Задачи для отбора на
Летнюю школу по теоретической физике
в ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН

Решения задач нужно прислать на почту «school2025@itp.ac.ru» не позже 15 мая 2025 г. По этому же адресу можно задавать вопросы по условиям, если что-то непонятно. Задачи довольно сложные, проходного балла нет, поэтому просто старайтесь решить как можно больше. Желаем успехов!

Задача 1. Плавучесть

В жидкости плотности ρ_0 плавает бревно длины L квадратного сечения со стороной a с однородной плотностью ρ. Рассматриваем предел длинного бревна: $L \gg a$. В этом случае бревно будет плавать почти горизонтально, возможным отклонением от горизонтали пренебрегаем. При этом устойчивому положению равновесия соответствует некоторый поворот бревна вокруг своей оси, обозначим его ϕ (см. рис. 1). Найдите ϕ как функцию отношения плотностей $\gamma = \rho/\rho_0$.

Задача 2. Дальность полета в вязкой среде

Тело массы m движется в поле силы тяжести (которому соответствует ускорение свободного падения g) через вязкую среду, создающую силу трения $\boldsymbol{F} = -\alpha m \boldsymbol{v}$. Найти максимальную дальность «полета», а также соответствующее время «полета» и угол запуска, если тело начинает движение с начальной скоростью $v_0 \ll g/\alpha$.

Задача 3. Еще одна задача про распределение Максвелла

Имеется газ концентрации n при температуре T, в котором длина свободного пробега молекул равна l. Через этот газ движется диск радиуса $R \ll l$ со скоростью u, перпендикулярной плоскости диска. Скорость диска значительно превышает тепловую скорость движения молекул газа, т.е. $u \gg \sqrt{kT/m}$. Найти плотность газа на оси симметрии диска на расстоянии z позади него.

Задача 4. Сопротивление между узлами шестиугольной решетки

Найти сопротивление между узлами A и B, указанными на рис. 2, на бесконечной плоской шестиугольной решетке. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны r.

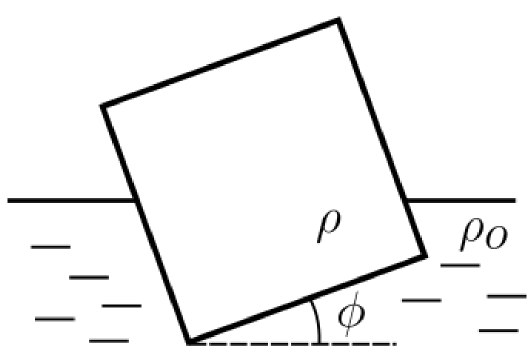

Рис. 1: Задача 1. Плавучесть квадратного бревна.

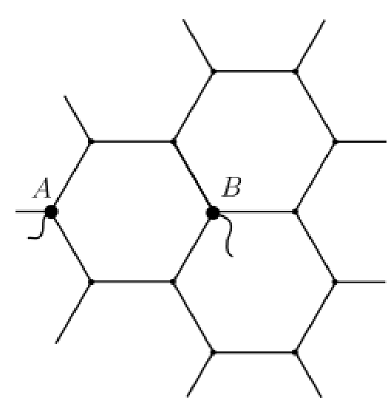

Рис. 2: Задача 4. Сопротивление между узлами бесконечной решетки.

Задача 5. Диссипация в металлическом шаре

Металлический шар радиуса R с проводимостью σ помещен в однородное электрическое поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$. Найти мощность диссипации энергии в пределе высоких частот, определяемом условием $\omega \gg c^2/(2\pi\sigma R^2)$, считая что при этом все еще выполнено условие квазистационарного приближения $R \ll c/\omega$.

Задача 6. Случайные блуждания

Пациенту прописали выпивать лекарства в дозировке четверть таблетки раз в день и выдали 10 таблеток в мешочке. Пациент раз в день достает из мешочка случайную таблетку. Если она целая, пациент ломает ее на 4 части, затем выпивает одну, а три четвертинки закидывает обратно в пакет. В противном случае, если он достает четвертинку, то сразу ее выпивает. Сколько в среднем останется целых таблеток через 8 дней?

Указание: задачу разрешается решать численно.

Задача 7. Система частиц на прямой

На прямой находятся N частиц. Вероятность того, что они располагаются в точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$, равна

$$\mathcal{P}[x_1, \ldots x_N] = A_N e^{-\mathcal{E}[x_1,\ldots x_N]}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} U(x_j - x_k) + \sum_{j=1}^{N} V(x_j), \quad U(x) = \frac{\Lambda}{a} e^{-|x|/\Lambda}, \quad V(x) = \frac{x^2}{2b^2}.$$

Коэффициент A_N определяется нормировкой вероятности. Величина $\mathcal{E}$ может быть интерпретирована как энергия конфигурации частиц, которые находятся во внешнем поле $V(x)$ и взаимодействуют друг с другом отталкивающим потенциалом $U(x)$. Найти среднюю плотность частиц (вероятность найти частицу в точке x) в пределе $N \to \infty$.

Задача 8. Связанное состояние

(*Эта задача требует владения квантовой механикой и предназначена для тех, кто уже изучал этот предмет.*)
Частица массы m находится в основном состоянии в сферической полости радиуса R с бесконечными стенками:

$$U(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \infty, & r \geqslant R. \end{cases}$$

В произвольную точку $\boldsymbol{r}_0$ внутри сферы, находящуюся на расстоянии $r_0 < (R - a)$ от центра, помещается примесь, представляющая собой непроницаемый шарик радиуса $a \ll R$:

$$\delta U(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| > a, \\ \infty, & |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| \leqslant a. \end{cases}$$

Определить сдвиг энергии основного состояния в первом неисчезающем порядке по a.