Это значит, что в момент рождения Вселенной на масштабе порядка (4.223) также имела место однородность. Однако это положение качественно противоречит представлениям, вытекающим из философии квантовой механики. Действительно, согласно этой философии размеры пространственно однородного кластера имеют порядок l_P ,

так как на таких масштабах $S_g/\hbar \sim 1$. На значительно больших масштабах пространственная однородность должна быть разрушена квантовыми флуктуациями. Действительно, в квазиклассическом приближении волновая функция

$$\Psi \sim \exp \frac{iS_g}{\hbar}. \quad (4.224)$$

Эта В.Ф. существенно изменяется на планковском масштабе l_P . Сопоставление оценки (4.223) с планковским масштабом приводит к выводу, что различных кластеров однородности должно быть порядка

$$\nu \sim \left(\frac{a_0}{l_P}\right)^3 \sim \left(\frac{L_0}{l_P}\right)^{3/2} \sim 10^{90}. \quad (4.225)$$

Конечно, последняя оценка весьма завышена. Более реалистичные оценки приводят к числу кластеров однородности на масштабах L_0 на несколько десятков порядков меньше, чем в (4.225). Тем не менее при любых оценках числа ν это число весьма велико. Это противоречит наблюдениям.

Теория инфляции предлагает следующий выход для устранения описанного парадокса.

В самый начальный период по времени после Большого взрыва, несмотря на высокую плотность материи, в уравнении Эйнштейна преобладала космологическая постоянная. Таким образом, на начальном этапе расширения Вселенной космологическая постоянная была весьма велика, что привело к чрезвычайно огромному расширению Вселенной в экспоненциальном режиме в течение достаточно малого времени. Затем расширение перешло в более спокойный Фридмановский режим вследствие кардинального уменьшения космологической постоянной. За период экспоненциального раздувания один единственный кластер однородности (с точки зрения квантовой механики), имеющий на начальном этапе раздувания пространственный масштаб $\sim l_P$, превратился во всю наблюдаемую Вселенную.

Более подробное обсуждение теории инфляции выходит далеко за рамки настоящего пособия.

Рекомендуемая литература

1. *Постников М. М.* Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.
2. *Постников М. М.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1988.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1988.
5. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.
6. *Дирак П. А. М.* Общая теория относительности. — М.: Атомиздат, 1978.
7. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ГИТТЛ, 1955.

Предметный указатель

- Аффинный параметр геодезической, 55
Атлас, 10
Дифференциал гладкого отображения, 17
Элемент объёма многообразия, 53
Формы смещения, 43
Формы связности, 44
Гладкое многообразие, 10
Гладкое отображение многообразий, 16
Градиент функции, 17
Гравитационная постоянная, 99
Гравитационный дефект массы тела, 142
Карта, 9
Касательный вектор к кривой, 54
Касательное пространство многообразия, 14
Координаты многообразия, согласованные с подмногообразием, 19
Космологическая постоянная, 110
Ковектор, 17
Критическая плотность вещества, 171
Локальные координаты, 9
Локально евклидова (псевдоевклидова) метрика, 50
Метрический тензор, 49
Многообразие с краем, 12
Опускание или поднятие тензорного индекса, 49
Ориентируемое многообразие, 35
Ортонормированный базис, 50
Перенос формы посредством гладкого отображения многообразий, 29
Подмногообразие многообразия, 19
Постоянная Хаббла, 170
Производная функции по вектору, 17
Пространство де Ситтера, 174
Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, 115
Собственное время, 79
Стокса теорема, 38
Свертка, 21
Тензор Риччи, 64
Тензор типа (a, b) , 20
Тензорное поле, 22
Тензорное умножение тензоров, 21

Теория инфляции, 180
Тетрадный постулат, 52
Уравнения Максвелла в Римановом пространстве, 92
Внешнее умножение дифференциальных форм, 25
Внешний дифференциал формы, 34

Учебное издание

Вергелес Сергей Никитович

**ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Редактор *О. П. Котова*. Корректор *Л. В. Себова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 24.02.2014. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Усл. печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 200 экз. Заказ № 100.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mail.mipt.ru